XXXVI Академические Чтения по Космонавтике
Москва, 24 – 27 января 2012 г.

АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА КА ОТ ЗЕМЛИ НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ С ГРАВИТАЦИОННЫМ МАНЕВРОМ У ЛУНЫ

С.В. Белоусов, В.В. Ивашкин***

***Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН**
****МИ Теплотехники**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Определение траектории перелета от Земли на ГСО с использованием гравитационного поля Луны

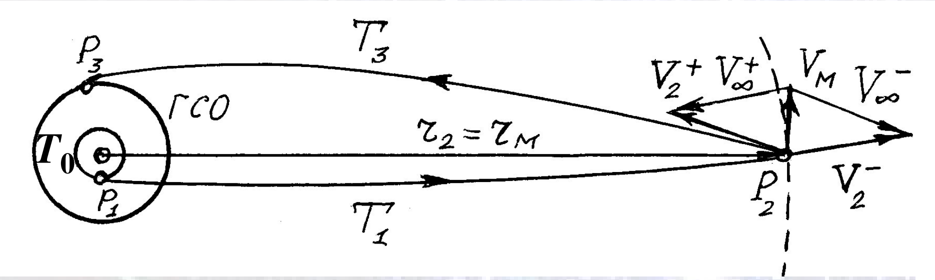
В докладе исследуется проблема определения и анализа свойств траектории перелета от Земли на ГСО с использованием гравитационного поля Луны

Определение траектории перелета включает два этапа:
Определение траектории в модели точечной сферы действия Луны.
Уточнение траектории с учетом возмущений от Луны, Солнца, сжатия Земли.

Определение траектории в модели точечной сферы действия Луны -1

1) В модели точечной сферы действия Луны геоцентрическая траектория КА представляется двумя дугами кеплеровских орбит. Первая дуга P_1P_2 - от точки P_1 конца разгона у Земли и начала пассивного полета к Луне до точки P2, центра Луны при ее облете. Вторая дуга P_2P_3 – от Луны, точки P_2 до точки P_3 касательного подлета к ГСО. Эти дуги соединены в центре Луны. Здесь радиус-вектор Луны – r_M, а вектор скорости – V_M. Поэтому

$$r_2 = r_M \quad (1); \quad V_\infty^- = V_2^- - V_M \quad (2); \quad V_\infty^+ = V_2^+ - V_M \quad (3)$$



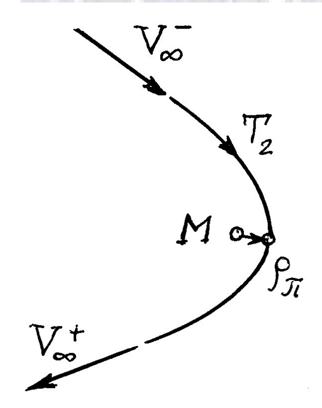


Рис. 1. Геоцентрическая траектория в модели точечной сферы действия Луны
Рис. 2. Облет Луны

В начале полета задается орбита «ожидания» T_0 радиуса r_0 с высотой H_0, наклонением i_0, большая полуось орбиты T_1 отлета:
$H_0 \approx 200$ км, $i_0 = 51{,}6°$ (Байконур), $i_0 = 62{,}7°$ (Плесецк); (4)
$a_1 = a_1^{(i)}$. (5)

Определение траектории в модели точечной сферы действия Луны - 2

Из условия разгона с орбиты ожидания на орбиту T_1 полета к Луне задаются параметры точки P_1 начала пассивного полета к Луне:
расстояние r_1 и угол наклона скорости к горизонту θ_1, определялась величина скорости V_1, наклонение, эксцентриситет и фокальный параметр орбиты:

$$\mathbf{i_1 = i_0,\ r_1 \approx r_0,\ \theta_1 \approx 0,\ V_1 = (-\mu_E/a_1 + 2\mu_E/\ r_1),\ e_1,\ p_1,} \qquad (6)$$

здесь μ_E - гравитационный параметр Земли.

После облета Луны по селеноцентрической орбите T_2, КА переходит на геоцентрическую орбиту T_3, лежащую в плоскости экватора Земли и касающуюся ГСО, для нее:

$$\mathbf{i_3 = 0,\ r_{\pi 3} = R_{ГСО} = 42164\ км}. \qquad (7)$$

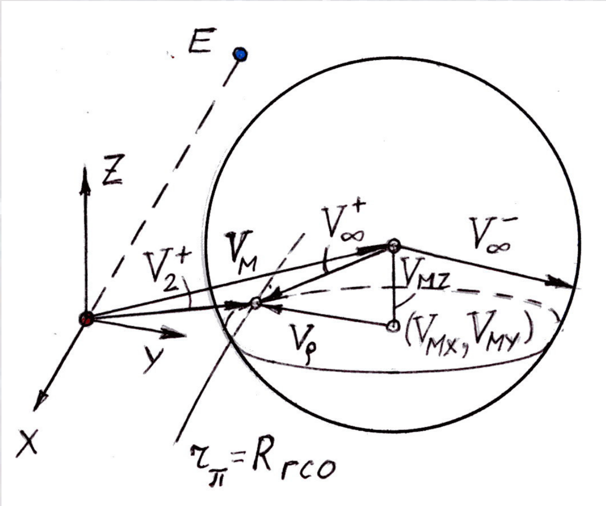
Отсюда следует, что в данной модели Луна при ее облете должна быть в плоскости земного экватора, т.е. в узле своей орбиты. Выбрав этот узел орбиты Луны (ОЛ), определим момент облета t_M, радиус-вектор $\mathbf{r_M}$ и вектор скорости Луны $\mathbf{V_M}$ и параметры точки P_2:

$$\mathbf{t_M = t(узла\ ОЛ);\ r_M = r_M\ (t_M);\ V_M = V_M\ (t_M);\ t_2 = t_M,\ r_2 = r_M}\ . \qquad (8)$$

Из условия достижения данной точки Луны P_2 определяется вектор геоцентрической скорости подлета к Луне и относительная селеноцентрическая скорость КА «на бесконечности» подлета к Луне, модуль этой скорости, а также остальные элементы орбиты T_1 (Ω_1, ω_1, $t_{\pi 1}$) и начальные данные t_1, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{r}_2\ ,\ t_2 \rightarrow \mathbf{V_2^-},\ \mathbf{V_\infty^-},\ V_\infty = |\mathbf{V_\infty^-}|,\ \Omega_1,\ \omega_1,\ t_{\pi 1},\ (t_1,\ \mathbf{r}_1,\ \mathbf{V}_1)_0\ . \qquad (9)$$

Определение траектории в модели точечной сферы действия Луны - 3



Определение скоростей отлета от Луны V_∞^+, V_2^+ и гравитационного маневра ГМ:

в пространстве скоростей множество скоростей «на бесконечности» образует сферу радиуса V_∞ с центром в конце вектора скорости Луны V_M. При пересечении этой сферы с плоскостью $V_z=0$, где должна быть скорость V_2^+, образуется окружность радиуса $V\rho$ с центром в проекции скорости Луны на плоскость $Vz=0$:

$$V_\rho=\{V_\infty^2-V_{MZ}^2\}^{1/2};\ x_\rho=V_{Mx};\ y_\rho=V_{My}. \qquad (10)$$

Рис. 3. Схема определения скорости КА после облета Луны

Проводим в данной плоскости гиперболу – годограф скорости, на котором перигейное расстояние равно радиусу ГСО ($r_\pi=R_{ГСО}$) и определяем точку пересечения ее с указанной окружностью. Это дает скорость отлета от Луны и определяет элементы орбиты отлета, параметры ГМ и орбиту облета Луны T_2, в частности – расстояние в периселении ρ_π и вектор b^- прицельной дальности подлета к Луне:

$$|V-V_M|=V_\infty;\ Vz=0,\ r_\pi=R_{ГСО};\ V_{2r}^+<0 \rightarrow V_\infty^+,\ V_2^+,\ a_2,\ e_2,\ (b^-)_0,\ b^+,\ \rho_\pi. \qquad (11)$$

Тем самым полностью определяется траектория перелета – в рамках данной модели.

Уточнение траектории - 1

Модель и Уравнения Движения КА без Коррекции

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu_E}{r^3}\mathbf{r} + \sum_i \mu_i \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\right|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{\left|\mathbf{r}_i\right|^3} \right) + \Delta_E + \mathbf{a}_{SP}; \quad (12)$$

r – геоцентрический радиус-вектор КА;

μ_E – гравитационный параметр Земли;

$\mathbf{r}_\mathbf{i}$, μ_i – радиус-векторы (из DE-405) и гравитационные параметры возмущающих небесных тел (Луна, Солнце, большие планеты);

Δ_E – возмущение из-за сжатия Земли;

a_{SP} – возмущение из-за давления Солнечного света.

Для построения движения КА в реальной силовой модели и учета возмущений разработан алгоритм и построена программа интегрирования уравнений движения КА. В основном варианте учитываются возмущений от сжатия Земли, притяжения Луны и Солнца.

Определение траектории в рамках этой, достаточно точной модели проводилось в два этапа.

Уточнение траектории – 1 этап

А) На первом этапе за исходные начальные данные движения КА t_1, r_1, V_1 берутся данные, полученные в приближенной модели точечной сферы действия Луны. Траектория интегрируется только до Луны. Варьированием трех независимых начальных параметров, позволяющих менять все три координаты радиуса вектора КА у Луны, обеспечивалось на траектории получение вектора прицельной дальности подлета к Луне и времени пролета у Луны. Итерационно варьировались начальное время, долготу восходящего узла и аргумент перигея:

$$t_1, \Omega_1, \omega_1 \rightarrow t_1, r_1, V_1 \rightarrow b^{-}=(b^{-})_0, t_2=t_M. \qquad (13)$$

При этом матрица производных для итераций берется из кеплеровской модели движения. Сходимость хорошая (несколько итераций). При выполнении условий (13) траектория получается весьма близкой к окончательной.

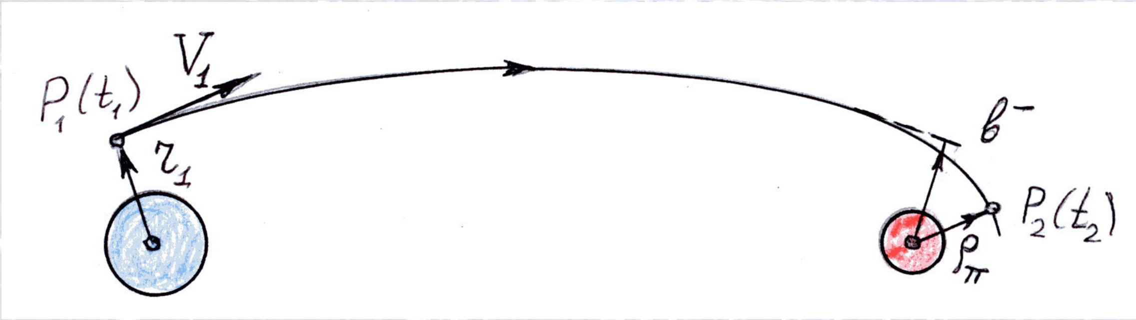


Рис. 4. Схема построения краевой задачи на первом этапе уточнения траектории

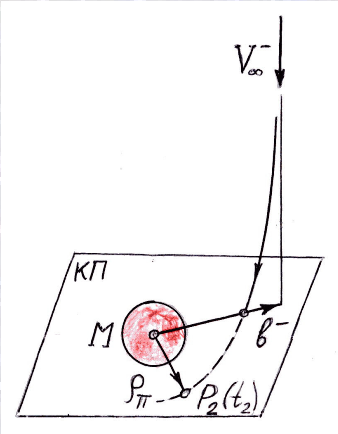


Рис. 5. Конечные параметры в картинной плоскости для краевой задачи на первом этапе уточнения траектории

Уточнение траектории – 2 этап

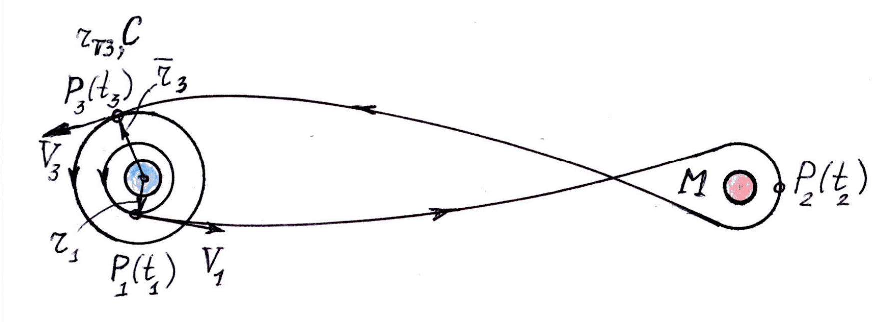


Рис. 6. Схема построения краевой задачи на втором этапе уточнения.

На заключительном этапе определения траектории варьированием трех начальных данных окончательно добиваемся получения траектории, лежащей в плоскости ГСО и касающейся ее в перигее:

$$t_1, \Omega_1, \omega_1 \rightarrow t_1, r_1, V_1 \rightarrow r_{\pi 3}=R_{ГСО};\ C_x^0 \equiv \sin i \sin\Omega\,(t_3)=0;\ C_y^0 \equiv -\sin i \cos\Omega\,(t_3)=0,\ Cz>0. \quad (14)$$

Сходимость итерационного процесса хорошая, несколько итераций.

2. Оценка корректирующих свойств траектории перелета на ГСО

а) Влияние ошибок начальных данных на отклонения параметров траектории

Ошибки управления движением РН моделировались ошибками реализации начальных данных x_{0i}:

$$t_1,\ r_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ V_1\ (V_{1x},\ V_{1y},\ V_{1z}). \qquad (15)$$

Это приводит к отклонениям параметров траектории полета КА к ГСО.

б) Корректируемые параметры - 1

Рассмотрены два набора корректируемых параметров.
В первом варианте корректируются параметры краевой задачи определения траектории:

$$y_f\ (I) = (r_{\pi f},\ C^0_x,\ C^0_y)^*. \qquad (16)$$

Такой вариант обеспечивает перевод КА на экваториальную орбиту, касающуюся ГСО, но требует коррекции пролета у Луны, поэтому в одноимпульсной коррекции это возможно практически до облета Луны.

2. Оценка корректирующих свойств траектории перелета на ГСО

б) Корректируемые параметры - 2

Во втором варианте корректируется радиус-вектор $r_3=r_f$ в номинальное конечное время :

$$\mathbf{y_f\ (II) = r_f = (x_f,\ y_f,\ z_f)^*.} \qquad (17)$$

Этот вариант может быть использован и после облета Луны, для второй коррекции, если она потребуется.

в) Корректирующее воздействие

Рассматривается «импульсная» коррекция, когда траектория корректируется однократным включением двигателя КА, моделируемым мгновенным изменением скорости КА в расчетной точке коррекции на вектор скорости коррекции:

$$\mathbf{\Delta Vc}\ (\Delta Vcx,\ \Delta Vcy,\ \Delta Vcz). \qquad (18)$$

2. Оценка корректирующих свойств траектории перелета на ГСО

г) Определение импульса скорости коррекции

Пусть некоторое отклонение начальных параметров привело к отклонению корректируемого вектора конечных параметров траектории КА от номинального расчетного значения на вектор

$$\delta y_f = \delta y_f(I), \text{ или } \delta y_f = \delta y_f(II). \quad (19)$$

После приложения корректирующего импульса скорости в момент коррекции t_c корректируемые параметры должны быть равны номинальным:

$$y_f\,(\Delta Vc) = y_{f\ ном}. \quad (20)$$

т.е. надо получить изменение корректируемых параметров

$$\Delta y_f = -\,\delta y_f. \quad (21)$$

В линейном, Ньютоновском приближении импульс скорости коррекции:

$$\Delta Vc = -A_{yf\ Vc}^{\ -1}\ \delta y_f;\ A_{yfVc} = [\partial y_f/\partial V_c\ ]. \quad (22)$$

Приложив этот импульс скорости коррекции, сделаем расчет скорректированной траектории и определим для нее отклонения конечных параметров от номинальных $\delta y_f = (\delta y_{f1}, \delta y_{f2}, \delta y_{f3})^*$ и проверяем их малость. При выполнении условий

$$|\delta y_{fi}| \le \varepsilon_i,\ i=1,\ 2,\ 3, \quad (23)$$

расчет коррекции заканчивается. Если эти условия не выполняются, то делается следующая итерация, при этом за δy_{f1} в (22) берется последнее отклонение, и т.д.
Анализ сделан для обоих вариантов корректируемых параметров. В случае коррекции координат функции (20) не очень гладкие и потребовалось вводить в (22) сомножитель λ, $0<\lambda<1$, приближаясь к решению малыми шагами, т.е. модифицированным методом Ньютона. При коррекции элементов сходимость была хорошей, брали $\lambda=1$.

3. Основные характеристики траекторий - 1

На основе данного подхода разработаны алгоритм и программный комплекс определения траектории КА для перелета на ГСО с использованием гравитационного поля Луны, а также для оценки коррекционных свойств траектории.

Получено несколько семейств траекторий перелета на ГСО с помощью маневра у Луны. Это – траектории выведения с Байконура и Плесецка, с полетом в разные годы, с облетом Луны у восходящего и нисходящего узлов, с изменением большой полуоси a_1 в некотором допустимом диапазоне. В таблице приведены характеристики четырех траекторий одного семейства.

Облет Луны 3.1.2001, у восх. узла. Выведение с Байконура	Траектория $a_{1\ min}$	Траектория № 1	Траектория № 2	Траектория № 3
a_1, тыс. км	211, 260	212	220	230
$r_{\alpha 1}$, тыс. км	416	417	433	453
$\rho_{\pi 2}$, км	4913	4222	2674	1981
V_∞, км/с	0.951	0.962	1.012	1.059
t_{12}, сут	4.847	4.553	3.901	3.587
t_{23}, сут	3.07	3.046	2.935	2.847
t_{13}, сут.	7.919	7.598	6.836	6.434
ΔV_1, км/с	3.1383	3.1386	3.142	3.145
ΔV_2, км/с	1.1471	1.149	1.161	1.173
ΔV_Σ, км/с	4.285	4.288	4.303	4.318

Табл. 1. Основные характеристики семейства траекторий полета к ГСО с близким облетом Луны (Дата облета Луны 2001/01/03.0; Облет Луны в восходящем узле Лунной орбиты; $r_M \approx$ 391000 км; Старт с Байконура, i_0= 51.6°; H_0=200 км; ϑ_1=0; $r_{\pi 3}$ =42164 км; i_3=0).

3. Основные характеристики траекторий - 2

Минимальное значение большой полуоси a_{1min} примерно соответствует достижимости Луны, при этом апогейное расстояние примерно равно расстоянию от Земли до Луны . Для этой траектории получаем наибольшее значение минимального расстояния пролета у Луны в периселении, ~5-8 тыс. км, и наибольшее время полета до Луны, ~4.5-5 сут. и всего полета, ~7-8 сут. На рис. 7 приведена вторая траектория (№1- для коррекции), для нее начальное значение большой полуоси 212 тыс. км.

Максимальное значение a_{1max} соответствует минимально возможному (по точности управления) значению расстояния пролета у Луны, ~ 2 000 км. Для этой траектории будет минимальное (для семейства) время полета до Луны, ~3-3.5 сут.

Общая характеристическая скорость для этих траекторий меняется мало, составляя 4200-4350 м/с.

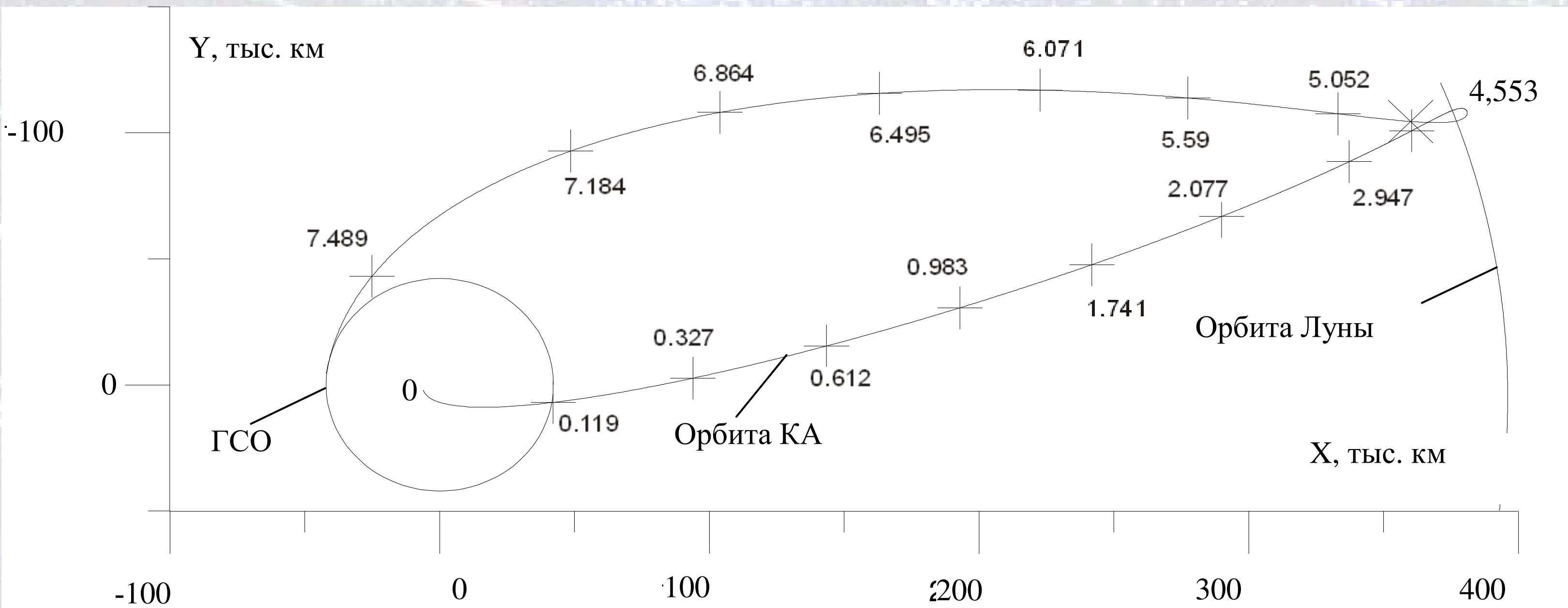


Рис. 7. Траектория №1 перелета с орбиты ожидания у Земли на ГСО (Дата облета Луны 2001/01/03.0; Облет Луны в восходящем узле Лунной орбиты; $r_M \approx 391000$ км; Старт с Байконура, $i_0=51.6°$; $H_0=200$ км; $\vartheta_1=0$; $a_1=212$ тыс. км; $r_{\pi 3}=42164$ км; $i_3=0$.

4. Оценка коррекционных свойств траектории -1

Для оценки коррекционных свойств траектории перелета на ГСО приняты следующие максимальные значения (в смысле 3σ) ошибок выведения:

$$\delta t_1=10\text{ с};\ \delta x_1=0{,}1\text{ км};\ \delta y_1=0{,}1\text{ км};\ \delta z_1=0{,}1\text{ км};\ \delta V_{1x}=0{,}1\text{ м/с};\ \delta V_{1y}=0{,}1\text{ м/с};\ \delta V_{1z}=0{,}1\text{ м/с}. \quad (24)$$

Эти ошибки предполагаются независимыми, распределенными по нормальному закону.

Табл. 2. Отклонения конечных элементов и координат, вызванных вариациями начальных данных (траектория № 1)

	δt_1=10с	δX_1=100м	δY_1=100м	δZ_1=100м	δV_{1x}=0.1м/с	δV_{1y}=0.1м/с	δV_{1z}=0.1м/с
$\Delta r_{\pi f}$ [км]	34.9	4002.2	1221.7	115.9	-922.4	2861.1	-3319.8
$\Delta C^0 x$	-8E-05	0.011	0.004	-6.E-5	-0.002	0.009	-0.011
$\Delta C^0 y$	3E-04	-0.046	-0.016	2.7E-04	0.009	-0.035	0.045
Δx_f [км]	-18.8	-4642.9	-1529.8	-90.1	1080.5	-3403.4	4552.1
Δy_f [км]	79.3	-2613.2	-1360.1	133.1	645.1	-2311.5	4820.2
Δz_f [км]	-6.3	805.7	295.5	-5.0	-179.3	608.6	-1022.7
$\Delta \rho_\pi$ [км]	-0.9	-243	-82.4	-3.8	56.7	-180.4	241
Δx_{0i}^*, ρ_π =1738км	-	1.13 км	3.38 км	-	- 4.82 м/с	1.53 м/с	- 1.15 м/с

В Табл. 2 приведены отклонения конечных элементов, конечных координат и расстояния в периселении, вызванных вариациями начальных данных. Наибольшее влияние оказывают ошибки в начальной координате x_1, она близка к радиусу, и в начальной компоненте скорости V_{1z}, она ближе к скорости. Суммарное отклонение по конечному перигейному расстоянию составляет ~6000 км, по наклонению ~4 град. Даны также предельные начальные отклонения, приводящие к касанию Луны.

4. Оценка коррекционных свойств траектории -2

В табл. 3 приведены частные производные от корректируемых элементов орбиты ($r_{\pi f}$, C^0_{xf}, C^0_{yf}) по компонентам импульса скорости коррекции (Vcx, Vcy, Vcz) для Траектории 1, r_c=50 тыс. км

Табл. 3. Матрица частных производных от элементов орбиты ($r_{\pi f}$, C^0_{xf}, C^0_{yf}) по компонентам импульса скорости коррекции (Vcx, Vcy, Vcz) для Траектории 1, r_c=50 тыс. км.

	/∂Vcx, м/с	/∂Vcy , м/с	/∂Vcz , м/с
$\partial r_{\pi f}$/,км	-16281.3	-3640.5	-2828.6
∂C^0_{xf}/	-0.039	3.4E-04	-0.019
∂C^0_{yf}/	0.155	-0.002	0.075

На основе указанного алгоритма, для фиксированной точки коррекции, для каждого отклонения δx_{0i} в начальных данных определены компоненты импульса коррекции:

$$\delta x_{0i} \rightarrow \Delta Vcx(\delta x_{0i}),\ \Delta Vcy(\delta x_{0i}),\ \Delta Vcz(\delta x_{0i}), \qquad (25)$$

далее – суммарные компоненты импульса , от всех начальных ошибок:

$$\Delta Vcx_\Sigma,\ \Delta Vcy_\Sigma,\ \Delta Vcz_\Sigma, \qquad (26)$$

затем – оценка величины корректирующего импульса скорости:

$$\Delta Vc = [\Delta Vcx_\Sigma^2 + \Delta Vcy_\Sigma^2 + \Delta Vcz_\Sigma^2]^{1/2}. \qquad (27)$$

4. Оценка коррекционных свойств траектории -3

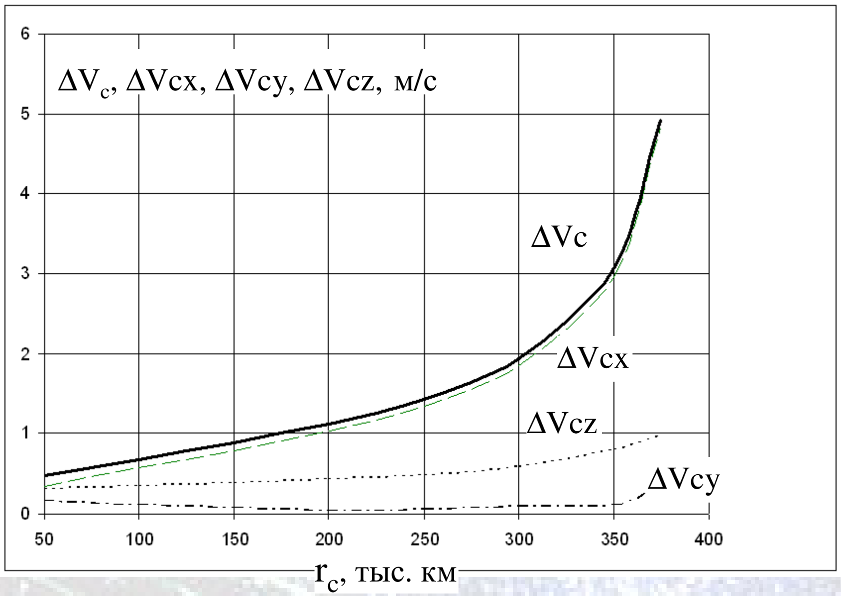


Рис. 8. Изменение компонент импульса скорости коррекции и величины импульса в зависимости от расстояния коррекции (траектория №1).

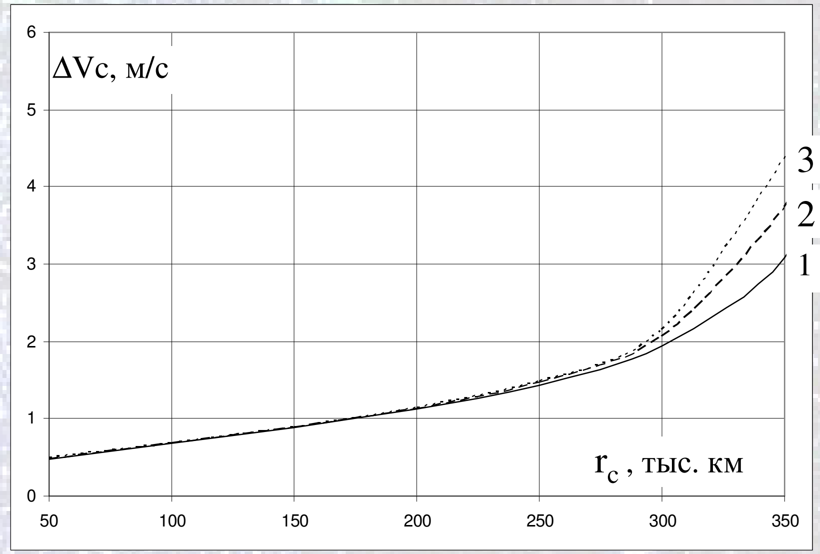


Рис. 9. Изменение величины импульса скорости коррекции в зависимости от расстояния коррекции для трех траекторий семейства

Оба варианта коррекции дают очень близкие результаты при коррекции до облета Луны **.** На рис. 8 приведены оценки по каждой компоненте импульса скорости коррекции и по величине всего импульса в зависимости от расстояния в точке коррекции - для Траектории 1. На рис. 9 приведены оценки величины импульса в зависимости от расстояния в точке коррекции - для всех трех траекторий семейства, они имеют близкие характеристики. Величина импульса скорости коррекции довольно мала, менее 5 м/с при коррекции на расстояниях до 360 тыс км от Земли.

5. Выводы

Выполненный анализ показывает, что схема перелета на ГСО с использованием гравитационного поля Луны обладает не только хорошими номинальными энергетическими характеристиками, но также довольно устойчива к возмущениям и обладает хорошими коррекционными возможностями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант 09-01-00710) и Гранта программы поддержки ведущих научных школ НШ-6700.2010.1.

Литература

1. Ивашкин В.В., Тупицын Н.Н. Об использовании гравитационного поля Луны для выведения космического аппарата на стационарную орбиту спутника Земли. // Космические исследования. 1971, т. IX, вып. 2, с. 163-172.
2. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975, 392 с.
3. Graziani F., Gastronuovo M.M. and Teofilatto P. Geostationary obits from mid-latitude launch sites via lunar gravity assist. // American Astronautical Society Publications, Advances in Astronautical Sciences. V. 84. 1993. AAS 93-289. P. 561-572.
4. В.В. Ивашкин, А.Р. Голиков. Траектории перелета между Землей и геостационарной орбитой при использовании гравитационного поля Луны. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2008. № 95. 24 с.