ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 78 за 2011 г.

Парусников В.И.

Четырехмерное обобщение цепных дробей

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

В.И. Парусников

ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ АЛГОРИТМА ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Москва, 2011 г.

УДК 511.36

В. И. Парусников. Четырехмерное обобщение цепных дробей. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Пусть $L_i(X)$, $i = 1, 2$, $L_1 \neq \bar{L}_2$, — две комплексные линейные формы в $\mathbb{R}^4$, а $K_i(X) = L_i(X)\bar{L}_i(X)$ — положительные квадратичные формы. Корневые множества $\mathcal{L}_i$ форм K_i суть двумерные плоскости в $\mathbb{R}^4$. Пусть $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = 0$, а плоскости $\mathcal{L}_i$ не содержат других целых точек, кроме нуля. Мы предлагаем здесь алгоритм вычисления целых точек, дающих наилучшие приближения к корневым множествам $\mathcal{L}_i$. Если коэффициенты форм L_i лежат в двух вполне комплексных числовых полях k_i 4-й степени, то наш алгоритм часто позволяет найти единицы этих полей. Алгоритм тестировался на наборе полей 4-й степени, задаваемых полиномами с небольшими коэффициентами. Алгоритм достигал успеха чаще, чем наилучший из известных в четырехмерном вполне вещественном случае алгоритм — алгоритм Гютинга.

V. I. Parusnikov. 4-dimensional generalization of the continued fractions. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2011.

Let $L_i(X)$, $i = 1, 2$, $L_1 \neq \bar{L}_2$, be two complex linear forms in $\mathbb{R}^4$, and $K_i(X) = L_i(X)\bar{L}_i(X)$ are positive quadratic forms. The root sets $\mathcal{L}_i$ of forms K_i are two-dimensional planes in $\mathbb{R}^4$. Assume that $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = 0$ and that there are no integer points except 0 which lie at $\mathcal{L}_i$. We propose an algorithm of computation of integer points that give the best approximations to the sets of roots $\mathcal{L}_i$. If coefficients of forms L_i lie in totally complex quaternary conjugated number fields k_i, our algorithm often finds unities of k_i. The algorithm was tested on the set of quaternary number fields specified by equations with small coefficients. The algorithm was successful more often than the best of known algorithms in totally real quaternary case — the Güting algorithm.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 09-01-00291, 08-01-00082.

E-mails: parus@keldysh.ru
сайт: www.keldysh.ru

§ 1. Постановка задачи

Пусть в четырехмерном комплексном пространстве заданы 2 комплексных вектора
$$L_i = (l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}, l_{i,4}) \in \mathbb{C}^4,\ i = 1, 2.$$
Будем обозначать чертой $\overline{L}$ вектор, комплексно сопряженный к вектору L. Введя комплексные линейные формы
$$\langle L_i, X\rangle \stackrel{\text{def}}{=} l_{i,1}x_1 + l_{i,2}x_2 + l_{i,3}x_3 + l_{i,4}x_4,$$
получим неотрицательные на $X \in \mathbb{R}^4$ вещественные квадратичные формы
$$m_i(X) = \langle L_i, X\rangle\langle \overline{L}_i, X\rangle = \langle \operatorname{Re} L_i, X\rangle^2 + \langle \operatorname{Im} L_i, X\rangle^2, \quad i = 1, 2.$$

Нас будет интересовать множество, где обращается в нуль произведение $m_1(X)m_2(X)$ этих квадратичных форм. Это — объединение в $\mathbb{R}^4$ двух двумерных плоскостей
$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 :$$
$$\mathcal{L}_i = \{X :\ \langle \operatorname{Re} L_i, X\rangle = \langle \operatorname{Im} L_i, X\rangle = 0\},\ i = 1, 2.$$

Спроектируем с помощью отображения
$$m(x) = (m_1(X), m_2(X)) \tag{1.1}$$
пространство $\mathbb{R}^4$ в неотрицательный квадрант
$$\mathbb{R}^2_+ = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 :\ r_1 \geq 0,\ r_2 \geq 0\}$$
двумерной плоскости.

В интересных с теоретико-числовой точки зрения случаях общего положения плоскости $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ пересекаются только в нуле, а проекции целых точек $\mathbb{Z}^4\backslash 0$ не попадают на границу квадранта $\mathbb{R}^2_+$. Дальнейшие определения дадим в предположении, что эти условия выполнены.

Ненулевую целочисленную точку $X \in \mathbb{Z}^4 \setminus 0$ назовем *наилучшим приближением к* $\mathcal{L}$, если в прямоугольнике без вершины $\{(r_1, r_2) :\ 0 \leq r_i \leq m_i(x),\ i = 1, 2\} \setminus m(X)$ нет проекций других ненулевых целых точек $Y \in \mathbb{Z}^4,\ Y \neq 0$, т.е. таких Y, что
$$m_1(Y) \leq m_1(X),\ m_2(Y) \leq m_2(X), \quad m_1(Y)m_2(Y) < m_1(X)m_2(X).$$

Задача: Найти наилучшие целочисленные приближения X к объединению плоскостей $\mathcal{L}$ (не обязательно все).

С точки зрения размерностей возникающих объектов, нашей задаче близка задача отыскания в трехмерном случае наилучших приближений к плоскости $\mathcal{L}_1$ и прямой $\mathcal{L}_2$. Два разных алгоритма ее решения были предложены Вороным [1] и Брюно и Парусниковым [2]. Алгоритм Вороного основан на поиске последовательных относительных минимумов $m(X)$ для $X \in \mathbb{Z}^3$, алгоритм Брюно – Парусникова основан на вычислении границы модульного многогранника. Оба алгоритма "односторонние": у Вороного алгоритм идет в сторону плоскости $\mathcal{L}_1$, т.е. $m_1(X)$ последовательно убывают, а $m_2(X)$ возрастают; а у Брюно – Парусникова —- в сторону прямой $\mathcal{L}_2$, т.е. $m_1(X)$ возрастают, а $m_2(X)$ убывают. При этом алгоритм Вороного более экономный: на каждом шаге он требует перебора 5 случаев, а алгоритм Брюно – Парусникова на шаге требует перебора многих случаев и удобней для вычислений на компьютере. Далее Брюно и Парусниковым [3] был предложен алгоритм, работающий в обе стороны. Он явился переработкой алгоритма из [2].

В техмерном случае для отыскания единиц вполне вещественных кубических полей успех достигается с помощью алгоритмов Вороного (также предложенного в работе [2]), и Брюно [4]. Оба этих алгоритма — геометрические, т.е. они работают с учетом геометрии связанных с задачей выпуклых многогранников.

Также, в силу своей простоты и высокой скорости, на практике часто используются алгоритмы, так или иначе обобщающие на двумерный случай алгоритм Евклида деления с остатком (алгоритмы Эйлера, Якоби, Бруна, Пуанкаре и др.). Однако они находят алгебраические единицы не для всех кубических полей [5].

Среди алгоритмов указанного типа можно выделить алгоритм Гютинга [6], имеющий относительно большой процент успеха.

Алгоритм Гютинга сравнительно мало известен, поэтому приведем его описание (для случая размерности 4). Имеются разные модификации алгоритма, отличающиеся выбором функции $f(x)$, отображающей вещественные числа в целые: $f(x)$ может быть, например, ближайшим целым к x или функцией, не симметричной в окрестности целых чисел. Мы опишем алгоритм для случая, когда $f(x) = [x]$ — целая часть x.

Алгоритм Гютинга состоит из шагов. На шаге с номером n по упорядоченной четверке A_n положительных чисел

$$A_n = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \alpha_{n,4}),$$
$$\alpha_{n,1} \geq \alpha_{n,2} \geq \alpha_{n,3} \geq \alpha_{n,4} > 0,$$

последовательно получают серию неполных частных

$$f_{n,2} = [\alpha_{n,1}/\alpha_{n,2}],$$
$$f_{n,3} = [(\alpha_{n,1} - f_{n,2}\alpha_{n,2})/\alpha_{n,3}],$$
$$f_{n,4} = [(\alpha_{n,1} - f_{n,2}\alpha_{n,2} - f_{n,3}\alpha_{n,3})/\alpha_{n,4}]$$

после чего остаток

$$\beta_n = \alpha_{n,1} - f_{n,2}\alpha_{n,2} - f_{n,3}\alpha_{n,3} - f_{n,4}\alpha_{n,4}, \quad \beta_n < \alpha_{n,4},$$

включают в новую упорядоченную четверку

$$A_{n+1} = (\alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \alpha_{n,4}, \beta_n).$$

Для исследования свойств алгоритмов нами брался набор чем-то известных кубических полиномов. Брались полиномы, определяющих первые 19 экстремальные формы Свиннертона-Дайера и полиномы, встречавшиеся в работах Вороного и Фадеева,— всего 22 полинома. Затем для одного из корней полинома λ к вектору $(1, \lambda, \lambda^2)$ применялись разные варианты перечисленных алгоритмов и другие алгоритмы. Периодичность алгоритма, означающая отыскание единицы кубического поля, у классического алгоритма Гютинга была отмечена в 17 случаях, и в 15 случаях — у варианта, когда f — ближайшее целое. Прочие алгоритмы были периодичны не более, чем в 11 случаях из 22.

Четырехмерный вариант алгоритма Гютинга нами также тестировался. Были рассмотрены вполне вещественные поля четвертой степени, степенные базисы в которых задаются неприводимыми уравнениями с небольшими коэффициентами. Исключались тривиальные случаи алгебраических единиц и уравнений, получающихся из другого такого же заменой $\pm\lambda + c, c \in \mathbb{Z}$:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,\ a_j \in \mathbb{Z},$$
$$|a_j| \le b,\ j = 1,2,3, \quad a_0 \ge 2.$$

Из 60 полиномов, соответствующих небольшим значениям максимума b коэффициентов полинома (b не превосходило 5) алгоритм Гютинга оказался периодичен лишь в 9 случаях.

§ 2. Описание нового алгоритма

Вектор-функция $M(X) = (m_1(X), m_2(X))$ отображает $\mathbb{R}^4$ в положительный квадрант плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\mathbf{Z}^4$ образ целочисленной решетки $\mathbb{Z}^4$ без $X = 0$:

$$\mathbf{Z}^4 = M(\mathbb{Z}^4 \setminus 0).$$

Пусть далее $\mathbf{M}$ обозначает выпуклую оболочку этого множества

$$\mathbf{M} = \mathrm{conv}(\mathbf{Z}^4),$$

а $\partial\mathbf{M}$ — границу множества $\mathbf{M}$.

Множество $\partial\mathbf{M}$ является выпуклой ломаной, состоящей из вершин и ребер. Ломаная $\partial\mathbf{M}$, вообще говоря, может иметь бесконечные вертикальное или горизонтальное ребро. Всем вершинам многоугольника и некоторым точкам, лежащим на его ребрах, т.е. точкам множества $\partial\mathbf{M}\cap\mathbf{Z}^4$, отвечают целые точки $X \in \mathbb{Z}^4\backslash 0$, которые суть наилучшие приближения к $\mathcal{L}$. Таким образом, чтобы решить Задачу, достаточно вычислить многоугольник $\partial\mathbf{M}$.

Посмотрим теперь, какие характерные черты имеет наша задача в наиболее актуальном, алгебраическом случае.

Пусть $K = K_1 \subset \mathbb{C}$ — вполне комплексное алгебраическое поле четвертой степени, а целое алгебраическое число $\lambda \in \mathbb{C}$ вместе со своими степенями $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3$ составляет базис поля K: $K = \mathbb{Q}(\lambda)$.

Обозначим

$$f(x) = x^4 + f_3x^3 + f_2x^2 + f_1x + f_0,\ \ f_j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

неприводимый полином, одним из четырех корней которого является λ. Корни $\lambda_1\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ полинома $f(x)$ разбиваются на пары, состоящие из комплексно сопряженных чисел. В соответствии с этим мы и выберем их нумерацию:

$$\lambda = \lambda_1 = \overline{\lambda}_3, \quad \lambda_2 = \overline{\lambda}_4.$$

Положим векторы L_i равными

$$L_i = (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3), i = 1, 2.$$

Линейные формы

$$\langle L_i, X\rangle = x_1 + x_2\lambda_i + x_3\lambda_i^2 + x_4\lambda_i^3$$

при целых $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}^4$ дают точки $\mathbb{Z}$-модуля (решетки) лежащей в поле K_i — в i-м алгебраически сопряженном к полю K поле.

Форма четвертой степени

$$n(x) = m_1(X)m_2(X) = L_1(X)L_2(X)L_3(X)L_4(X)$$

это произведение четырех алгебраически сопряженных чисел, лежащих в четырех алгебраически сопряженных полях. Коэффициенты формы $n(X)$ выражаются как целочисленные полиномиальные комбинации целых коэффициентов многочлена $f(x)$, т.е. они суть целые. Итак, при $X \in \mathbb{Z}^4$ число

$n(X)$ —- целое. Величина $n(X)$ пропорциональна норме в поле K алгебраического числа $L_1(X)$.

Отметим, что при $X \neq 0$ значение $n(X)$ не может быть нулем, ведь равенство $n(X) = 0$ означало бы обращение в нуль одного из сомножителей $L_i(X)$, а, следовательно, и сомножителя $L_1(X)$. И число λ_i удовлетворяло бы алгебраическому уравнению степени меньшей, чем 4. Таким образом, в нашем случае при целых $X \in \mathbb{Z}^4 \setminus 0$ вещественные квадратичные формы $m_i(X) = |L_i(X)|^2$ не могут обращаться в 0, и вершины многоугольника $\partial\mathbf{M}$ лежат строго внутри положительного квадранта, не попадая на горизонтальную и вертикальную полуоси.

Умножению чисел решетки ($\mathbb{Z}$-модуля в K) на λ_i отвечает линейное преобразование, матрица которого — присоединенная матрица многочлена (1) $f(x)$:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_0 \\ 1 & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 1 & f_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Умножению на число поля K, которое записывается полиномом от λ_i $g(\lambda_i) = g_3\lambda_i^3 + g_2\lambda_i^2 + g_1\lambda_i + g_0,\ g_j \in \mathbb{Q}$, отвечает линейное преобразование с матрицей $g(F) = g_3F^3 + g_2F^2 + g_1F + g_0E$ (E — единичная матрица). Умножению на число, являющееся единицей поля K, соответствует линейное преобразование с определителем ±1, т.е. характеристический многочлен которого имеет свободный член, равный плюс – минус единице.

Согласно теореме Дирихле, размерность группы единиц поля $\mathbb{Q}(\lambda_1)$ равна единице. Умножение на алгебраическую единицу группы единиц поля в фиксированном базисе записывается как умножение на матрицу D с рациональными коэффициентами и с определителем ±1. Преобразование $D:\ X = DY$ переводит целые точки в целые, поэтому оно переводит в себя множество $\mathbf{M}$ и его границу $\partial\mathbf{M}$. Т.е. эти множества инвариантны относительно некоторой группы преобразований. Поскольку нормы чисел $L_1(X)$ и $L_1(DX)$ равны, орбиты образа группы единиц состоят из точек с одинаковым значением $n(X)$, т.е. удовлетворяют условию

$$m_1(X)m_2(X) = \text{const}.$$

В соответствии с этим соображением нами будут выбраны координаты, в которых будет исследоваться задача.

Мы будем использовать два отображения $U = U(X)$, $U = U_1(X), U = U_2(X)$:

$$U_1(X) = (u_1(X), v_1(X)) = \left(\frac{m_1(X)}{m_2(X)}\ ,\ m_1(X)m_2(X)\ \right), \tag{3}$$

$$U_2(X) = (u_2(X), v_2(X)) = (\ \log \frac{m_1(X)}{m_2(X)}\ ,\ \log(m_1(X)m_2(X))\ ). \qquad (4)$$

В обоих представлениях группа единиц поля оставляет на месте вторую координату образа $U(X)$ точки. Образом всего пространства $\mathbb{R}^4$ в первом случае будет положительный квадрант плоскости $\mathbb{R}^2$, а во втором — вся плоскость $\mathbb{R}^2$. Образ $U_1(\mathbb{Z}^4 \setminus 0)$ целых точек разместится соответственно над некоторым горизонтальным лучом (над прямой для U_2). Причем во втором случае образ $U_2(\mathbb{Z}^4 \setminus 0)$ будет инвариантен относительно группы горизонтальных сдвигов на некоторый вектор.

Теперь наша Задача отыскания наилучших приближений свелась к поиску точек, образы которых лежат на данных объектах (полупрямой или прямой).

Введем функцию $\tau(A, B)$, задающую для двух точек $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ наклон отрезка AB:

$$\tau(A, B) = \frac{a_2 - b_2}{a_1 - b_1}.$$

Перейдем к непосредственному описанию алгоритма.

В алгоритме на всех его шагах используется одна и та же функция $U(X)$ из пары функций $U_1(X), U_2(X)$. Отправными точками для алгоритма во всех случаях служат 4 базисных точки

$$E_1 = (1, 0, 0, 0),\ E_2 = (0, 1, 0, 0),\ E_3 = (0, 1, 0, 0),\ E_4 = (0, 0, 0, 1).$$

В результате переупорядочивания этих точек по первой координате $(u(E_j))$ мы получаем исходный набор точек $P_1^0, P_2^0, P_3^0, P_4^0$ для выполнения первого шага:

$$u(P_1^0) \le u(P_2^0) \le u(P_3^0) \le u(P_4^0).$$

Далее на каждом шаге исходя из набора $P_1^n, P_2^n, P_3^n, P_4^n$ отыскивается некоторая новая точка Q^{n+1}, которая заменяет собой "левую"точку P_1^n, после чего набор $Q_1^{n+1}, P_2^n, P_3^n, P_4^n$ упорядочивается по первой координате, и мы получаем $P_1^{n+1}, P_2^{n+1}, P_3^{n+1}, P_4^{n+1}$ со свойством

$$u(P_1^{n+1}) \le u(P_2^{n+1}) \le u(P_3^{n+1}) \le u(P_4^{n+1}).$$

Каждый шаг может состоять из нескольких "прогонов". На k-м прогоне $(k \in \mathbb{N})$ на возможное значение некоторых параметров a_j накладывается все менее и менее обременительное ограничение $|a_j| \le 2^k$. Если параметры с таким свойством не нашлись, делается следующий прогон.

На каждом прогоне в качестве тестовых точек $Q(a)$ рассматриваются только точки вида

$$Q(a) = P_1^n + \sum_{j=2}^{4} P_j^n, \quad |a_j| \le 2^k. \qquad (5)$$

Однако не рассматриваются такие $Q(a)$, которые совпали с одной из ранее найденных точек (или симметричной), т.е. с точками из набора

$$\pm P_1^0, \pm P_2^0, \pm P_3^0, \pm P_4^0, \;\; \pm Q^1, \pm Q^2, \ldots, \pm Q^n.$$

Для каждого (n-го) шага определим 2 области O_L^n, O_R^n (от "Left"и "Right"):

$$O_L^n = \{(u,v): \; u \le u(P_4^n), \; v \le v(P_4^n)\},$$

$$O_R^n = \{(u,v): \; u \ge u(P_4^n), \; v \le \max(v(P_1^n), v(P_2^n), v(P_3^n), v(P_4^n))\}.$$

Прогон n-го шага происходит в 2 этапа. На первом этапе рассматриваются все допустимые точки $Q(a)$, попадающие в область O_L^n. Среди точек $Q(a)$ выбирается та, для которой достигается *максимум* функции $\tau(Q(a))$. Если такая точка нашлась, второй этап прогона не делается. И далее мы полагаем $Q^{n+1} = Q(a)$.

Если среди допустимых не оказалось точек, лежащих в области O_L^n, делается второй этап. На нем среди лежащих в области O_R^n допустимых точек $Q(a)$ отыскивается такая, для которой достигается *минимум* функции $\tau(Q(a))$. Если такая точка была обнаружена, полагаем $Q^{n+1} = Q(a)$. Если же таких точек найдено не было, делаем следующий прогон шага, т.е. увеличиваем мажоранту для модулей коэффициентов a_j.

Если на очередном k-м прогоне n-го шага за заранее заданное время найти экстремальную точку не удалось, расчет прекращается.

Целью расчета является обраружение периодичности по переменной u последовательности четверок

$$\{(U(P_1^n), U(P_2^n), U(P_3^n), U(P_4^n))\}_{n=0}^{\infty}. \tag{6}$$

Наборы точек

$$P^n = (P_1^n, P_2^n, P_3^n, P_4^n) \tag{7}$$

при n и $n+1$ отличаются только одной точкой, вычисляемой по формуле (5). Поэтому переход от одного набора (7) к следующему задается целочисленным линейным преобразованием с определителем 1, т.е. преобразованием из $SL(4,\mathbb{Z})$. Таким образом, четыре целочисленных точки (7) образуют базис единичного объема: $\det(P_j^n)_{j=1}^4 = 1$.

Для детектирования периода после вычисления очередной четверки точек (7) вычисляются $8n$ унимодулярных преобразований $A = A_{njs}$ перехода от этого набора P^{n+1} к наборам

$$(P_1^j, \pm P_2^j, \pm P_3^j, \pm P_4^j), \; j = 0, \ldots, n,$$

(s — нумерация набора знаков). Чтобы найденное преобразование A отвечало единице поля K, надо, чтобы оно записывалось в виде полинома с рациональными коэффициентами относительно матрицы F (см. (2)). Но присоединенная матрица полинома обладает свойством, что для ее степеней F^j ($j = 0, 1, 2, 3,\ F^0$) в их первом столбце только один ненулевой элемент: $(F^j)_{k,0} = \delta_{k,j+1}$. Поэтому первый столбец полинома от матрицы $A = g_3F^3 + g_2F^2 + g_1F + g_0E$ это столбец ${}^T(g_0, g_1, g_2, g_3)$. Отсюда следует, что должно выполняться матричное условие

$$A = \begin{pmatrix} (A)_{1,1} & . & . & . \\ (A)_{2,1} & . & . & . \\ (A)_{3,1} & . & . & . \\ (A)_{4,1} & . & . & . \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{4} (A)_{j,1} F^{j-1}.$$

Все входящие в него величины — рациональные числа и могут быть вычислены точно. Если матрица A лежит в кольце матриц $\mathbb{Q}(A)$, то A и есть искомая единица кольца. Корнями ее характеристического многочлена будут единицы полей K_i.

§ 4. Примеры расчетов по новому алгоритму

По описанному алгоритму проводились расчеты на примере уравнений четвертой степени с небольшими целыми коэффициентами:

$$\begin{gathered} f(\lambda) = \lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s = 0, \quad p, q, r, s \in \mathbb{Z}, \\ |p| \le 3,\ |q| \le 3,\ |r| \le 3,\ 2 \le s \le 3. \end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, исключались случаи $s = 0$ и $s = 1$, означающие соответственно приводимость многочлена и то, что многочлен задает единицу поля. Также исключались полиномы, сводящиеся одно к другому заменой знака $\lambda \to \lambda$. Всего полиномов с указанными свойствами оказалось 41.

При этом мы не отбрасывали биквадратные уравнения и уравнения, отношение корней которых удовлетворяют квадратным уравнениям. из приводимой ниже таблицы 1 такая классификация может быть проведена. Чтобы пояснить это, произведем ряд выкладок.

Пусть дан многочлен вида (8). Рассмотрим результант по переменной λ двух многочленов $f(\lambda)$ и

$$f(\theta\lambda) = \theta^4\lambda^4 + p\theta^3\lambda^3 + q\theta^2\lambda^2 + r\theta\lambda + s.$$

Это многочлен 16-й степени от θ, тривиальным 4-кратным множителем которого является $(\theta - 1)$:

$$\mathrm{Resultant}(f(\lambda), f(\theta\lambda), \lambda) = (\theta - 1)^4 S(\theta).$$

Корнями $S(\theta)$ служат в точности нетривиальные (при разных k и l) отношения λ_k/λ_l корней полинома $f(\lambda)$. Вместе с корнем θ_0 полином $S(\theta)$ имеет корнем и $1/\theta_0$. Многочлен $f(\lambda)$ неприводим, поэтому все его корни разные и среди них нет чисел ± 1. Отсюда получаем, что корни полинома $S(\theta)$ группируются в 6 пар. Вынося старший коэффициент, который обозначим c_{12}, получаем

$$S(\theta) = c_{12}\prod_{j=1}^{6}(\theta-\theta_j)(\theta-1/\theta_j) = c_{12}\prod_{j=1}^{6}(\theta^2-(\theta_j+1/\theta_j)\theta+1).$$

Обозначим $\omega_j = \theta_j + 1/\theta_j$ 6 различных отношений корней $\lambda_k/\lambda_l, k > l$, и вводем новую переменную $\omega = \theta + 1/\theta$, для которой $\theta = \dfrac{\omega+\sqrt{\omega-4}}{2}$. Мы получим

$$S(\theta) = c_{12}\theta^6\prod_{j=1}^{6}(\omega-\omega_j) = \theta^6\sum_{j=0}^{6}c_{6+j}\omega^j.$$

Вводя обозначение

$$R(\omega) = \frac{S(\frac{\omega+\sqrt{\omega-4}}{2})}{\theta^6}$$

и производя необходимые выкладки, получим

$$\begin{array}{rrrr}
R(\omega) \quad = & s^4 & \omega^6 & + \\
-(-4s+pr) & s^3 & \omega^5 & + \\
+(4s^2-4prs+p^2qs-2q^2s+r^2q) & s^2 & \omega^4 & + \\
-(p^4s^2+8q^2s^2-7qp^2s^2+8prs^2+prq^2s-7r^2qs+r^4) & s & \omega^3 & + \\
-(3p^4s^2+8prs^2+8q^2s^2 & & & \\
-14qp^2s^2-q^4s-14r^2qs+p^2r^2s+8prq^2s-p^3rqs+3r^4-pr^3q) & s & \omega^2 & + \\
-(3p^4s^2-8qp^2s^2+16prq^2s-5p^3rqs & & & \\
-4q^4s+2p^2r^2s+q^3p^2s-8r^2qs+3r^4+p^3r^3+q^3r^2-5pr^3q) & s & \omega & + \\
-(p^4s^2+8prq^2s+2q^3p^2s & & & \\
-4p^3rqs-4q^4s-2p^2r^2s+r^4-4pr^3q-q^2p^2r^2+2p^3r^3+2q^3r^2) & s & & .
\end{array}$$

Для биквадратных уравнений (в наших примерах уравнения с номерами $1, 2, 4, 7, 10$), т.е. при $p = r = 0$, все 4 корня $f(\lambda)$ лежат на мнимой оси, все отношения корней ω_j вещественны, а их квадраты ω_j^2 — рациональные числа. Действительно, в этом случае полином $R(\omega)$ разлагается на множители:

$$R(\omega) = s^2(\omega+2)^2(s\omega^2-q^2)^2.$$

При других соотношениях на коэффициенты $f(\lambda)$ также возможна ситуация, когда $R(\omega)$ разлагается над $\mathbb{Z}$ на множители, среди которых присутствуют линейные или квадратичные. Для нашего тестового семейства многочленов f_n в полиномах R_n есть квадратичные сомножители с отрицательным дискриминантом для $n = 29, 31, 32, 35, 40$. При указанных n здесь также возможны упрощения, и подобные случаи следовало бы разбирать особо, применяя для поиска алгебраических единиц другие методы. Поскольку это не входило в нашу задачу, мы этим не занимались.

В Таблице 1 выписаны 41 исследованных полиномов f_n, их дискриминанты D_n и разложения на множители полиномов $R_n(\omega)$, где

$$R_n(\omega) = \frac{\mathrm{Resultant}(f_n(\lambda), f_n(\theta\lambda), \lambda)}{(\theta-1)^4\theta^6} \quad (\theta = \frac{\omega + \sqrt{\omega - 4}}{2}).$$

В Таблицах 3 и 4 для случаев первой и второй отображающей функции $U = U_1(X)$ и $U = U_1(X)$ соответственно представлены результаты тех расчетов по новому алгоритму, когда период удалось найти. В столбцах таблиц приводятся: n — номера полиномов $f = f_n$. Далее идут периоды $T = T_n$, т.е. числа шагов алгоритма, для которых совпадают четверки чисел $(v(P_1^t), v(P_2^t), v(P_3^t), v(P_4^t))$, $(v(P_1^{t+T}), v(P_2^{t+T}), v(P_3^{t+T}), v(P_4^{t+T}))$, а сами точки $(P_1^t, P_2^t, P_3^t, P_4^t)$ и $(P_1^{t+T}, P_2^{t+T}, P_3^{t+T}, P_4^{t+T})$ связаны унимодулярной матрицей – полиномом с рациональными коэффициентами от присоединенной матрицы A_n полинома f_n. Затем приводятся выражение единиц $\mu = \mu_n(\lambda)$ поля $K(\lambda)$ в виде полиномов от исходных алгебраических чисел λ — корней f_n. В последнем столбце стоят полиномы $g_n(\mu)$, задающие единицы μ_n $(g_n(\mu_n) = 0)$.

Из таблиц видно, что для большинства полиномов f_n для обеих функций $U = U_1, U_2$ алгоритм периодичен или не периодичен одновременно, но для ряда n алгоритм периодичен только для одной из U_j. В периодических случаях отыскиваемые алгоритмом единицы поля для разных U_j совпадают не всегда.

Таблица 1. Дискриминанты полиномов и полиномы $R_n(\omega)$.

n	f_n	D_n	R_n
1	$\lambda^4-2\lambda^2+2$	512	$16\,(2+\omega)^2\,(\omega^2-2)^2$
2	$\lambda^4-\lambda^2+2$	1568	$4\,(2+\omega)^2\,(2\omega^2-1)^2$
3	$\lambda^4-\lambda^2+\lambda+2$	1257	$16\omega^6+64\omega^5+44\omega^4-94\omega^3-122\omega^2-20\omega+18$
4	λ^4+2	2048	$16\omega^4\,(2+\omega)^2$
5	$\lambda^4+\lambda+2$	2021	$16\omega^6+64\omega^5+64\omega^4-2\omega^3-6\omega^2-6\omega-2$
6	$\lambda^4+2\lambda+2$	1616	$16\omega^6+64\omega^5+64\omega^4-32\omega^3-96\omega^2-96\omega-32$
7	$\lambda^4+\lambda^2+2$	1568	$4\,(2+\omega)^2\,(2\omega^2-1)^2$
8	$\lambda^4+\lambda^2+\lambda+2$	1825	$16\omega^6+64\omega^5+52\omega^4-38\omega^3-10\omega^2+40\omega+10$

n	f_n	D_n	R_n
9	$\lambda^4+\lambda^2+2\lambda+2$	2272	$16\omega^6+64\omega^5+64\omega^4+16\omega^3+68\omega^2+40\omega-32$
10	$\lambda^4+2\lambda^2+2$	512	$16\ (2+\omega)^2\ (\omega^2-2)^2$
11	$\lambda^4+2\lambda^2+2\lambda+2$	2256	$16\omega^6+64\omega^5+32\omega^4-64\omega^3+160\omega^2+352\omega+96$
12	$\lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2$	257	$16\omega^6+72\omega^5+8\omega^4-354\omega^3-358\omega^2+392\omega+538$
13	$\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+2$	1384	$16\omega^6+80\omega^5+88\omega^4-136\omega^3-316\omega^2-52\omega+232$
14	$\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2-\lambda+2$	1556	$16\omega^6+72\omega^5+68\omega^4-90\omega^3-160\omega^2-16\omega+88$
15	$\lambda^4+\lambda^3-\lambda^2+2$	892	$16\omega^6+64\omega^5+40\omega^4-128\omega^3-196\omega^2-68\omega+16$
16	$\lambda^4+\lambda^3-2\lambda+2$	3028	$16\omega^6+80\omega^5+128\omega^4+88\omega^3-8\omega^2-136\omega+24$
17	$\lambda^4+\lambda^3-\lambda+2$	2673	$16\omega^6+72\omega^5+96\omega^4+54\omega^3+30\omega^2-36\omega+2$
18	$\lambda^4+\lambda^3+2$	1940	$16\omega^6+64\omega^5+64\omega^4-8\omega^3-24\omega^2-24\omega-8$
19	$\lambda^4+\lambda^3+\lambda+2$	1129	$16\omega^6+56\omega^5+32\omega^4-74\omega^3-98\omega^2-40\omega-6$
20	$\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2-2\lambda+2$	4360	$16\omega^6+80\omega^5+136\omega^4+200\omega^3+308\omega^2+68\omega-8$
21	$\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2-\lambda+2$	3152	$16\omega^6+72\omega^5+92\omega^4+78\omega^3+164\omega^2+104\omega+16$
22	$\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+\lambda+2$	1396	$16\omega^6+56\omega^5+28\omega^4-58\omega^3-16\omega^2+32\omega-8$
23	$\lambda^4+\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+2$	1016	$16\omega^6+48\omega^5+8\omega^4-72\omega^3-28\omega^2+20\omega-8$
24	$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+2$	5620	$16\omega^6+80\omega^5+112\omega^4+200\omega^3+680\omega^2+680\omega+184$
25	$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+2$	3305	$16\omega^6+72\omega^5+56\omega^4-18\omega^3+290\omega^2+560\omega+250$
26	$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+2$	1492	$16\omega^6+64\omega^5+16\omega^4-152\omega^3+8\omega^2+328\omega+184$
27	$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2$	697	$16\omega^6+56\omega^5-8\omega^4-178\omega^3-70\omega^2+164\omega+82$
28	$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+2$	788	$16\omega^6+48\omega^5-16\omega^4-120\omega^3+8\omega^2+104\omega-8$
29	$\lambda^4+2\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+2$	656	$4\ (2\omega^2+10\omega+13)\ (2\omega^4+2\omega^3-7\omega^2-14\omega+16)$
30	$\lambda^4+2\lambda^3-2\lambda+2$	3024	$16\omega^6+96\omega^5+192\omega^4+96\omega^3-288\omega^2-480\omega+224$
31	$\lambda^4+2\lambda^3-\lambda+2$	1813	$2\ (2\omega^2+9\omega+11)\ (4\omega^4+2\omega^3+\omega^2-16\omega-3)$
32	$\lambda^4+2\lambda^3+2$	320	$16\ (\omega^2+2\omega+2)\ (\omega^4+2\omega^3-2\omega^2-8\omega-4)$
33	$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda+2$	5744	$16\omega^6+96\omega^5+224\omega^4+384\omega^3+356\omega^2-328\omega-32$
34	$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2-\lambda+2$	3889	$16\omega^6+80\omega^5+148\omega^4+194\omega^3+194\omega^2-172\omega-158$
35	$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+2$	2112	$4\ (2\omega^2+8\omega+9)\ (2\omega^4+\omega^2-4)$
36	$\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda+2$	761	$16\omega^6+48\omega^5+20\omega^4-78\omega^3-118\omega^2-100\omega-62$
37	$\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+2$	8912	$16\omega^6+96\omega^5+224\omega^4+576\omega^3+1184\omega^2+416\omega-32$
38	$\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+2$	5821	$16\omega^6+80\omega^5+136\omega^4+278\omega^3+722\omega^2+434\omega-98$
39	$\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+2$	3136	$16\omega^6+64\omega^5+64\omega^4+64\omega^3+320\omega^2+256\omega-128$
40	$\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2$	1421	$2\ (2\omega^2+7\omega+7)\ (4\omega^4-2\omega^3-5\omega^2+14\omega-7)$
41	$\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+2$	592	$16\omega^6+32\omega^5-32\omega^4-64\omega^3+32\omega^2+32\omega-32$

Таблица 2. $U = U_1(X)$. Номера n полиномов f_n, $(f_n(\lambda) = 0)$, для которых новый алгоритм периодичен; найденные периоды T_n; представление единиц $\mu = \mu_n$ поля в виде полиномов от исходных алгебраических чисел λ; полиномы g_n, корнями которых служат единицы μ_n.

n	T	$\mu(\lambda)$	$g(\mu)$
1	5	$2\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3$	$\mu^4-4\mu^3+22\mu^2-4\mu+1$
2	9	$-9\lambda^3+7\lambda^2+8\lambda-15$	$\mu^4+46\mu^3+874\mu^2+46\mu+1$
3	2	$-\lambda^3+2\lambda-3$	$\mu^4+9\mu^3+19\mu^2-6\mu+1$
4	3	$\lambda^3-\lambda^2+1$	$\mu^4-4\mu^3+10\mu^2+4\mu+1$
6	1	$-\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1$	$\mu^4-2\mu^3+6\mu^2-4\mu+1$
7	128	$4\lambda^3+\lambda^2-3\lambda+9$	$\mu^4-34\mu^3+294\mu^2+34\mu+1$
8	37	$-20\lambda^3+70\lambda^2-95\lambda+77$	$\mu^4-228\mu^3+39869\mu^2-397\mu+1$
10	8	$-8\lambda^3+8\lambda^2-12\lambda+1$	$\mu^4+28\mu^3+454\mu^2+28\mu+1$
11	18	$-44\lambda^3+32\lambda^2-90\lambda-47$	$\mu^4+52\mu^3+11046\mu^2+196\mu+1$
12	2	$-\lambda^3+\lambda-1$	$\mu^4+\mu^3+3\mu^2+2\mu+1$
13	1	$-\lambda+1$	$\mu^4-5\mu^3+8\mu^2-3\mu+1$
14	16	$-110\lambda^3+218\lambda^2-172\lambda+41$	$\mu^4-1100\mu^3+1037670\mu^2+1892\mu+1$
15	37	$-59\lambda^3+41\lambda^2+12\lambda-55$	$\mu^4-127\mu^3+31008\mu^2-351\mu+1$
16	3	$\lambda^3-\lambda+1$	$\mu^4-10\mu^3+32\mu^2-8\mu+1$
17	9	$12\lambda^3-15\lambda^2+9\lambda+1$	$\mu^4-4\mu^3+6189\mu^2+131\mu+1$
18	23	$64\lambda^3+173\lambda^2-261\lambda+271$	$\mu^4-1454\mu^3+641396\mu^2+1004\mu+1$
19	1	$-\lambda^3-1$	$\mu^4+3\mu^2-3\mu+1$
20	4	$\lambda^3-\lambda+1$	$\mu^4-13\mu^3+44\mu^2-3\mu+1$
23	2	$-\lambda^3-\lambda^2-3$	$\mu^4+7\mu^3+12\mu^2-\mu+1$
24	20	$-3\lambda^3-2\lambda^2+3\lambda-3$	$\mu^4+42\mu^3+504\mu^2-8\mu+1$
26	9	$-7\lambda^3-12\lambda^2+5\lambda-15$	$\mu^4+64\mu^3+1704\mu^2-6\mu+1$
27	1	$-\lambda^2-1$	$\mu^4+\mu^3+3\mu^2+1$
28	8	$-8\lambda^3-2\lambda^2-10\lambda-11$	$\mu^4+20\mu^3+262\mu^2-28\mu+1$
29	9	$-2\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$	$\mu^4-16\mu^3+130\mu^2-16\mu+1$
32	4	λ^3+1	$\mu^4+4\mu^3+6\mu^2-4\mu+1$
33	22	$192\lambda^3+186\lambda^2-290\lambda+215$	$\mu^4-2580\mu^3+1729270\mu^2-884\mu+1$
35	2	$-\lambda^2+\lambda-1$	$\mu^4+8\mu^3+26\mu^2+8\mu+1$
36	1	$-\lambda-1$	$\mu^4+2\mu^3+\mu^2-\mu+1$
37	37	$-798\lambda^3-2492\lambda^2-3762\lambda-817$	$\mu^4+3724\mu^3+15272230\mu^2-7556\mu+1$
38	7	$9\lambda^3+25\lambda^2+32\lambda+1$	$\mu^4-3\mu^3+1116\mu^2-11\mu+1$
41	1	$-\lambda-1$	$\mu^4+2\mu^3+2\mu^2+1$

Таблица 3. $U = U_2(X)$. Номера n полиномов f_n, $(f_n(\lambda) = 0)$, для которых новый алгоритм периодичен; найденные периоды T_n; представление единиц $\mu = \mu_n$ поля в виде полиномов от исходных алгебраических чисел λ; полиномы g_n, корнями которых служат единицы μ_n.

n	T	$\mu(\lambda)$	$g(\mu)$
1	5	$4\lambda^3-4\lambda^2-5\lambda+7$	$\mu^4-12\mu^3+100\mu^2-16\mu+1$
2	9	$-9\lambda^3+7\lambda^2+8\lambda-15$	$\mu^4+46\mu^3+874\mu^2+46\mu+1$
3	1	$-\lambda^3+\lambda^2-1$	$\mu^4-\mu^3+5\mu^2-4\mu+1$
4	3	$\lambda^3-\lambda^2+1$	$\mu^4-4\mu^3+10\mu^2+4\mu+1$
5	35	$113\lambda^3-50\lambda^2-45\lambda+247$	$\mu^4-649\mu^3+129232\mu^2+695\mu+1$
6	1	$-\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1$	$\mu^4-2\mu^3+6\mu^2-4\mu+1$
8	15	$6\lambda^3+\lambda^2-2\lambda+17$	$\mu^4-48\mu^3+579\mu^2-37\mu+1$
10	181	$-184\lambda^3+31\lambda^2-136\lambda-193$	$\mu^4+896\mu^3+204546\mu^2-896\mu+1$
11	8	$-14\lambda^3+7\lambda^2-25\lambda-23$	$\mu^4+36\mu^3+1078\mu^2+18\mu+1$
12	4	$-\lambda+1$	$\mu^4-5\mu^3+7\mu^2-2\mu+1$
13	1	$-\lambda+1$	$\mu^4-5\mu^3+8\mu^2-3\mu+1$
14	9	$-\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-7$	$\mu^4+56\mu^3+1018\mu^2-12\mu+1$
15	18	$-6\lambda^3+\lambda^2+6\lambda-9$	$\mu^4+15\mu^3+176\mu^2-\mu+1$
16	3	$\lambda^3-\lambda+1$	$\mu^4-10\mu^3+32\mu^2-8\mu+1$
17	9	$12\lambda^3-15\lambda^2+9\lambda+1$	$\mu^4-4\mu^3+6189\mu^2+131\mu+1$
18	23	$64\lambda^3+173\lambda^2-261\lambda+271$	$\mu^4-1454\mu^3+641396\mu^2+1004\mu+1$
19	1	$-\lambda^3-1$	$\mu^4+3\mu^2-3\mu+1$
20	4	$\lambda^3-\lambda+1$	$\mu^4-13\mu^3+44\mu^2-3\mu+1$
23	2	$-\lambda^3-\lambda^2-3$	$\mu^4+7\mu^3+12\mu^2-\mu+1$
24	54	$53\lambda^3+79\lambda^2-94\lambda+79$	$\mu^4-756\mu^3+254690\mu^2+944\mu+1$
25	7	$-3\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1$	$\mu^4+30\mu^3+263\mu^2-15\mu+1$
26	9	$-7\lambda^3-12\lambda^2+5\lambda-15$	$\mu^4+64\mu^3+1704\mu^2-6\mu+1$
27	1	$-\lambda^2-1$	$\mu^4+\mu^3+3\mu^2+1$
28	8	$-8\lambda^3-2\lambda^2-10\lambda-11$	$\mu^4+20\mu^3+262\mu^2-28\mu+1$
29	10	$-2\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1$	$\mu^4-16\mu^3+130\mu^2-16\mu+1$
32	4	λ^3+1	$\mu^4+4\mu^3+6\mu^2-4\mu+1$
33	5	$2\lambda^2-2\lambda+1$	$\mu^4-12\mu^3+118\mu^2+20\mu+1$
34	47	$711\lambda^3+1405\lambda^2+202\lambda-2111$	$\mu^4+5327\mu^3+8296391\mu^2-96\mu+1$
35	2	$-\lambda^2+\lambda-1$	$\mu^4+8\mu^3+26\mu^2+8\mu+1$
36	1	$-\lambda-1$	$\mu^4+2\mu^3+\mu^2-\mu+1$
37	3	$2\lambda^3+4\lambda^2+3\lambda-7$	$\mu^4+14\mu^3+66\mu^2+16\mu+1$
39	28	$80\lambda^3+132\lambda^2+32\lambda-225$	$\mu^4+644\mu^3+108294\mu^2+132\mu+1$
41	1	$-\lambda-1$	$\mu^4+2\mu^3+2\mu^2+1$

Список литературы

1. Вороной Г.Ф. Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей. Варшава: Из-во Варш. Ун-та, 1896. Также: Собр. соч. в 3-х томах. Киев: Из-во АН УССР, 1952. Т. 1. С. 197–391.

2. Брюно А.Д., Парусников В.И. Дальнейшее обобщение цепной дроби. // ДАН, 2006, т. 410, N 1, с. 12–16.

3. Брюно А.Д., Парусников В.И. Двустороннее обобщение цепной дроби. // ДАН, 2009, т. , N . , с. –.

4. Брюно А.Д. // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. N 3. С. 4–71.

5. Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей. // Матем. заметки, 1997, Т. 61:3, с. 339–348.

6. R. Güting, Zur Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus. I // J. Reine Angew. Math., 278/279 (1975), 165-173.