ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 66 за 2011 г.

Горючкина И.В.

# Решение Пикара шестого уравнения Пенлеве и асимптотики, полученные с помощью степенной геометрии

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Горючкина И.В. Решение Пикара шестого уравнения Пенлеве и асимптотики, полученные с помощью степенной геометрии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 66. 8 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-66

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И. В. Горючкина

# РЕШЕНИЕ ПИКАРА ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ И АСИМПТОТИКИ, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Москва, 2011 г.

УДК 517.91

И. В. Горючкина. Решение Пикара шестого уравнения Пенлеве и асимптотики, полученные с помощью степенной геометрии. Препринт института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Шестое уравнение Пенлеве имеет решения, которые в общем случае определяют новые трансцендентные функции [1] (трансценденты Пенлеве). И только при некоторых значениях комплексных параметров уравнения можно выписать его решения, которые выражаются через элементарные или известные специальные функции. Одно из самых известных решений шестого уравнения Пенлеве это решение Пикара. С помощью методов степенной геометрии были найдены все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве при всех значениях его параметров, которые относятся к пяти типам. Цель данной работы – сопоставить известному решению асимптотики, найденные с помощью степенной геометрии.

I. V. Goryuchkina. The Picard solution of the sixth Painlevé equation and asymptotic forms found by Power Geometry. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2011.

The sixth Painlevé equation has solutions, which in the generic case determined new transcendent functions [1] (Painlevé transcendents). Only for some values of complex parameters of the equation it is possible to write its solution, which is expressed in elementary or known special functions. One of the most famous solution of the sixth Painlevé equation is the Picard solution. By the methods of Power Geometry we found all asymptotic expansions of solutions to the sixth Painlevé equation for all values its complex parameters of the five types. The purpose of this work is: to compare the known solution with asymptotic forms, found by Power Geometry.

©ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00023).

E-mail: igoryuchkina@gmail.com
Сайт: www.keldysh.ru

Шестое уравнение Пенлеве имеет вид [2]

$$y''=\frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)-y'\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)+$$
$$+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a+b\frac{x}{y^2}+c\frac{x-1}{(y-1)^2}+d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \tag{1}$$

где $x$ и $y$ – независимая и зависимая переменные соответственно, $'=d/dx$, $a,b,c,d$ – комплексные параметры. Уравнение (1) имеет три особые точки $x=0$, $x=1$ и $x=\infty$.

Поведение решений в окрестности особых точек уравнения определяет основные их аналитические свойства. Асимптотическим разложениям решений уравнений Пенлеве посвящено огромное количество работ. Но при некоторых значениях параметров шестое уравнение Пенлеве имеет точные решения, которые являются комбинациями известных функций (элементарных или специальных). В остальных случаях их решения определяют новые специальные функции – трансценденты Пенлеве.

Известны лишь два случая, когда для уравнения (1) предъявляется его общий интеграл. Это решения Пикара (1889) [3] и Хитчина (1995) [4]. Здесь рассмотрим решение Пикара, которое получается при $a=b=c=d-1/2=0$ [5]. Затем сравним его асимптотики с теми асимптотиками, которые были получены в [6] при этих значениях параметров.

Р. Фукс [7] представил шестое уравнение Пенлеве в виде

$$x(1-x)\mathcal{L}(x)\int\limits_0^y\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}=$$
$$=\sqrt{y(y-1)(y-x)}\left[a+b\frac{x}{y^2}+c\frac{x-1}{(y-1)^2}+\left(d-\frac{1}{2}\right)\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \tag{2}$$

где

$$\mathcal{L}(x)=x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+(1-2x)\frac{d}{dx}-\frac{1}{4} \tag{3}$$

это оператор Пикара-Фукса.

Если положить

$$u=\int\limits_0^y\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}, \tag{4}$$

то

$$y = \mathrm{JacobiSn}^2\left(\frac{u\sqrt{x}}{2} + c_0, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \tag{5}$$

или, что тоже самое,

$$y = \frac{1}{\mathrm{JacobiSn}^2\left(\frac{u}{2} + c_0, \sqrt{x}\right)}, \tag{6}$$

$c_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$.

В случае $a = b = c = d - 1/2 = 0$ уравнение (2) с учетом формул (3) и (4) является уравнением Лежандра

$$x(1-x)u'' + (1-2x)u' - \frac{1}{4}u = 0. \tag{7}$$

Оно имеет решение

$$u = c_1\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x\right) + c_2\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-x\right), \tag{8}$$

где

$$F(a,b,c,x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int\limits_0^1 \frac{dt}{t(1-t)(1-tx)}, \tag{9}$$

$c_1$, $c_2$ – произвольные комплексные постоянные.

Учитывая формулы (5), (6) и (8) получаем два представления решения Пикара

$$y = \mathrm{JacobiSn}^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\left[c_1\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x\right) + c_2\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-x\right)\right], \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \tag{10}$$

или

$$y = \mathrm{JacobiSn}^{-2}\left(\frac{1}{2}\left[c_1\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x\right) + c_2\, F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-x\right)\right], \sqrt{x}\right). \tag{11}$$

При $x \to \infty$ решение (10) имеет асимптотику

$$y = \sin^2\left(\ln C_1 x^{C_2}\right). \tag{12}$$

При $x \to 0$ решение (11) имеет асимптотику

$$y = \frac{1}{\sin^2\left(\ln C_1 x^{C_2}\right)}. \tag{13}$$

Здесь $C_1 \neq 0$ и $C_2$ это произвольные комплексные постоянные.

Шестое уравнение Пенлеве имеет различные эллиптические представления, которые связаны между собой обратимыми преобразованиями. Например, одно из эллиптических представлений имеет вид [9]

$$\mathcal{L}(x)u = \frac{1}{2x(1-x)}\left[2a\frac{\partial}{\partial u}\wp\left(\frac{u}{2},\omega_1,\omega_2\right) - 2b\frac{\partial}{\partial u}\wp\left(\frac{u}{2}+\omega_2,\omega_1,\omega_2\right) + \right.$$
$$\left. +2c\frac{\partial}{\partial u}\wp\left(\frac{u}{2}+\omega_1,\omega_1,\omega_2\right) + (1-2d)\frac{\partial}{\partial u}\wp\left(\frac{u}{2}+\omega_1+\omega_2,\omega_1,\omega_2\right)\right], \tag{14}$$

где

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2}\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,x\right) \quad \text{и} \quad \omega_2 = i\,\frac{\pi}{2}\,F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1-x\right) \tag{15}$$

это решения гипергеометрического уравнения $\mathcal{L}(x)\omega = 0$, оператор $\mathcal{L}(x)$ определен формулой (3). При этом решение $y$ уравнения (1) и функция $u$ связаны между собой формулой

$$y = \wp\left(\frac{u}{2},\omega_1,\omega_2\right) + \frac{x+1}{3}. \tag{16}$$

Эллиптическое представление шестого уравнения Пенлеве отражает не только свойства самого уравнения, но аналитические свойства его решений. Другой подход к исследованию аналитических свойств решений шестого уравнения Пенлеве использовался в работе [6].

Так в случае $a = b = c = d - 1/2 = 0$ в окрестности точки $x = 0$ шестое уравнение Пенлеве имеет 5 семейств асимптотических разложений решений $\mathcal{B}_7^{+1}$, $\mathcal{B}_7^{-1}$, $\mathcal{B}_{10}, \mathcal{H}_7, \mathcal{H}_{10}$ . Семейства $\mathcal{B}_7^{+1}$, $\mathcal{B}_7^{-1}$ и $\mathcal{B}_{10}$ базовые, то есть семейства $\mathcal{H}_7$ и $\mathcal{H}_{10}$ могут быть получены из базовых с помощью симметрии $x = x_1$, $y = x_1/y_1$ уравнения (1) (см. [8]). При этом семейства $\mathcal{B}_7^{+1}$ и $\mathcal{B}_7^{-1}$ переходят в одно и тоже семейство $\mathcal{H}_7$. Поэтому мы рассмотрим только базовые семейства $\mathcal{B}_7^{+1}$, $\mathcal{B}_7^{-1}$ и $\mathcal{B}_{10}$.

Согласно [6] в случае $a = b = c = d - 1/2 = 0$ в окрестности точки $x = 0$ шестое уравнение Пенлеве имеет два двупараметрических (по $\rho$ и $C_3$) семейства экзотических разложений решений

$$\mathcal{B}_7^{\tau}: \quad y = \frac{1}{\sin^2\left[\ln\left(C_3 x\right)^{\gamma}\right]} + \sum_{\mathrm{Re}\, s \geq 1} c_s x^s, \tag{17}$$

где $\rho$ – произвольная чисто мнимая постоянная, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\rho)$, $s \in \{\rho + l\rho + m(1-\rho),\ l, m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,\ \ m \in \mathbb{Z}\}$, $2\gamma = i\rho$, $C_3$ – ненулевая произвольная постоянная, $c_s$ постоянны и однозначно определены; и одно однопараметрическое (по $c_0$) семейство степенных разложений решений

$$\mathcal{B}_{10}: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} c_s x^s, \tag{18}$$

где $c_0 \neq 0,\ 1$ – произвольная постоянная, $c_s$ постоянны и однозначно определены.

Если в формуле (13) положить $C_2 = 0$, а $C_1 \neq 0,\ 1$, то левая часть формулы (13) соответствует первому члену разложения (18), где $c_0 = \sin^{-2}(\ln C_1)$.

Если в формуле (13) положить $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, то левая часть формулы (13) соответствует первому члену разложения (17), где $C_3 = C_1$, а $\gamma = C_2$.

Эллиптическое представление шестого уравнения Пенлеве позволяет изучать характер особенностей как самого уравнения, так и его решений. Локально решения шестого уравнения Пенлеве представляются в виде рядов, которые согласно классификации из [11], относятся к степенным, степенно-логарифмическим, сложным, экзотическим или полуэкзотическим.

Согласно теореме 1 из [12] все степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве сходятся. По-видимому, асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве остальных четырех типов также сходятся [13].

# Список литературы


[1] Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука. 1967. **3**. 300 с.

[2] Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Москва-Ленинград. 1950 г. 436 с.

[3] Picard É. Mémoire sur la Théorie des Functions Algébriques de deux Variables // Journal de Liouville. 1889. **5**. P. 135–319.

[4] Hitchin N. Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations // Journ. Diff. Geom. 1995. **42**(1), P. 30–112.

[5] Painlevé P. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes // C. R. Acad. Sci. Paris. **143**. 1906. P. 1111–1117.

[6] Брюно А.Д., Горючкина И.В. Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды московского математического общества. 2010. **71**. С. 6–118.

[7] Fuchs R. Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen // Math. Ann. **63**. 1907. P. 301–321.

[8] Gromak I.V., Laine I., Shimomura S. Painlevé Differential Equations in the Complex Plain. Berlin-New York: Walter de Gruyter. 2002.

[9] Guzzetti D. The Elliptic Representation of the General Painlevé VI Equation // Comm. Pure Appl. Math. 2002, **LV**. P. 1280–1363.

[10] Брежнев Ю.В. О $\tau$-функциональном решении 6-го трансцендента Пенлеве // Теор. Мат. Физика (2009), 161(3), 346–366.

[11] Брюно А.Д. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. **59**. №3. С. 31–80.

[12] Брюно А.Д., Горючкина И.В. О сходимости формального решения обыкновенного дифференциального уравнения. // ДАН. 2010. **432**. №2. С. 151–154.

[13] VYUGIN I.V. Solutions of the Schlesinger equation in a neighborhood of a singular point // Abstracts of International Mathematical Conference «50 Years of IPPI», July 25-29, 2011, c. 1-5.