ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 61 за 2011 г.

Брюно А.Д., Парусникова А.В.

Периодические и эллиптические асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д., Парусникова А.В. Периодические и эллиптические асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 61. 18 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-61

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, А. В. Парусникова

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Москва, 2011 г.

УДК 517.925

А. Д. Брюно, А.В. Парусникова. Периодические и эллиптические асимптотики решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Сначала для обыкновенного дифференциального уравнения весьма общего вида объясняется как вычислять периодические и эллиптические асимптотики его решений при стремлении независимой переменной к бесконечности. Затем показывается как эти асимптотики продлеваются в соответствующие асимптотические разложения. Наконец, эта техника применяется к пятому уравнению Пенлеве. Для него получены 2 семейства эллиптических асимптотик и четыре семейства степенно-периодических разложений. Все семейства двухпараметрические.

A. D. Bruno, A. V. Parusnikova. Periodic and elliptic asymptotic forms of solutions to the fifth Painlevé equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2011.

The method of calculation of elliptic and periodic asymptotic forms of solutions to an ordinary differential equation of a quite general form is described in the first part of this work. It is described in the case when an independent variable is tending to infinity. Then we show how these asymptotic forms can be continued to the corresponding asymptotic expansions. Finally these methods are applied to the fifth Painlevé equation. We have obtained 2 families of elliptic asymptotic forms and 4 families of power-periodic expansions of solutions to the fifth Painlevé equation. All these families are 2-parameter.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

E-mails: abruno@keldysh.ru, parus-a@mail.ru
сайт: www.keldysh.ru
Персональная стр. А.Д. Брюно:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Dmitrievich_Bruno`

1 Введение

Здесь рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y) = 0, \tag{1.1}$$

где $f(x, y)$ — дифференциальная сумма [1], т. е. сумма (конечного числа) дифференциальных мономов, каждый из которых является произведением обычного монома и конечного числа производных $d^l y/dx^l$.

Пусть $x \to \infty$. Асимптотическое разложение решений уравнения (1.1)

$$y = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(u) u^{-k}, \tag{1.2}$$

где $u = x^\beta$, α и $\beta = \text{const} \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ и $\varphi_k(u)$ — комплексно-периодические функции от u, т. е. разлагаются в ряды типа Фурье

$$\varphi_k(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kn} e^{n\lambda u}, \quad \lambda, \varphi_{kn} = \text{const} \in \mathbb{C} \tag{1.3}$$

будем называть *степенно-экспоненциальным*. Если же в разложении (1.2) $\varphi_k(u)$ — комплексно-эллиптические функции от u, будем называть это разложение *степенно-эллиптическим*.

Наша цель: указать способ вычисления таких разложений и выяснить их существование для пятого уравнения Пенлеве P_5. Решение задачи распадается на две части: сначала находится начальный член

$$y = x^\alpha \varphi_0(u) \tag{1.4}$$

разложения (1.2), а затем — его хвост. Алгоритм решения первой задачи указан в § 1 в [2]. Здесь он повторяется в § 2. В § 3 указан алгоритм вычисления хвоста степенно-экспоненциального разложения вида (1.2). В § 4 рассмотрены общие свойства пятого уравнения Пенлеве P_5, а в §§ 5 и 6 найдены эллиптические асимптотики и степенно-периодические разложения его решений при $\delta \neq 0$ и при $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$ соответственно. В §7 — сводка результатов.

2 Степенно-экспоненциальные и степенно-эллиптические асимптотики [2]

Каждому дифференциальное моному $a(x, y)$ ставится в соответствие его *трехмерный показатель степени* $\mathbf{Q}(a) = (q_1, q_2, q_3)$ по следующим правилам

$$\mathbf{Q}(cx^r y^s) = (r, s, 0);$$
$$\mathbf{Q}(d^l y/dx^l) = (0, 1, l);$$

показатель степени произведения является суммой показателей степеней сомножителей

$$\mathbf{Q}(ab) = \mathbf{Q}(a) + \mathbf{Q}(b).$$

Множество $\tilde{\mathbf{S}}(f)$ показателей степеней $\mathbf{Q}(a_i)$ всех дифференциальных мономов суммы $f(x,y) = \sum a_i(x,y)$ называется *носителем суммы* $f(x,y)$. Очевидно, $\tilde{\mathbf{S}}(f) \subset \mathbb{R}^3$. Выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(f)$ носителя $\tilde{\mathbf{S}}(f)$ называется *многогранником суммы* $f(x,y)$. Граница $\partial\mathbf{\Gamma}(f)$ многогранника $\mathbf{\Gamma}(f)$ состоит из вершин $\mathbf{\Gamma}_j^{(0)}$, ребер $\mathbf{\Gamma}_j^{(1)}$ и граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$. Они называются *(обощенными) гранями* $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — её номер. Каждой грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\check{f}_j^{(d)}(x,y) = \sum a_i(x,y) \text{ по } \mathbf{Q}(a_i) \in \tilde{\mathbf{S}}(f) \cap \mathbf{\Gamma}_j^{(d)}.$$

Пусть $\mathbf{N}_j = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль двумерной грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$. Будем рассматривать только нормали с $n_1 > 0$ (ибо $x \to \infty$), поэтому можно считать, что $n_1 = 1$.

Пусть грань $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$ имеет внешнюю нормаль $\mathbf{N}_j = (1,0,0)$, тогда соответствующая укороченная сумма

$$\check{f}_j^{(2)}(x,y) = x^q g(y),$$

где $g(y)$ содержит только y и его производные, но не содержит x. В этом случае полная сумма $f(x,y)$ может быть записана как

$$f(x,y) = x^q g(y) + x^{q-\gamma} h(x,y), \tag{2.1}$$

где число $\gamma > 0$ и $h(x,y)$ — дифференциальная сумма.

Все эти конструкции применимы к дифференциальному уравнению (1.1). При этом укороченной сумме $\check{f}_j^{(d)}(x,y)$ соответствует *укороченное уравнение*

$$\check{f}_j^{(d)}(x,y) = 0.$$

Замечание 2.1. В случае $\mathbf{N}_j = (1,0,0)$, если $y(x)$ — решение уравнения $g(y) = 0$ со свойством

$$0 < \varepsilon < |y(x)|, |y'(x)|, \ldots, |y^{(n)}(x)| < \varepsilon^{-1} \tag{2.2}$$

где ε — малое положительное число, то $y(x)$ может быть асимптотикой решений полного уравнения (1.1) при $x \to \infty$.

Пусть степенное преобразование переменных $x, y \mapsto u, v$:

$$y = x^\alpha v, \quad u = x^\beta \tag{2.3}$$

преобразует $f(x,y)$ в $f^*(u,v)$.

Теорема 2.1. *Пусть грань* $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ *многогранника* $\mathbf{\Gamma}(f)$ *имеет внешнюю нормаль* $\mathbf{N}_j = (1, n_2, n_3)$ *с* $n_3 + 1 > 0$, *тогда степенное преобразование* (2.3) *с* $\alpha = n_2$, $\beta = n_3 + 1$ *преобразует укорочение* $\check{f}_j^{(2)}(x,y)$ *суммы* $f(x,y)$ *в укорочение*

$$\check{f}_j^{*(2)}(u,v) = u^q g(v) \tag{2.4}$$

суммы $f^*(u,v)$, *соответствующее грани* $\mathbf{\Gamma}_j^{*(2)}$ *многогранника* $\mathbf{\Gamma}(f^*)$ *с внешней нормалью* $\mathbf{N}_j^* = (1,0,0)$. *Здесь* $\check{f}_j^{*(2)}(u,v)$ *равно* $\check{f}_j^{(2)}(x,y)$ *после постановки*

$$\beta^l u^{[\alpha + l(\beta-1)]/\beta} d^l v/du^l \tag{2.5}$$

вместо $d^l y/dx^l$.

Поэтому, если $v = \varphi(u)$ — решение уравнения $g(v) = 0$ и $|\varphi(u)|$ ограничен от нуля и бесконечности как $|y(x)|$ в (2.2), то решения исходного уравнения (1.1) могут иметь асимптотику

$$y \sim x^\alpha \varphi(x^\beta), \quad x \to \infty. \tag{2.6}$$

Степенное преобразование (2.3) индуцирует следующие формулы для производных:

$$\begin{aligned}
y' &= x^\alpha v' + \alpha x^{\alpha-1} v,\\
y'' &= x^\alpha v'' + 2\alpha x^{\alpha-1} v' + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} v,\\
v' &= \dot{v}\beta x^{\beta-1}, \quad v'' = \ddot{v}\beta^2 x^{2(\beta-1)} + \dot{v}\beta(\beta-1)x^{\beta-2};\\
y' &= \beta x^{\alpha+\beta-1}\dot{v} + \alpha x^{\alpha-1} v,\\
y'' &= \beta^2 x^{2\beta-2+\alpha}\ddot{v} + \beta(\beta-1)x^{\beta+\alpha-2}\dot{v} +\\
&\quad + 2\alpha\beta x^{\alpha+\beta-2}\dot{v} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} v =\\
&= \beta^2 x^{2\beta+\alpha-2}\ddot{v} + \beta(2\alpha+\beta-1)x^{\beta+\alpha-2}\dot{v} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} v.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь и далее $\dot{v} = dv/du$.

3 Вычисление степенно-экспоненциального разложения (1.2) [3]

Теорема 3.1. *Пусть в уравнении* (1.1) *выполнено свойство* (2.1) *и уравнение* $g(y) = 0$ *имеет решение*

$$y = \varphi_0(x),$$

со свойством (2.2). *Если решения уравнения* (1.1) *имеют асимптотическое разложение*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) x^{-k} \tag{3.1}$$

со свойством (2.2) *для* $y = \varphi_k(x)$, *то* $\varphi_k(x)$ *удовлетворяют линейным уравнениям*

$$\mathcal{L}(x)\varphi_k(x) + \theta_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

где дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) = \left. \frac{\delta g(y)}{\delta y} \right|_{y=\varphi_0(x)}, \tag{3.3}$$

а $\theta_k(x)$ *— многочлены от* $\varphi_m(x)$ *и их производных с* $m < k$.

Здесь $\delta g(y)/\delta y$ — первая вариация от $g(x)$ (или производная Фреше/Гато).

Таким образом, для получения степенно-экспоненциального разложения (1.2) решений уравнения (1.1) надо сначала для уравнения (1.1) построить многогранник $\mathbf{\Gamma}(f)$ и выделить все его двумерные грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$, у которых внешняя нормаль $\mathbf{N}_j = (n_1, n_2, n_3)$ имеет

$$n_1 > 0 \quad \text{и} \quad n_1 + n_3 > 0. \tag{3.4}$$

Теперь к соответствующему укороченному уравнению $\check{f}_j^{(2)}(x, y) = 0$ надо применить теорему 2.1, и выяснить имеет ли укороченное уравнение $g(v) = 0$ решение вида

$$v = \varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n \exp(n\lambda u). \tag{3.5}$$

Если такое решение есть, то надо сделать степенное преобразование (2.3) в исходном уравнении (1.1) и к полученному уравнению $f^*(u, v) = 0$ применить теорему 3.1, т. е. выяснить имеются ли решения $\varphi_k(u) = \varphi(u)$ вида (3.5) у уравнений

$$\mathcal{L}(u)\varphi_k(u) + \theta_k(u) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Первый шаг для уравнений Пенлеве P_1–P_4 был сделан в § 2 в [2]. При этом было найдено, что уравнения P_2 и P_4 имеют укороченные уравнения $\check{f}_j^{*(2)}(u, v) = 0$ с решениями вида (3.5). В [3] для этих решений строятся разложения (1.2). Оказалось, что для уравнения P_2 их нет, а для уравнения P_4 они имеются. В [4] описана техника вычисления степенно-эллиптических разложений и доказано их существование для первых двух уравнений Пенлеве P_1 и P_2.

4 Пятое уравнение Пенлеве

Рассмотрим пятое уравнение Пенлеве

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \tag{4.1}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — комплексные параметры, z — независимая, w — зависимая комплексные переменные, $w' = dw/dz$. Уравнение (4.1) имеет две особые точки $z = 0$ и $z = \infty$.

В этой работе методами трехмерной степенной геометрии [2] найдём все периодические асимптотические разложения решений (АРР) уравнения (4.1) в окрестности его особой точки $z = \infty$ для всех значений параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Уравнение (4.1) представим в виде дифференциальной суммы (многочлена по z, w, w', w''), т. е. умножим его на $z^2 w(w-1)$ и перенесём все члены уравнения в правую часть:

$$f(z,w) \stackrel{def}{=} -z^2 w(w-1)w'' + z^2\left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2}\right)(w')^2 - zw(w-1)w' +$$

$$+(w-1)^3(\alpha w^2 + \beta) + \gamma z w^2 (w-1) + \delta z^2 w^2 (w+1) = 0. \tag{4.2}$$

Уравнение (4.1) инвариантно относительно замены

$$(z, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\tilde{z}, \frac{1}{\tilde{w}}, -\tilde{\beta}, -\tilde{\alpha}, -\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}). \tag{4.3}$$

Этот факт впоследствии будем использовать для получения разложений.

Каждому дифференциальному моному $a(z,w)$, входящему в дифференциальную сумму (4.2), поставим в соответствие его *трёхмерный показатель степени* $\mathbf{Q}(a(z,w)) = (q_1, q_2, q_3)$ по следующему правилу:

$$\mathbf{Q}(cz^r w^s) = (r, s, 0);$$

$$\mathbf{Q}\left(\frac{d^l w}{dz^l}\right) = (0, 1, l);$$

$$\mathbf{Q}(a(z,w)b(z,w)) = \mathbf{Q}(a(z,w)) + \mathbf{Q}(b(z,q)).$$

Множество всех векторных показателей степени дифференциальных мономов, входящих в дифференциальную сумму $f(z,w)$, называется *носителем дифференциальной суммы* $f(z,w)$ и обозначается $\tilde{\mathbf{S}}(f)$. Выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(f)$ носителя $\tilde{\mathbf{S}}(f)$ называется *многогранником дифференциальной суммы* $f(z,w)$, граница $\partial\mathbf{\Gamma}(f)$ состоит из вершин $\mathbf{\Gamma}_j^{(0)}$, рёбер $\mathbf{\Gamma}_j^{(1)}$ и граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$.

5 Случай $\delta \neq 0$

5.1 Общие свойства уравнения P_5

Носитель уравнения (4.2) — это точки

$$\mathbf{Q}_1 = (2,2,2),\ \mathbf{Q}_2 = (2,3,2),\ \mathbf{Q}_3 = (1,2,1),\ \mathbf{Q}_4 = (1,3,1),$$

$$\mathbf{Q}_5 = (0,0,0),\ \mathbf{Q}_6 = (0,1,0),\ \mathbf{Q}_7 = (0,2,0),$$

$$\mathbf{Q}_8 = (0,3,0),\ \mathbf{Q}_9 = (0,4,0),\ \mathbf{Q}_{10} = (0,5,0),$$

$$\mathbf{Q}_{11} = (1,2,0),\ \mathbf{Q}_{12} = (1,3,0),\ \mathbf{Q}_{13} = (2,2,0),\ \mathbf{Q}_{14} = (2,3,0). \tag{5.1}$$

Выпуклая оболочка носителя уравнения (4.2) – пятигранник $\mathbf{\Gamma}(f)$. Его вершины: $\mathbf{Q}_1,\ \mathbf{Q}_2,\ \mathbf{Q}_5,\ \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{13},\ \mathbf{Q}_{14}$. Его двумерные грани — это

$$\mathbf{\Gamma}_1^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{13}, \mathbf{Q}_{14}),$$

$$\mathbf{\Gamma}_2^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{13}),$$

$$\mathbf{\Gamma}_3^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{14}),$$

$$\mathbf{\Gamma}_4^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_5, \ldots, \mathbf{Q}_{10}),$$

$$\mathbf{\Gamma}_5^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_5, \ldots, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}, \mathbf{Q}_{13}, \mathbf{Q}_{14}). \tag{5.2}$$

Согласно [2], т.к. мы рассматриваем случай $z \to \infty$, нас интересуют только двумерные грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$ многогранника $\mathbf{\Gamma}(f)$, первая координата внешней нормали $\mathbf{N}_j = (n_1, n_2, n_3)$ к которым больше нуля ($n_1 > 0$), будем считать, что $n_1 = 1$; также, по теореме 2.1, нас интересуют лишь грани, для нормалей к которым выполнено условие $n_3 + 1 > 0$.

Итак, двум перечисленным выше условиям удовлетворяют только следующие три грани:

1. $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$, уравнение плоскости, в которой лежит грань: $q_1 - 2 = 0$, внешняя нормаль к ней $\mathbf{N}_1 = (1,0,0)$,

2. $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$, уравнение плоскости, в которой лежит грань: $q_1 - q_2 = 0$, внешняя нормаль к ней $\mathbf{N}_2 = (1,-1,0)$,

3. $\mathbf{\Gamma}_3^{(2)}$, уравнение плоскости, в которой лежит грань: $q_1 + q_2 - 5 = 0$, внешняя нормаль к ней $\mathbf{N}_3 = (1,1,0)$.

При замене (4.3) грань $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ переходит в себя, а грани $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ и $\mathbf{\Gamma}_3^{(2)}$ меняются местами.

Внешние нормали к граням $\mathbf{\Gamma}_4^{(2)}$ и $\mathbf{\Gamma}_5^{(2)}$ ($\mathbf{N}_4 = (-1,0,1)$ и $\mathbf{N}_5 = (0,0,-1)$ соответственно) не удовлетворяют двум перечисленным выше условиям.

5.2 Эллиптические асимптотики

Грани $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\breve{f}_1^{(2)}(z,w) \stackrel{def}{=} -z^2 w(w-1)w'' + z^2\left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2}\right)(w')^2 + \delta z^2 w^2(w+1) = 0. \quad (5.3)$$

Разделим уравнение (5.3) на z^2, сделаем замену $w' = p$, при которой $w'' = p\dfrac{dp}{dw}$, получим уравнение

$$-w(w-1)p\frac{dp}{dw} + \left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2}\right)p^2 + \delta w^2(w+1) = 0, \quad (5.4)$$

в котором сделаем замену $p^2 = P$, получим уравнение

$$-w(w-1)\frac{dP}{dw} + (3w-1)P + 2\delta w^2(w+1) = 0, \quad (5.5)$$

решив которое, получаем $P(w) = -2\delta w\left(C_0(w-1)^2 + w\right)$, откуда имеем первый интеграл уравнения (5.3)

$$(w')^2 = -2\delta w\left(C_0(w-1)^2 + w\right), \quad (5.6)$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Рассмотрим многочлен $w(C_0(w-1)^2 + w)$. Вычислим его дискриминант по формуле [5]

$$\Delta = a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 - 4a_0 a_2^3 + 18a_0 a_1 a_2 a_3 - 27a_0^2 a_3^2,$$

где a_k — коэффициент при w^k. В данном случае

$$\Delta = C_0^2(1-4C_0),$$

дискриминант равен нулю, только если $C_0 = 0$ или $C_0 = \dfrac{1}{4}$. Если дискриминант равен нулю, многочлен $P(w)$ имеет менее 3 различных корней. В остальных случаях у рассматриваемого многочлена существуют три различных (комплексных) корня.

Если $C_0 = 0$, решением уравнения (5.5) является $w = \tilde{C}e^{\sqrt{-2\delta}z}$. Если $C_0 = \dfrac{1}{4}$, решением уравнения (5.5) является $w = \operatorname{tg}^2(z + \tilde{C})$, где $\tilde{C}$ — произвольная постоянная.

Если $C_0 \neq 0, C_0 \neq \dfrac{1}{4}$, то решения уравнения (5.6) - эллиптические функции $w = \varphi(z)$ [6,7].

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{5.7}$$

предполагая, что дискриминант кубического многочлена, стоящего в правой части уравнения (5.7), не равен нулю. При помощи замены

$$x = \frac{4}{a}y - \frac{b}{3a}$$

уравнение (5.7) приведём к виду

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \tag{5.8}$$

где

$$g_2 = \frac{9ac - b^2}{9a^2},\ g_3 = \frac{-2b^3 + 9abc - 27a^2 d}{108a^3}. \tag{5.9}$$

Напомним [6], что эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(z; g_2, g_3)$ удовлетворяет уравнению (5.8) с $y = \wp$, где g_2 и g_3 — постоянные. Это двухпараметрическое (по C_0 и C_3) семейство.

Сведём уравнение (5.6) к нормальной форме Вейерштрасса (5.8).

Исходя из формул (5.8), (5.9) получаем, что решением уравнения (5.6) при ненулевом дискриминанте правой части является

$$w = -\frac{2}{\delta C_0}\wp\left(z + C_3; \frac{\delta^2}{3}\left(C_0^2 - 4C_0 + 1\right), \frac{\delta^3}{54}\left(17C_0^2 - 8C_0 + 2\right)\left(2C_0 - 1\right)\right) + \\ + \frac{2C_0 - 1}{3C_0}, \tag{5.10}$$

где $\wp$ — функция Вейерштрасса, $C_0 \neq 0, C_0 \neq \frac{1}{4}$, C_3 — произвольная постоянная. Это двухпараметрическое (по C_0 и C_3) семейство.

5.3 Периодическая асимптотика

Грани $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\check{f}_1^{(2)}(z, w) \stackrel{def}{=} z^2 w w'' - \frac{z^2}{2}(w')^2 + \delta z^2 w^2 - \beta = 0. \tag{5.11}$$

Согласно теореме 2.1, сделаем в уравнении (5.11) замену $w = v/z$, тогда w' переходит в v'/z, w'' переходит в v''/z. После замены уравнение (5.11) перейдёт в уравнение

$$\check{f} \stackrel{def}{=} vv'' - \frac{(v')^2}{2} + \delta v^2 - \beta = 0,\ g(v) = \check{f}. \tag{5.12}$$

Перейдём к решению уравнения $g(v) = 0$. Сделаем в нём замену $v' = p$, получим уравнение

$$v\frac{dp}{dv}p - \frac{p^2}{2} + \delta v^2 - \beta = 0,$$

в котором сделаем замену $p^2 = P$, после которой получим

$$v\frac{dP}{dv} - P + 2\delta v^2 - 2\beta = 0,$$

откуда

$$P = (v')^2 = -2\delta v^2 - 2C_0 v - 2\beta, \tag{5.13}$$

где C_0 — произвольная постоянная. Продифференцируем (5.13) по z, получим уравнение

$$v'v'' + 2\delta v v' + C_0 v' = 0,$$

откуда либо $v = \mathrm{const}$, либо

$$v'' = -2\delta v - C_0 = \frac{1}{2}\frac{dP}{dv}, \tag{5.14}$$

т. е.

$$v = C_1 e^{\sqrt{-2\delta} z} + C_2 e^{-\sqrt{-2\delta} z} - \frac{C_0}{2\delta}, \tag{5.15}$$

где $C_1,\ C_2$ — произвольные постоянные. Выражение (5.15) является решением уравнения (5.13) в том и только том случае, в котором

$$C_1 C_2 = \frac{C_0^2}{12\delta^2} - \frac{\beta}{3\delta}. \tag{5.16}$$

5.4 Степенно-периодические разложения

После подстановки $w = v/z$ в уравнение (4.2), согласно формуле (2.7), получаем следующее уравнение:

$$-zv\left(\frac{v}{z} - 1\right)\frac{v''z^2 - 2v'z + 2v}{z^3} + z^2\left(\frac{3}{2}\frac{v}{z} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{v'z - v}{z^2}\right)^2 - v\left(\frac{v}{z} - 1\right)\frac{v'z - v}{z^2} +$$

$$+(\frac{v}{z} - 1)^3\left(\alpha\frac{v^2}{z} + \beta\right) + \gamma\frac{1}{z}v^2\left(\frac{v}{z} - 1\right) + \delta v^2\left(\frac{v}{z} + 1\right) = 0.$$

Приведя подобные, получим

$$vv'' - \frac{(v')^2}{2} + \delta v^2 - \beta + \frac{1}{z}\left(-v^2 v'' - 3vv' + \frac{3}{2}(v')^2 + 3\beta v - \gamma v + \delta v^3\right) +$$

$$+\frac{1}{z^2}\left(-2v^2 v' + 3v^2/2 - \alpha v^2 - 3\beta v^2 + \gamma v^2\right) + \frac{1}{z^3}\left(v^3/2 + vv' + 3\alpha v^3 + \beta v^3\right) +$$

$$+\frac{1}{z^4}\left(-v^2-3\alpha v^4\right)+\frac{\alpha v^5}{z^5}=0,$$

откуда

$$\hat{\hat{f}}=-v^2v''+(3/2)(v')^2-3vv'+3\beta v-\gamma v+\delta v^3.$$

Ищем АРР уравнения (4.1) в виде

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)z^{-k}, \tag{5.17}$$

$$\varphi_k(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi_{nk}e^{\sqrt{-2\delta}nz}. \tag{5.18}$$

Согласно теореме 3.1, (3.3) и (3.6), получаем, что

$$\mathcal{L}(z)\varphi_k+\theta_k(z)=0, \tag{5.19}$$

где v определяется формулами (5.15), (5.16), а $\theta_1=\hat{\hat{f}}$. Из (5.12) получаем $\dfrac{\delta g}{\delta v}=v\dfrac{d^2}{dz^2}+v''-v'\dfrac{d}{dz}+2\delta v$. Если v — решение уравнения (5.13), то согласно (3.3) и (5.14) имеем $\mathcal{L}_k(z)\varphi_k(z)=v\varphi_k''-v'\varphi_k'+2\delta v-2\delta v-C_0=\varphi_k''-v'\varphi_k'-C_0$.

Подставив $\varphi_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi_n e^{\sqrt{-2\delta}nz}$ в уравнение (5.19) для $k=1$, получаем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(C_0(n^2-1)\chi_n\right)e^{\sqrt{-2\delta}nz}-$$

$$-2\delta\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(C_1(n-1)(n-2)\chi_{n-1}+C_2(n+1)(n+2)\chi_{n+1}\right)e^{\sqrt{-2\delta}nz}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{\chi}_n e^{\sqrt{-2\delta}nz}\overset{def}{=}-\theta_1(z).$$

Откуда имеем бесконечную систему уравнений

$$\begin{gathered}\dots\\ -24\delta C_2\chi_3-3C_0\chi_2=\tilde{\chi}_{-2},\\ -12\delta C_2\chi_2=\tilde{\chi}_{-1},\\ -2\delta(2C_1\chi_{-1}+2C_2\chi_1)+C_0\chi_0=\tilde{\chi}_0,\\ -12\delta C_1\chi_{-2}=\tilde{\chi}_1,\\ -24\delta C_1\chi_{-3}-3C_0\chi_{-2}=\tilde{\chi}_2,\\ \dots\end{gathered} \tag{5.20}$$

из которой получаем, что $\chi_0 = \chi_0(\chi_1, \chi_{-1})$, χ_1, χ_{-1} — произвольные постоянные. Остальные коэффициенты $\chi_j, |j| \geq 2$ определяются однозначно, если $C_1C_2 \neq 0$. Следовательно, система (5.20) однозначно разрешима при $C_1C_2 \neq 0$.

Аналогично разрешается система уравнений для любого $\varphi_k(z)$ (ср. [3]).

Симметрией (4.3) из разложения (1.2) для грани $\mathbf{\Gamma}_2^{(2)}$ получается степенно-экспоненциальное разложение для грани $\mathbf{\Gamma}_3^{(2)}$.

6 Случай $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$

6.1 Общие свойства

Носитель уравнения (4.2) в случае $\delta = 0$ — это точки $\mathbf{Q}_1$ – $\mathbf{Q}_{12}$ (см. формулу (5.1)). Выпуклая оболочка носителя уравнения (4.2) при $\delta = 0$ – пятигранник $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(f)$. Его вершины: $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{11}$, $\mathbf{Q}_{12}$. Его двумерные грани — это

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_1^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}),$$
$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_2^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_5, \mathbf{Q}_{11}),$$
$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_3^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{12}),$$
$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_4^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_{10}),$$
$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_5^{(2)} = \operatorname{conv}(\mathbf{Q}_5, \dots, \mathbf{Q}_{10}, \mathbf{Q}_{11}, \mathbf{Q}_{12}). \tag{6.1}$$

Согласно [2], т.к. мы рассматриваем случай $z \to \infty$, нас интересуют только двумерные грани $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_j^{(2)}$ многогранника $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(f)$, первая координата внешней нормали $\mathbf{N}_j = (n_1, n_2, n_3)$ к которым больше нуля ($n_1 > 0$), будем считать, что $n_1 = 1$, также, по теореме 1, нас интересуют лишь грани, для нормалей к которым выполнено условие $n_3 + 1 > 0$.

Итак, двум перечисленным выше условиям удовлетворяют только следующие три грани:

1. $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_1^{(2)}$, уравнение плоскости, в которой лежит грань: $2q_1 - q_3 - 2 = 0$, внешняя нормаль к ней $\tilde{\mathbf{N}}_1 = (1, 0, -1/2)$,

2. $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_2^{(2)}$, уравнение плоскости, в которой лежит грань: $2q_1 - q_2 - q_3 = 0$, внешняя нормаль к ней $\tilde{\mathbf{N}}_2 = (1, -1/2, -1/2)$,

3. $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_3^{(2)}$, уравнение плоскости, в которой лежит грань: $2q_1 + q_2 + q_3 - 5 = 0$, внешняя нормаль к ней $\tilde{\mathbf{N}}_3 = (1, 1/2, 1/2)$.

При замене (4.3) грань $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_1^{(2)}$ переходит в себя, а грани $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_2^{(2)}$ и $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_3^{(2)}$ меняются местами.

Внешние нормали к граням $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_4^{(2)}$ и $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_5^{(2)}$ ($\tilde{\mathbf{N}}_4 = (-1, 0, 1)$ и $\tilde{\mathbf{N}}_5 = (0, 0, -1)$ соответственно) не удовлетворяют двум перечисленным выше условиям.

6.2 Эллиптическая асимптотика

Грани $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_1^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\check{f}_1^{(2)}(z,w) \overset{def}{=} -z^2 w(w-1)w'' + z^2\left(\frac{3}{2}w - \frac{u^2}{2}\right)(w')^2 + \gamma z w^2(w-1) = 0. \quad (6.2)$$

Согласно теореме 2.1, сделаем в уравнении (5.11) замену

$$u = \sqrt{z},$$

тогда w' перейдёт в $\dfrac{1}{2u}\dfrac{dw}{du}$, w'' перейдёт в $\dfrac{1}{4u^2}\dfrac{d^2w}{du^2}$. После замены оно перейдёт в укороченное уравнение

$$-w(w-1)\frac{u^2}{4}\frac{d^2w}{du^2} + \left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2}\right)\frac{u^2}{4}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 + \gamma u^2 w^2(w-1) = 0. \quad (6.3)$$

Получаем, что

$$g(v) = 4u^{-2}\check{f} = -w(w-1)\frac{d^2w}{du^2} + \frac{3w-1}{2}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 + 4\gamma w^2(w-1) = 0. \quad (6.4)$$

Перейдём к решению уравнения $g(v) = 0$. Сделаем в нём замену $\left(\dfrac{dw}{du}\right)^2 = P(w)$, получим уравнение

$$\frac{1}{2}w(w-1)\frac{dP}{dw} = \frac{3w-1}{2}P + 4\gamma w^2(w-1), \quad (6.5)$$

решив которое, получим первый интеграл

$$\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = -8\gamma w(w-1)(1 + C_0(w-1)) \overset{def}{=} P(w), \quad (6.6)$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Дискриминант многочлена $w(w-1)(1+C_0(w-1))$ равен $\Delta = (C_0-1)^2$. Поэтому при $C_0 \neq 0$ и $\Delta \neq 0$, т.е. $C_0 \neq 1$, решения $w = \varphi(u)$ уравнения являются эллиптическими функциями. Следовательно, уравнение P_5 при $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$ имеет двухпараметрическое семейство эллиптических асимптотик $w \sim \varphi(\sqrt{z})$ решений. Если $C_0 = 0$, то $P(w)$ — многочлен второй степени.

Исходя из формул (5.8), (5.9) получаем, что решением уравнения (6.6) при ненулевом дискриминанте правой части $P(w)$ является

$$w = -\frac{1}{2\gamma C_0}\wp\Big(z + C_3; \frac{16\gamma^2}{3}C_0(3 - 2C_0),$$

$$\frac{32\gamma^3}{27}\left(2C_0-1\right)\left(C_0+1)(C_0-2)\right)+\frac{2C_0-1}{3C_0}, \tag{6.7}$$

где $\wp$ — функция Вейерштрасса, $C_0 \neq 1,\ C_0 \neq 0$, C_3 — произвольная постоянная.

Если $C_0 = 1$, уравнение (6.6) имеет решение

$$w = 1 - \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{\gamma}C_1 + 2\sqrt{2\gamma z}}{2}\right), \text{где } C_1 \text{ — произвольная постоянная.}$$

6.3 Периодическая асимптотика

Грани $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_2^{(2)}$ соответствует укороченное уравнение

$$z^2ww'' - \frac{z^2}{2}(w')^2 - \gamma z w^2 - \beta = 0. \tag{6.8}$$

Согласно теореме 2.1, сделаем в уравнении (6.8) замену

$$w = \frac{v}{\sqrt{z}},\ u = \sqrt{z}, \tag{6.9}$$

w' перейдёт в $\dfrac{1}{2u^2}\dfrac{dv}{du}$, w'' перейдёт в $\dfrac{1}{4u^3}\dfrac{d^2v}{du^2}$, после такой замены уравнение (6.8) перейдёт в уравнение

$$\check{f} \overset{def}{=} \frac{1}{4}v\frac{d^2v}{du^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \gamma v^2 - \beta = 0,$$

$$g(v) = 4\check{f} = v\frac{d^2v}{du^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 4\gamma v^2 - 4\beta. \tag{6.10}$$

Перейдём к решению уравнения $g(v) = 0$. Сделаем в нём замену $(v')^2 = P$, получим уравнение

$$v\frac{dP}{dv} - P - 8\beta - 8\gamma v^2 = 0,$$

которое даёт первый интеграл

$$(v')^2 = 8(\gamma v^2 + C_0 v - \beta) = P, \tag{6.11}$$

где C_0 — произвольная постоянная. Продифференцируем (6.11) по u, получим уравнение

$$2\frac{dv}{du}\frac{d^2v}{du^2} = 16\gamma v\frac{dv}{du} + 8C_0\frac{dv}{du},$$

откуда либо $v = \mathrm{const}$, либо

$$\frac{d^2v}{du^2} = 8\gamma v + 4C_0,$$

т. е.

$$v = C_1 e^{\sqrt{8\gamma} z} + C_2 e^{-\sqrt{8\gamma} z} - \frac{C_0}{2\gamma}, \tag{6.12}$$

где $C_1,\ C_2$ — произвольные постоянные. Выражение (6.12) является решением уравнения (6.11) в том и только том случае, в котором

$$C_1 C_2 = \frac{\beta}{2\gamma} + \frac{C_0^2}{8\gamma^2}. \tag{6.13}$$

6.4 Степенно-периодические разложения

Ищем АРР уравнения (4.1) в виде $w = v/u$

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(u) u^{-k}, \tag{6.14}$$

$$\varphi_k(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_{nk} e^{\sqrt{8\gamma} n u}. \tag{6.15}$$

При замене (6.9) уравнение (4.2) с $\delta = 0$ переходит с учётом (2.7) в следующее уравнение:

$$-\frac{v}{4}\left(\frac{v}{u}-1\right)\left(\frac{d^2v}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{dv}{du}+\frac{3v}{u^2}\right)+\left(\frac{3}{2}\frac{v}{u}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\left(\frac{dv}{du}\right)^2-\frac{v}{2u}\frac{dv}{du}+\frac{v^2}{4u^2}\right)-$$

$$-v\left(\frac{v}{u}-1\right)\left(\frac{1}{2u}\frac{dv}{du}-\frac{v}{2u^2}\right)-\left(\frac{v}{u}-1\right)^3\left(\alpha\frac{v^2}{u^2}+\beta\right)+\gamma v^2\left(\frac{v}{u}-1\right)=0.$$

Приведём подобные, получим

$$-\frac{v}{4}\frac{d^2v}{du^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\beta+\gamma v^2+\frac{1}{u}\left(\frac{v^2}{4}\frac{dv}{du}+\frac{3}{2}\frac{dv}{du}+\frac{3v}{8}\left(\frac{dv}{du}\right)^2-3\beta v+\gamma v^3\right)+$$

$$\tfrac{1}{u^2}\left(-\frac{v^2}{4}\frac{d^2v}{du^2}-\frac{5}{4}v^2\frac{dv}{du}-\frac{3}{8}v^2+\alpha v^2+3\beta v^2\right)+\frac{1}{u^3}\left(\frac{1}{8}v^3-\beta v^3-3\alpha v^3\right)+$$

$$+\frac{3\alpha v^4}{u^4}-\frac{\alpha v^5}{u^5}=0.$$

Согласно теореме 3.1, (3.3) и (3.6), получаем, что

$$\mathcal{L}(z)\varphi_1 + \hat{\hat{f}} = 0, \tag{6.16}$$

где v определяется формулами (6.12), (6.13), а $\dfrac{\delta g}{\delta v}$ — формулой (6.10). Поскольку $\dfrac{\delta g}{\delta v} = v\dfrac{d^2}{dv^2} - \dfrac{dv}{du}\dfrac{d}{dv} + \dfrac{d^2 v}{du^2} - 8\gamma v = v\dfrac{d^2}{dv^2} - \dfrac{dv}{du}\dfrac{d}{dv} + 4C_0$, то $\mathcal{L}(u)\varphi = v\frac{d^2\varphi}{dv^2} - \frac{dv}{du}\frac{d\varphi}{dv} + 4C_0\varphi$ и, подставив

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n e^{\sqrt{2\gamma}nu}$$

в уравнение (6.16), получаем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(8\gamma C_1(n-1)(n-2)\chi_{n-1} + 8\gamma C_2(n+1)(n+2)\chi_{n+1} - 4C_0\chi_n(n^2-1)\right) e^{\sqrt{2\gamma}nu} +$$

$$+\hat{\hat{\hat{f}}} = 0.$$

Разлагая $\hat{\hat{\hat{f}}}$ в ряд типа Фурье, получаем бесконечную систему линейных уравнений

$$\begin{gathered} \ldots \\ 6\gamma C_2\chi_2 = \tilde{\chi}_{-1}, \\ 8\gamma(2C_1\chi_{-1} + 2C_2\chi_1) + 4C_0\chi_0 = \tilde{\chi}_0, \\ 6\gamma C_1\chi_{-2} = \tilde{\chi}_1, \\ \ldots \end{gathered} \tag{6.17}$$

Итак, из системы (6.17) получаем, что $\chi_0 = \chi_0(\chi_1, \chi_{-1})$, χ_1, χ_{-1} — произвольные постоянные. Остальные коэффициенты $\chi_j, |j| \geq 2$ определяются однозначно при $C_1C_2 \neq 0$.

Симметрией (4.3) из разложения (1.2) для грани $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_2^{(2)}$ получается степенно-экспоненциальное разложение для грани $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_3^{(2)}$.

Аналогично разрешается система уравнений для любого $\varphi_k(z)$ (ср. [3]).

Симметрией (4.3) из разложения (1.2) для грани $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_2^{(2)}$ получается степенно-экспоненциальное разложение для грани $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_3^{(2)}$.

7 Сводка результатов

Теорема 7.1 *В случае $\delta \neq 0$ при $z \to \infty$ решения пятого уравнения Пенлеве P_5 имеют следующие двухпараметрические семейства*:

1. *Эллиптических асимптотик, определяемых формулой* (5.10).

2. *Степенно-периодических разложений вида* (1.2), (1.3), *определяемых формулами* (5.17), (5.18).

3. *Степенно-периодических разложений вида* (1.2), (1.3), *полученных симметрией* (4.3) *из предыдущего.*

Теорема 7.2 *В случае* $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$ *при* $z \to \infty$ *решения пятого уравнения Пенлеве* P_5 *имеют следующие двухпараметрические семейства*:

1. *Эллиптических асимптотик, определяемых формулой* (6.7).

2. *Степенно-периодических разложений вида* (1.2), (1.3), *определяемых формулами* (6.14), (6.15).

3. *Степенно-периодических разложений вида* (1.2), (1.3), *полученных симметрией* (4.3) *из предыдущего.*

Отметим, что при $\delta = \gamma = 0$ уравнение (4.2) решается явно [7], и его решения не имеют ни периодических, ни эллиптических асимпототик.

Список литературы

[1] А. Д. Брюно. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. УМН, 2004, т. 59, № 3, с. 31–80.

[2] A. D. Bruno. Space Power Geometry for an ODE and Painlevé equations // International Conference "Painlevé Equations and Related Topics". St. Petersburg, June, 2011. P. 36-41.

[3] А. Д. Брюно. Степенно-экспоненциальные разложения решений ОДУ. Препринт № 54. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2011.

[4] А. Д. Брюно. Степенно-эллиптические разложения решений ОДУ. Препринт № 60. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2011.

[5] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. М.: Из-во “Факториал пресс“, 2002. - 544с.

[6] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

[7] А. Д. Брюно, А. В. Парусникова. Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // ДАН, 2011, т. 438, № 4, с. 439-443.