ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 59 за 2011 г.

Пустыльников Л.Д., Локоть Т.В.

Быстрые вычисления, связанные с тёплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пустыльников Л.Д., Локоть Т.В. Быстрые вычисления, связанные с тёплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 59. 23 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-59

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

Л. Д. Пустыльников, Т. В. Локоть

БЫСТРЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ТЁПЛИЦЕВЫМИ И ГАНКЕЛЕВЫМИ МАТРИЦАМИ И ТЕНЗОРАМИ

Москва, 2011 г.

УДК

Л. Д. Пустыльников, Т. В. Локоть. Быстрые вычисления, связанные с тёплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Эта работа — вторая часть статьи, состоящей из двух частей. Первая часть — алгебраическая и опубликована в [46], тогда как вторая часть есть применение первой к быстрым вычислениям и к быстрому прогнозированию. Получены новые сильные оценки числа арифметических операций, требуемых для решения некоторых задач линейной алгебры и для нахождения линейного прогноза стохастического процесса, связанных с тёплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами.

L. D. Pustyl'nikov, T. V. Lokot. Fast computations associated with Toeplitz and Hankel matrices and tensors. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2011.

This paper is the second part of the article consisting of two parts. The first part is algebraic and was published in [46], while the second part is the application of the first part to fast computations and to fast prediction. One obtained new estimates of number of arithmetic operations required to solve some problems of linear algebra and to find the linear prediction of a stochastic process associated with Toeplitz and Hankel matrices.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

сайт: www.keldysh.ru

Введение

Тёплицевы и ганкелевы матрицы — классические объекты алгебры. Вычисления, связанные с тёплицевыми и ганкелевыми матрицами — одна из актуальных областей современной математики. Причина её большой популярности и важности состоит в огромном множестве приложений, которые имеют тёплицевы и ганкелевы матрицы в различных областях науки и техники. Некоторые из таких приложений указаны в этой работе.

В отличие от матриц общего вида тёплицевы и ганкелевы матрицы порядка n имеют специфическую структуру и однозначно определяются упорядоченным набором, состоящим из $(2n-1)$ числа. Благодаря этому количество арифметических операций (а. о.), необходимых при решении задач линейной алгебры с такими матрицами, как правило, меньше, чем при использовании матриц общего вида. Например, для решения линейной системы уравнений с тёплицевой матрицей порядка n найдены алгоритмы, требующими выполнения $O(n\log_2^2 n)$ а. о. ([6], [22], [44]), тогда как в случае произвольных матриц порядка n в существующих алгоритмах количество необходимых а. о. превышает Cn^α, где $\alpha > 2$, C — абсолютная константа. Многие из разработанных алгоритмов особенно эффективны для больших n, и поэтому они называются асимптотически быстрыми. Однако при не очень больших n сложность этих алгоритмов (т. е. количество необходимых а. о.) может оказаться выше, чем в других алгоритмах и использовать их оказывается нецелесообразным.

Одно из перспективных направлений по увеличению быстродействия работы ЭВМ состоит в распараллеливании вычислительного процесса и использовании параллельно работающих процессоров. Сущность распараллеливания состоит в том, что все производимые ЭВМ операции распределяются по группам, и операции из одной группы выполняются одновременно. Дадим более строгое описание распараллеливания. Предположим, что операции алгоритма разбиты на группы, упорядоченные так, что каждая операция любой группы зависит либо от начальных данных алгоритма, либо от результата выполнения операций, находящихся в предыдущих группах. Такое представление называется параллельной формой алгоритма [2]. Каждая группа операций называется ярусом, число групп — высотой, максимальное число операций в ярусе — шириной параллельной формы. Ясно, что высота характеризует сложность алгоритма и в дальнейшем будет обозначать количество операций, которые необходимо выполнить при распараллеливании вычислений, тогда как ширина определяет количество параллельно работающих процессов, число которых здесь будет предполагаться сколь угодно большим.

Данная работа — вторая часть статьи, состоящей из двух частей. Первая часть — алгебраическая и опубликована в [46], тогда как вторая часть есть применение первой к быстрым вычислениям в линейной алгебре и к быстрому прогнозированию стохастических процессов.

Здесь получены сильные оценки числа арифметически операций, требуемых для решения некоторых фундаментальных проблем линейной алгебры и для нахождения линейного прогноза стационарных и нестационарных случайных случайных процессов. Изучаемые проблемы связаны с тёплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами ([46]), а также с двухуровневыми матрицами.

Имеется ряд книг и обзоров, которые достаточно полно охватывают алгебраические, аналитические и вычислительные аспекты проблематики, связанной с тёплицевыми и ганкелевыми матрицами. Среди них отметим книги [5], [7] и обзор [3]. Укажем работы, которые непосредственно связаны с содержанием нашей работы: [1], [4], [8], [9], [13]–[15], [27], [32], [42], [46]. Нумерация определений, лемм и теорем в каждом параграфе работы — своя.

1 Вычисление в линейной алгебре, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами

1.1 Основные определения

Определение 1. Под арифметической операцией (а. о.) будем понимать операции сложения, вычитания, умножения и деления над парой комплексных чисел.

Определение 2. Под логической операцией (л. о.) будем понимать операцию, позволяющую определить, равны два комплексных числа или нет.

1.2 Основные обозначения

1) Обозначим через $f(n)$ наименьшее число арифметических операций, требующихся для вычисления преобразования Фурье Fx, введенного в [46], от любого n-мерного вектора x с помощью вычислительной процедуры, состоящей из арифметических и логических операций, т. е. преобразование Фурье от любого n-мерного вектора x можно вычислить, выполнив $f(n)$ а. о., и существует такой n-мерный вектор, преобразование Фурье которого нельзя вычислить, выполнив менее чем $f(n)$ а. о.

2) Обозначим через $f^*(n)$ наименьшее число арифметических операций, требующихся для вычисления преобразования Фурье Fx от любого n-мерного вектора x с помощью вычислительной процедуры, состоящей

из арифметических и логических операций, при распараллеливании вычислительного процесса.

Замечание. Очевидно, справедливо неравенство $f^*(n) \leqslant f(n)$.

1.3 Формулировки теорем

Рассмотрим следующие задачи линейной алгебры:

I. Решение линейной системы уравнений $Ax = b$ (A-заданная квадратная невырожденная матрица, b — заданный вектор, x — неизвестный вектор) в предположении, что оно существует и единственно.

II. Нахождение матрицы, обратной матрице A, при условии, что A невырождена.

III. Нахождение собственных значений матрицы A.

Теорема 1. Если матрица A принадлежит пространству T_1 ([46]), то

1) задачу I можно решить, выполняя $3f(n)+2n$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя $2f^*(n)+2$ а. о.;

2) задачу II можно решить, выполняя $2f(n)+2n$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя $2f^*(n)+2$ а. о.;

3) задачу III можно решить, выполняя $f(n)$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя $f^*(n)$ а. о.

Теорема 2. Если матрица A принадлежит пространству T_2 ([46]), то

1) задачу I можно решить, выполняя $3f(n)+4n$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя $2f^*(n)+4$ а. о.;

2) задачу II можно решить, выполняя $2f(n)+4n$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя $2f^*(n)+4$ а. о.;

3) задачу III можно решить, выполняя $f(n)+n$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя $f^*(n)+1$ а. о.

Теорема 3. Если матрица A принадлежит пространству Γ_1 ([46]), то задачи I и II можно решить, выполняя такое же количеству а. о., как и в теореме 1 в 1) и 2) соответственно, а задачу III можно решить, выполняя не более чем $f(n)+\dfrac{n}{2}$ а. о. и $\dfrac{n}{2}$ операций извлечения квадратного корня из комплексного числа, а если распараллелить вычисления, то задачу III можно решить, выполняя не более чем $f^*(n)+1$ а. о. и одной операции извлечения квадратного корня.

Теорема 4. Если матрица A принадлежит пространству Γ_2 ([46]), то задачи I и II можно решить, выполняя такое же количеству а. о., как и в теореме 2 в 1) и 2) соответственно, а задачу III можно решить, выполняя не более чем $f(n)+\dfrac{3n}{2}$ а. о. и $\frac{n}{2}$ операций извлечения квадратного корня из комплексного числа, а если распараллелить вычисления, то задачу III можно решить, выполняя не более чем $f^*(n)+2$ а. о. и одной операции извлечения квадратного корня.

Сформулированная далее теорема 5 в несколько более слабом виде впервые была приведена в [14] и [15] (теорема 4, гл. 2). Коэффициент при главном члене в оценке теоремы 5 был указан в [1].

Теорема 5. Предположим, что $A=(a_{sj})$ — теплицева матрица порядка n $(s,j=0,\dots,n-1)$ такая что

$$a_{1,0}+a_{0,n-1}=a_{2,0}+a_{0,n-2}=\dots=a_{n-1,0}+a_{0,1}.$$

Тогда задачу I можно решить, выполняя не более чем $4f(n)+13n+2$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя не более чем $2f^*(n)+\log_2 n+11$ а. о.

1.4 Вспомогательные леммы

Лемма 1. Для любого n-мерного вектора x вектор $y=F^{-1}x$ находится не более чем за $f(n)+n$ а. о. (преобразование F^{-1} введено в [46]).

$\triangleright$ Пусть $y=(y_0,\dots,y_{n-1})$, $z=(z_0,\dots,z_{n-1})=Fx$. Из ([46]) следует, что $\dfrac{z_0}{n}=y_0$, $\dfrac{z_{n-k}}{n}=y_k$ $(k=1,\dots,n-1)$. Поэтому утверждение леммы 1 следует из п. 1.1. Лемма 1 доказана. $\triangleleft$

Лемма 2. Если n — натуральное число, то $f(n)<Cn\log_2 n$, где C — абсолютная константа.

Доказательство леммы 2 дано в [16]–[18].

1.5 Доказательства теорем

Утверждения теорем 1 и 2 следуют из теоремы 1 в [46].

Утверждения теорем 3 и 4 следуют из теоремы 2 в [46].

Поясним, как доказываются теоремы 3 и 4 применительно к решению задачи III. В силу теоремы 2 из [46] в базисе $e_0^*,\dots,e_{n-1}^*$, в котором координаты вектора $y=(y_0,\dots,y_{n-1})$ связаны с координатами того же вектора

$x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ в исходном базисе равенством $y = Fx$ матрица A из Γ_1 имеет вид $J\Lambda'$. Поэтому двумерные подпространства, натянутые на векторы e_1^* и e_{n-1}^*, e_2^* и e_{n-2}^* и т. д., инвариантны относительно действия A как линейного оператора, и достаточно найти собственные числа матрицы A, соответствующие собственным векторам, лежащим в этих подпространствах. Аналогичным образом проводится доказательство для матриц из Γ_2. Здесь согласно теореме 2 из [46] вместо равенства $y = Fx$ надо рассматривать равенство $y = \mathscr{L}Fx$, а в качестве инвариантных двумерных подпространств — подпространства натянутые на векторы e_0^* и e_{n-1}^*, e_1^* и e_{n-2}^* и т. д.

$\triangleright$ Доказательство теоремы 5. Разобьём весь процесс решения задачи I на 14 шагов.

Шаг 1. С помощью леммы 1 из [46] представим матрицу A в виде суммы $A = A' + A''$, где A' — матрица порядка n, все элементы которой равны $k_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(a_{01} + a_{n-1,0})$, а $A'' = (a''_{sj})$ — кососциркулянтная матрица, у которой нулевая строка $(a''_{00}, \dots, a''_{0,n-1})$ имеет вид $a''_{0j} = \frac{1}{2}(a_{0j} - a_{n-j,0})$ при $j = 1, \dots, n-1$, $a''_{0,0} = a_{0,0} - k_0$. Перейдём от системы уравнений $Ax = b$ к системе уравнений

$$A''x = b - k_0 e \sum_{j=0}^{n-1} x_j, \tag{1.1}$$

где e есть n-мерный вектор, все координаты которого равны 1. Очевидно переход от системы $Ax = b$ к системе (1.1) требует выполнения не более чем $2n + 1$ а. о.

Шаг 2. Применяя к матрице A'' теорему 1 из [46] и лемму 11 из [46], в силу (1.1) получим следующую систему уравнений:

$$x = R^{-1}\Phi^{-1}(\Lambda'')^{-1}\Phi R\big(b - k_0 e \sum_{j=0}^{n-1} x_j\big), \tag{1.2}$$

где R — матрица, введённая в лемме 11 ([46]), Λ'' — диагональная матрица с диагональными числами $l''_0, \dots, l''_{n-1}$, такими, что вектор $l'' = (l''_0, \dots, l''_{n-1})$ имеет вид $l'' = \mathscr{L}Fa'$, где $a' = (a'_0, \dots, a'_{n-1})$ — вектор с координатами $a'_0 = a''_{00}$, $a'_k = -a''_{0,n-k}$ $(k \neq 0)$, Φ, Φ^{-1}, $\mathscr{L}$ — матрицы, введённые в [46]. В силу леммы 11 из [46] матрица Λ'' находится за $f(n) + n$ а. о.

Шаг 3. Проверяем, имеется ли среди диагональных элементов $l''_0, \dots, l''_{n-1}$ матрицы Λ'' нулевой элемент, и если такой имеется , то зафиксируем его (согласно доказательству теоремы 3 гл. 2 в [15] в матрице Λ'' не может быть более одного нулевого диагонального элемента, так как это противоречит невырожденности матрицы A). Этот шаг требует выполнения не более n логических операций.

Если среди чисел $l''_0, \ldots, l''_{n-1}$ нет нулей, то переходим к шагу 4, а если есть нулевой элемент, то фиксируем его и переходим к шагу 10.

Шаг 4. Вычисляем вектор $\tilde{b} = (\tilde{b}_0, \ldots, \tilde{b}_{n-1}) = R^{-1}\Phi^{-1}(\Lambda'')^{-1}\Phi Rb$. Согласно лемме 1 из [46], для этого потребуется выполнить $2f(n) + 4n$ а. о.

Шаг 5. Вычисляем вектор $\tilde{e} = (\tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_{n-1}) = R^{-1}\Phi^{-1}(\Lambda'')^{-1}\Phi Re$. Так как вектор ΦRe можно вычислить заранее, и поэтому можно считать его известным, то для нахождения $\tilde{e}$ достаточно выполнить $f(n) + 2n$ а. о.

Шаг 6. Выполнив $n-1$ а. о., найдём число

$$\tilde{b}_0^* = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j.$$

Шаг 7. Выполнив n а. о., найдём число

$$\tilde{e}_0^* = k_0 \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{e}_j.$$

Шаг 8. Складывая все уравнения системы (1.2), с помощью двух а. о. получаем:

$$x_0^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} x_j = \frac{\tilde{b}^*}{1 + \tilde{e}_0^*},$$

(из невырожденности A легко следует, $1 + \tilde{e}_0^* \neq 0$).

Шаг 9. Выполнив $2n$ а. о. из системы (1.2) находим координаты x_j ($j = 0, \ldots, n-1$) вектора x:

$$x_j = \tilde{b}_j - k_0 x_0^*.$$

Объединяя все а. о., выполненные на шагах 1–9, получим, что если среди чисел $l''_0, \ldots, l''_{n-1}$ нет нуля (см. конец шага 3), то для нахождения вектора x требуется выполнить не более чем $4f(n) + 13n + 2$ а. о.

Шаг 10. Предположим теперь, что $l''_v = 0$ ($0 \leqslant v \leqslant n-1$). Согласно шагу 1 система $Ax = b$ эквивалентна системе $A'x + A''x = b$, и, применяя к обеим её частям преобразование Фурье F, в силу теоремы 1 из [46] получим следующую систему уравнений относительно вектора $x^* = Fx$:

$$\Lambda' x^* + \mathscr{L}^{-1}\Lambda''\mathscr{L} x^* = b^*, \tag{1.3}$$

где $x^* = (x_0^*, \ldots, x_{n-1}^*) = Fx$, $b^* = (b_0^*, \ldots, b_{n-1}^*) = Fb$, Λ' — матрица порядка n, у которой элемент, стоящий в левом верхнем углу равен nk_0, а остальные элементы — нули, Λ'' — матрица, введённая на шаге 2. Далее, умножая обе части системы (1.3) на матрицу $\mathscr{L}$, получим эквивалентную систему

$$\mathscr{L}\Lambda' x^* + \Lambda''\mathscr{L} x^* = \mathscr{L} b^*. \tag{1.4}$$

Покажем, что в системе (1.4) вектор $\mathscr{L}b^*$ и матрица $\mathscr{L}\Lambda'$ находятся за $f(n)+2n+1$ а. о.

а) В силу леммы 11 из [46] имеем: $\mathscr{L}b^* = \mathscr{L}Fb = FRb$. Поэтому вектор $\mathscr{L}\Lambda' b^*$ находится за $f(n)+n$ а. о.

б) Из определения матрицы Λ' следует, что матрица $\mathscr{L}$ имеет следующий вид: её левый столбец получается из левого столбца матрицы $\mathscr{L}$ умножением на nk_0, а остальные элементы — нули, и в силу того, что матрица $\mathscr{L}$ известна, матрица $\mathscr{L}\Lambda'$ находится за $n+1$ а. о.

Объединяя все а. о. в пунктах а) и б), убедимся в справедливости утверждения, сформулированного выше.

Шаг 11. Так как $l_v = 0$, то v-я сверху строка матрицы $\Lambda''\mathscr{L}$, входящей в систему (1.4), состоит из одних нулей (нумерация строк начинается с нуля), и поэтому из системы (1.4) за одну а. о. найдём координату x_0^* вектора $x^* = (x_0^*, \ldots, x_{n-1}^*)$: $x_0^* = b'_v/\bar{\beta}_v$, где b'_v есть v-я координата вектора $\mathscr{L}b^* = (b'_0, \ldots, b'_{n-1})$, вычисленного на шаге 10, $\bar{\beta}_v$ есть v-я координата вектора $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_0, \ldots, \bar{\beta}_{n-1})$, который совпадает с левым столбцом матрицы $\mathscr{L}\Lambda'$, также вычисленной на шаге 10.

Шаг 12. Зная координату x_0^* вектора $x^* = (x_0^*, \ldots, x_{n-1}^*)$, из системы (1.4) за $3(n-1)$ а. о. найдём все координаты вектора $\bar{x}^* = (\bar{x}_0^*, \ldots, \bar{x}_{n-1}^*) = \mathscr{L}x^*$, кроме координаты $\bar{x}_v$:

$$\bar{x}_k = \frac{b'_k - \bar{\beta}_k x_0^*}{l''_k}, \quad k \neq v$$

(координаты b'_k, $\bar{\beta}'_k$ введены на шаге 10, а числа l''_k — на шаге 2).

Шаг 13. Зная координаты $\bar{x}_k$ $(k \neq v)$ вектора $\bar{x} = (\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_{n-1}) = \mathscr{L}x^*$ и координату x_0^* вектора $x^* = (x_0^*, \ldots, x_{n-1}^*)$, из равенства $x^* = \mathscr{L}^{-1}\bar{x}$ за $2n-1$ а. о. найдём координату $\bar{x}_v$ вектора $\bar{x}$:

$$\bar{x}_v = \frac{x_0^* - \sum\limits_{k\neq v} \mu_{0k}\bar{x}_k}{\mu_{0v}},$$

где числа μ_{0k} $(k = 0, \ldots, n-1)$ взяты из замечания 2 в [46], а суммирование в последнем равенстве распространено на все k, кроме $k = v$.

Шаг 14. Зная все координаты вектора $\bar{x} = \mathscr{L}x^*$, вычисленные на шагах 12 и 13, за $f(n)+2n$ а. о. определим вектор x. Для этого воспользуемся леммой 11 в [46], согласно которой $\bar{x} = \mathscr{L}Fx = FRx$. Поэтому $x = R^{-1}F^{-1}\bar{x}$, откуда и следует утверждение, сформулированное в начале этого шага.

Объединяя все требуемые а. о. на шагах 1, 2, 10–14, получим, что если среди чисел $l''_0, \ldots, l''_{n-1}$ есть нуль, то для нахождения вектора x требуется выполнить $3f(n)+12n-1$ а. о., что меньше, чем в случае, при котором нет нулей среди чисел $l''_0, \dots, l''_{n-1}$.

Если же распараллелить вычисления, то в указанном алгоритме количество требуемых а. о. можно снизить до $2f^*(n)+\log_2 n+11$. Теорема 5 доказана. ◁

Следствие. Применяя лемму 2 получим, что количество а. о. в теоремах 1–5, необходимых для решения задач I, II, III не превосходит $C^* n\log_2 n$, где C^* — абсолютная константа.

1.6 Асимптотически быстрые алгоритмы для решения линейной системы уравнений

Первые результаты по экономному решению линейной системы уравнений $Ax=b$ с теплицевой матрицей A порядка n были получены Левинсоном [32], который указал рекуррентную процедуру ее решения, требующую выполнения $O(n^2)$ а. о. для случая, когда матрица A — симметрическая. Позднее эта процедура была повторно предложена Робинсоном [37]. Подробное её описание можно найти в [3]. В методе Левинсона на вектор b никаких дополнительных ограничений не налагается. Если же предположить, что вектор b имеет некоторый специфический вид, что бывает важно для предложений (см. ниже секция 2), то можно указать ещё более экономный способ решения. Этот способ обнаружил Дурбин [27], в два раза сократив объём вычислений по сравнению с методом Левинсона. Для решения системы уравнений $Ax=b$ в этом случае требуется выполнить $n^2+O(n)$ а. о. Сформулируем теорему Дурбина.

Теорема 6. Предположим, что $A=(a_{sj})$ — симметрическая теплицева матрица порядка n, у которой элементы верхней строки a_{0j} представлены в виде $a_{0j}=a(j)$ $(j=0,\dots,n-1)$, вектор $b=(b_0,\dots,b_{n-1})$ имеет вид $b_j=a(j+1)$ $(j=0,\dots,n-1)$. Тогда решение $x=(x_0,\dots,x_{n-1})$ системы $Ax=b$ находится с помощью следующей процедуры:

$$p_0=a(0), \quad q_1=-\frac{a(1)}{a(0)},$$

$$q_s=-[a(s)+\sum_{j=1}^{s-1} x_j^{(s-1)} a(s-j)]/p_{s-1} \quad (s=2,\dots,n),$$

$$x_s^{(s)}=q_s \quad (s=1,\dots,n),$$

$$\begin{aligned} x_j^{(s)} &= x_j^{(s-1)} + q_s x_{s-j}^{(s-1)} \quad (1 \leqslant j \leqslant s-1), \\ p_s &= (1 - q_s^2) p_{s-1} \quad (s = 1, \ldots, n), \\ x_j &= -x_{j+1}^{(n)} \quad (j = 0, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

В случае несимметричных теплицевых матриц A оценка $O(n^2)$ а. о., необходимых для решения системы $Ax = b$, получена в [21] и [45].

В последние 30 лет был достигнут существенный прогресс в задаче о минимизации числа а. о. при решении линейной системы уравнений с теплицевой матрицей порядка n при больших n. А именно, в работах [6], [22], [44] были предложены алгоритмы, требующие выполнения $O(n \log_2^2 n)$ а. о. Эти алгоритмы используют некоторые результаты о виде матрицы, обратной к теплицевой (п. 1.7), и помимо невырожденности матрицы A предполагают невырожденность некоторых её ведущих подматриц. Это последнее требование можно обойти с помощью расширения матрицы A до невырожденной теплицевой матрицы $\hat{A}$ порядка $n+1$ и использования выражения A^{-1} через $\hat{A}^{-1}$. Однако при этом возникает задача: как экономно такое расширение осуществить.

Сформулируем в заключение ещё один результат [15], который в ряде случаев, имеющих прикладное значение, позволяет получить затраты, меньше чем $O(n \log_2^2 n)$ а. о.

Теорема 7. Пусть $A = (a_{sj})$ — теплицева матрица порядка n. Рассмотрим n-мерный вектор $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, у которого координата a_k $(k = 1, \ldots, n-1)$ имеет вид $a_k = a_{k,0} + a_{0,n-k}$. Предположим, что вектор $a^* = Fa$ можно представить в виде $a^* = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$, где $\bar{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha)$ есть n-мерный вектор, у которого все координаты равны α, а $\bar{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_{n-1})$ есть n-мерный вектор, среди координаты которого не более чем $m < n^{1/3}$ $(m \geqslant 1)$ ненулевых. Тогда систему $Ax = b$ можно решить, выполняя $O(mn \log_2 n + m^3 + m^2 n)$ а. о.

Замечание. Из определения преобразования Фурье F следует, что условие, налагаемое в теореме 7 на вектор a^*, не зависит от координаты a_0 вектора a. Эта теорема позволяет получить оценки, лучше, чем $O(n \log_2^2 n)$ в ситуации, когда число m достаточно мало по отношению к n, и в частном случае, когда при постоянном m число $n \to \infty$, результат теоремы 7 приводит к оценке $O(n \log_2 n)$.

Линейная система с ганкелевой матрицей сводится к системе уравнений с теплицевой матрицей, если уравнения системы записать в обратном порядке.

1.7 Обращение матриц

Прежде всего сформулируем одну теорему о виде матрицы, обратной к теплицевой.

Теорема 8 ([4]). Рассмотрим две системы уравнений:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{sj}x_j = \delta_{s,0} \quad (s = 0, \dots, n-1), \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{sj}y_{j-n+1} = \delta_{s,n-1} \quad (s = 0, \dots, n-1), \tag{1.6}$$

где a_{sj} — элементы теплицевой матрицы $A = (a_{sj})$, x_j — координата неизвестного вектора $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$, y_{j-n+1} — координата неизвестного вектора $y = (y_{-n+1}, \dots, y_0)$,

$$\delta_{sj} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s = j, \\ 0, & \text{если} \quad s \neq j. \end{cases}$$

Тогда, если каждая из этих систем разрешима и выполнено условие $x_0 \neq 0$, то матрица A невырождена и обратная к ней матрица A^{-1} имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} A^{-1} = x_0^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & 0 & \dots\dots & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 \ \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots\dots & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & y_{-1} & \dots\dots & y_{-n+1} \\ 0 & y_0 & y_{-1} \ \dots & y_{-n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & y_0 \end{pmatrix} - \right. \\ \left. - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y_{-n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{-1} & y_{-2} & \dots & y_{-n+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_1 \\ 0 & 0 & x_{n-1} & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

При этом $x_0 = y_0 = |\tilde{A}|/|A|$, где $\tilde{A} = (\tilde{a}_{sj})$ — теплицева матрица порядка $n-1$, элементы которой имеют вид $\tilde{a}_{sj} = a_{sj}$ $(s, j = 0, \dots, n-2)$, $|\tilde{A}|$ и $|A|$ — соответственно определители матриц $\tilde{A}$ и A, четыре матрицы в правой части равенства (1.7) являются теплицевыми.

Согласно теореме 8 для того, чтобы определить вид матрицы A^{-1} достаточно решить две системы уравнений (1.5) и (1.6). Здесь можно эффективно использовать распараллеливание вычислительного процесса и алгоритмы, указанные в пп. 1.5, 1.6. Если под заданием обратной матрицы A^{-1} понимать задание параметров $x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, y_{-1}, \dots, y_{-n+1}$ в равенстве (1.7), то согласно п. 1.6 нахождение матрицы A^{-1} можно осуществить, выполняя $O(n \log_2^2 n)$ а. о.

Как следует из формулировки теоремы 8, условие $x_0 \neq 0$ равносильно условию невырожденности ведущей подматрицы $\tilde{A}$.

Если же под задачей определения обратной матрицы понимать нахождение её элементов, то, как показано в работе [10], эту задачу нельзя, вообще говоря, решить, выполняя менее чем $O(n^2)$ а. о.

Для ганкелевой матрицы $B = (b_{sj})$ имеет место теорема, аналогичная теореме 8, которая непосредственно следует из равенства $B^{-1} = \hat{E}A^{-1}$, где $\hat{E}$ — матрица, введённая в [46], а $A = (a_{sj})$ — теплицева матрица, имеющая вид $A = B\hat{E}$, в которой $a_{0j} = b_{0,n-1-j}$, $a_{j0} = b_{j,n-1}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$.

1.8 Вычисления с двухуровневыми матрицами и тензорами

Двухуровневые матрицы, которые мы здесь будем рассматривать — это блочные матрицы

$$A = (A_{kj}) = \begin{pmatrix} A_{00} & \ldots & A_{0,n_1-1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ A_{n_1-1,0} & \ldots & A_{n_1-1,n_1-1} \end{pmatrix},$$

$$B = (B_{kj}) = \begin{pmatrix} B_{00} & \ldots & B_{0,n_1-1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ B_{n_1-1,0} & \ldots & B_{n_1-1,n_1-1} \end{pmatrix}$$

$(k, j = 0, \ldots, n_1-1)$, элементы A_{kj} и B_{kj} которых представляют собой числовые матрицы $A_{kj} = (a_{kj,lm})$ и $B_{kj} = (b_{kj,lm})$ $(l, m = 0, \ldots, n_2-1)$ порядка n_2 с элементами $a_{kj,lm}$ и $b_{kj,lm}$ соответственно. Очевидно, порядок двухуровневых матриц равен $n = n_1 n_2$. При этом предполагается, что матрицы $A = (A_{kj})$, $A_{kj} = (a_{kj,lm})$ теплицевы, т. е. $A_{kj} = A_{k_1 j_1}$ при $k - j = k_1 - j_1$, $a_{kj,lm} = a_{kj,l_1 m_1}$ при $l - m = l_1 - m_1$, и матрицы $B = (B_{kj})$, $B_{kj} = (b_{kj,lm})$ — ганкелевы, т. е. $B_{kj} = B_{k_1 j_1}$ при $k + j = k_1 + j_1$, $b_{kj,lm} = b_{kj,l_1 m_1}$ при $l + m = l_1 + m_1$.

Двухуровневым матрицам $A = (a_{kj,lm})$ и $B = (b_{kj,lm})$ однозначно сопоставим теплицев тензор $A_{\mathrm{T}} = \{a_{kl}^{jm}\}$ ([46]), такой что $a_{kl}^{jm} = a_{kj,lm}$, и ганкелев тензор $B_{\mathrm{T}} = \{b_{kl}^{jm}\}$ ([46]), такой что $b_{kl}^{jm} = b_{kj,lm}$. Наоборот, каждому теплицеву тензору A_{T} и каждому ганкелеву тензору с помощью последних двух равенств сопоставляются двухуровневые матрицы A и B. При таком соответствии произведения двухуровневых матриц A и B на вектор $c = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ однозначно определяются действиями тензоров A_{T} и B_{T} на некоторую матрицу $C = (C_{jm})$, где $j = 0, \ldots, n_1 - 1$, $m = 0, \ldots, n_2 - 1$. Действительно, если в качестве C взять матрицу, у которой элементы C_{jm} имеют вид $C_{jm} = c_{jn_2+m}$, и обозначить через $Ac = c' = (c'_0, \ldots, c'_{n-1})$, $Bc = c'' = (c''_0, \ldots, c''_{n-1})$,

$A_{\mathrm{T}}c = C' = (C'_{kl})$, $B_{\mathrm{T}}C = C'' = (C''_{kl})$, то

$$C'_{kl} = \sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{m=0}^{n_2-1} a_{kl}^{jm} C_{jm} = \sum_{j=0}^{n_1-1}\sum_{m=0}^{n_2-1} a_{kj,lm} C_{jm_2+m} = c'_{kn_2+l},$$

и аналогичное равенство справедливо для матрицы C''_{kl}. Поэтому алгебраическим операциям над двухуровневыми матрицами (имеются в виду операции сложения, умножения и вычисления обратной матрицы) естественным образом сопоставляются такие же операции над соответствующими тензорами.

Определение 3. Будем считать, что двухуровневая матрица имеет s-й ($s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) канонический вид, если соответствующий ей тензор является тензором s-го канонического вида ([46]).

Используя указанное выше соответствие между двухуровневыми матрицами и тензорами, алгебраическими операциями над ними, а также теоремы из [46] можно произвольную теплицеву двухуровневую матрицу представить в виде суммы четырёх двухуровневых матриц s-го канонического вида, где $s = 1, 2, 3, 4$, произвольную ганкелеву двухуровневую матрицу представить в виде суммы четырёх двухуровневых матриц s-го канонического вида, где $s = 5, 6, 7, 8$, и для каждой двухуровневой матрицы s-го канонического вида ($s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) указать экономные алгоритмы решения трёх задач линейной алгебры, сформулированных в п. 1.3. Прежде чем описывать результаты, введём следующие обозначения.

Обозначим через $\hat{f}(n_1, n_2)$ сложность вычисления двумерного преобразования Фурье $\hat{\Gamma}$ ([46]), которая определяется также, как и функция $f(n)$ (п. 4.2) и равна наименьшему числу арифметических операций, необходимых для нахождения матрицы $\hat{F}X$, где $X = (x_{jl})$ — произвольная матрица, такая что $j = 0, \ldots, n_1 - 1$; $l = 0, \ldots, n_2 - 1$.

Обозначим через $\hat{f}^*(n_1, n_2)$ сложность вычисления преобразования $\hat{F}$ при распараллеливании, которая определяется также, как функция $\hat{f}^*(n)$ (п. 1.2) и равна наименьшему арифметических операций, необходимых для нахождения матрицы $\hat{F}X$ в случае распараллеливания вычислительного процесса.

Лемма 3 ([12]). Имеет место оценка

$$\hat{f}(n_1, n_2) \leqslant \hat{C} n_1 n_2 \log_2(n_1 n_2),$$

где $\hat{C}$ — константа, не зависящая от n_1 и n_2.

Лемма 4. Для любой матрицы $X = (x_{jl})$ ($j = 0, \ldots, n_1 - 1$; $l = 0, \ldots, n_2 - 1$) матрица $X^* = \hat{F}^{-1}X$ находится не более чем за $\hat{f}(n_1, n_2) + n$ а. о., где $n = n_1 n_2$.

Доказательство леммы 4 проводится также, как и доказательство леммы 1 этого параграфа.

Теорема 9. Если двухуровневая матрица A, содержащая $n^2 = (n_1 n_2)^2$ элементов, имеет s-й канонический вид, то при $s = 1, 2, 3, 4$

1) задачу I можно решить, выполняя не более чем $3\hat{f}(n_1, n_2) + 4n$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя не более чем $2\hat{f}^*(n_1, n_2) + 4$ а. о.;

2) задачу II можно решить, выполняя не более $2\hat{f}^*(n_1, n_2) + 4n$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя не более чем $2\hat{f}^*(n_1, n_2) + 4$ а. о.;

3) задачу III можно решить, выполняя $\hat{f}(n_1, n_2) + n$ а. о., а если распараллелить вычисления, то её можно решить, выполняя $\hat{f}^*(n_1, n_2) + 1$ а. о.

Согласно этой теореме и лемме 3 для двухуровневых матриц s-го канонического вида при $s = 1, 2, 3, 4$ количество а. о., необходимых для решения каждой из задач I, II, III есть $O(n \log_2 n)$.

Доказательство теоремы 9 непосредственно следует из теоремы о теплицевых тензорах в [46].

Теорема 10. Если двухуровневая матрица A, содержащая $n^2 = (n_1 n_2)^2$ элементов, имеет s-й канонический вид, то при $s = 5, 6, 7, 8$ задачи I и II можно решить, выполняя такое же количество а. о., как и в теореме 9 соответственно, а задачу III можно решить, выполняя не более чем $\hat{f}(n_1, n_2) + \dfrac{3n}{2}$ а. о. и $\dfrac{n}{2}$ операций извлечения квадратного корня из комплексного числа.

Доказательство теоремы 10 следует из теоремы о ганкелевых тензорах в [46].

Результаты приведённые здесь, справедливы также для тензоров и легко обобщаются на m-уровневые матрицы, где m — произвольное натуральное число.

Далее сформулируем ещё одну теорему о решении уравнения в свёртках, имеющую прикладное значение в медицине.

Теорема 11. Пусть $A = \{a_{kl}^{jm}\}$ — теплицев тензор, являющийся суммой тензоров $A' = \{a_{kl}'^{jm}\}$ и $A'' = \{a_{kl}''^{jm}\}$, из которых тензор A' — циркулянтный и такой, что $a_{kl}'^{jm} = d$, где d-константа, не зависящая от j, m, k, l, а A'' — тензор s-го канонического вида, где $s = 2, 3, 4$. Предположим, что тензор A имеет обратный, а $b = (b_{kl})$ — заданная матрица ($k = 0, \dots, n_1 - 1$; $l = 0, \dots, n_2 - 1$). Тогда решение $x = (x_{kl})$ системы $Ax = b$ можно найти, выполняя не более чем $4\hat{f}(n_1, n_2) + O(n_1 n_2)$ а. о., а если распараллелить вычисления, то x можно определить, выполняя не более чем $2\hat{f}^*(n_1, n_2) + O\big(\log_2(n_1 n_2)\big)$ а. о.

Доказательство теоремы 11 проводится аналогично доказательству теоремы 5.

2 Некоторые применения

2.1 Линейное прогнозирование детерминированного сигнала

Области применений теплицевых и ганкелевых матриц весьма многообразны. Укажем здесь некоторые из них, связанные с линейным прогнозированием и построением на этой основе модели выходного сигнала, описываемого временным рядом $x(m)$, где $x(m)$ — вещественное число, а m — целое. К числу таких областей относятся нейрофизика ([24], [28], [29], [41]), геофизика ([36]–[39], [43]) и передача речи ([20], [19], [30], [31], [33], [34], [40]).

Если предположить, что входной сигнал, который подаётся на изучаемую систему, полностью неизвестен, то значение выходного сигнала $x(m)$ можно приближённо представить через его предыдущие значения в виде

$$\tilde{x}(m) = \sum_{k=1}^{p} s_k x(m-k). \tag{2.1}$$

При этом среднеквадратичная ошибка Y имеет вид

$$Y = Y(s_1, \dots, s_p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Big(x(m) - \sum_{k=1}^{p} s_k x(m-k)\Big)^2.$$

(все ряды предполагаются сходящимися), и задача линейного прогнозирования состоит в том, чтобы найти такие значения параметров $a_1, \dots, a_p$, чтобы функция $Y(s_1, \dots, s_p)$ при $s_1 = a_1, \dots, s_p = a_p$ достигала минимума.

Достаточным условием для этого является справедливость равенств

$$\frac{\partial Y}{\partial s_k}(a_1, \dots, a_p) = 0, \quad (k = 1, \dots, p),$$

что равносильно следующей системе уравнений:

$$Aa = b, \tag{2.2}$$

где $a = (a_1, \dots, a_p)$ — неизвестный вектор, A — симметричная теплицева матрица, имеющая вид

$$A = \begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \dots & R(p-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(p-1) & R(p-2) & \dots & R(0) \end{pmatrix},$$

$b = (b_1, \dots, b_p)$ — вектор, имеющий вид $b_k = R(k)$ $(k = 1, \dots, p)$, а $R(k)$ — функция

$$R(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m+k). \tag{2.3}$$

Поскольку точность предполагаемого описания будет тем выше, чем больше p, а время для его отыскания обычно ограничено, то возникает задача об экономном решении системы (2.2) при больших p и заданной функции $R(k)$.

Для решения указанной задачи применимы результаты пп. 1.3, 1.5, 1.6. Непосредственным следствием теоремы 6 (п. 1.6) является следующая теорема.

Теорема 1. Если значения функции $R(k)$ $(k = 1, \ldots, p)$ известны, то параметры $a_1, \ldots, a_p$ находятся с помощью процедуры, которая требует выполнения $p^2 + O(p)$ а. о.

В то же время результаты работ [6], [22], [44] позволяют решить задачу, выполняя $O(p \log_2^2 p)$ а. о., тогда как теорема 5 и лемма 2 при дополнительном предположении позволяют это сделать, выполняя $O(p \log_2 p)$ а. о.

Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 2. Предположим, что функция $R(k)$ удовлетворяет следующему условию:

$$R(1) + R(p-1) = R(2) + R(p-2) = \ldots = R(p-1) + R(1),$$

а C — константа, введённая в лемме 2 из п. 1.4. Тогда для нахождения чисел $a_1, \ldots, a_p$ достаточно выполнить менее чем $4C \log_2 p + 13p + 2$ а. о., а если распараллелить вычисления, то это можно сделать, выполняя не более чем $2\hat{f}^*(p) + \log_2 p + 11$ а. о.

Условие предыдущей теоремы справедливо, в частности, для функций $R(k)$, линейных при $1 \leqslant k \leqslant p$, которыми часто можно аппроксимировать произвольные $R(k)$. Далее укажем конкретный класс временных рядов $x(n)$, для которых функция $R(k)$ — линейная при $0 \leqslant k \leqslant p$ и сформулируем для этого случая более сильный результат.

Рассмотрим класс X, состоящий из таких временных рядов $x(n)$, которые удовлетворяют следующему условию: если n_1, n_2 — целые числа, $\left[\dfrac{n_1}{p}\right] = \left[\dfrac{n_2}{p}\right]$ $\left(\left[\dfrac{n_1}{p}\right]\right.$ и $\left[\dfrac{n_2}{p}\right]$ — целые части чисел $\dfrac{n_1}{p}$ и $\left.\dfrac{n_2}{p}\right.$ соответственно$\Big)$, то $x(n_1) = x(n_2)$. В этом случае функция $R(k)$ — линейная при $0 \leqslant k \leqslant p$, и для нахождения линейного прогноза

$$\tilde{x}(pn) = \sum_{k=1}^{p} a_k x(pn-k)$$

(см. (2.1)) в точке pn достаточно выполнить $O(p)$ а. о.

Теорема 3. Если $x(n) \in X$ и p — чётное число, то величина $\tilde{x}(pn)$

находится с помощью следующей процедуры. Пусть

$$b_1 = R(1), \quad h = R(0) - R(1); \quad k = 0, \ldots, p-1;$$

i — мнимая единица;

$$\delta_k = -\frac{2}{\exp\bigl(-(2\pi ik + \pi i)/p\bigr) - 1};$$

$$\delta'_k = \frac{p-1}{\exp\bigl(-(2\pi ik + \pi i)/p\bigr) - 1} - \frac{1 + \exp(-(2\pi ik + \pi i)/p)}{\bigl(\exp\bigl(-(2\pi ik + \pi i)/p\bigr) - 1\bigr)^2};$$

$$\gamma_k = -\frac{2}{\left(\exp\dfrac{\pi i(2k+1)}{p} - 1\right)p};$$

$$\gamma'_k = -\frac{4}{p\left(\exp\left(-\dfrac{\pi i(2k+1)}{p}\right) - 1\right)\left(\exp\dfrac{\pi i(2k+1)}{p} - 1\right)};$$

$$k_0 = 0{,}5\bigl(R(0) - h + R(p-1)\bigr); \quad R''_0 = R(0) - k_0;$$

$$l''_k = \delta_k R''_0 + \delta'_k h; \quad \bar{b}_k = \delta_k b_1 + \delta'_k h;$$

$$\tilde{b}_0 = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma_k \bar{b}_k}{l''_k}; \quad \tilde{\beta}_0 = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\gamma'_k k_0}{l''_k}.$$

Тогда $\tilde{x}(pn) = \dfrac{\tilde{b}_0 x(pn-1)}{1 + \tilde{\beta}_0}$.

Так величины $\delta_k, \delta'_k, \gamma_k, \gamma'_k$ $(k = 0, \ldots, p-1)$ можно вычислить заранее, то в силу теоремы 3 для нахождения $\tilde{x}(pn)$ достаточно выполнить $6p + 11$ а. о., а если распараллелить вычисления, то достаточно выполнить $\log_2 p + 9$ а. о.

Теорема 3 есть частный случай $(r = 0)$ теоремы, доказательство которой приведено в [15] (глава 3, §2) и использует теорему 1 (§1) данной работы.

2.2 Линейное прогнозирование случайного сигнала

Предположим, что $x = x(n)$ — вещественный стационарный процесс с дискретным временем n $(-\infty < n < \infty)$ такой, что $Mx = 0$, где символ M обозначает математическое ожидание. Классическая задача линейного прогнозирования процесса x на r шагов вперёд по p предыдущим значениям состоит в нахождении таких вещественных чисел $a_1, \ldots, a_p$, что функция

$$Y(s_1, \ldots, s_p) = M\Bigl(x(n) - \sum_{k=1}^{p} s_k x(n - r - k + 1)\Bigr)^2$$

достигает минимума при $s_1 = a_1, \ldots, s_p = a_p$ ([8], [11], [27], [32], [42]).

Решение этой задачи однозначно определяется значениями в целых точках ковариационной функции $R(l)$ процесса $x(n)$, имеющий вид $R(l) = M(x(n)x(n+l))$, которая предполагается известной [8]. Существует много работ, которые посвящены задаче минимизации числа арифметических операций Q_p, необходимых для нахождения чисел $a_1, \ldots, a_p$ в предположении, что функция $R(l)$ нам известна ([11], [32], [37], [15]). Первый результат в этом направлении получен Левинсоном [32], который доказал, что $Q_p = O(p^2)$. Для произвольных процессов наилучшая оценка Q_p (в смысле порядка роста при $p \to \infty$) имеет вид $Q_p = O(p \log_2^2 p)$ и следует из работ [6], [22], [44], посвященных решению линейной системы уравнений с теплицевой матрицей (см. п. 1.6). Здесь же сформулируем результаты [15], которые для широкого класса стационарных случайных процессов, часто встречающихся в прикладных задачах, дают оценки, лучше чем $O(p \log_2^2 p)$. Общее условие, которое налагается на стационарный случайный процесс (теорема 4), формулируется с помощью понятия s-частичной спектральной плотности $\varphi_s(\sigma)$ стационарного случайного процесса. Это понятие естественным образом связано с известным понятием спектральной плотности $\varphi(\sigma)$ (см. замечание).

Определение 4. Пусть s — натуральное число. Введем *s-частичную спектральную плотность* процесса $x(n)$ по формуле

$$\varphi_s(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-(s-1)}^{s-1} R(k) \exp(-i\sigma k),$$

где i — мнимая единица.

Замечание. Если у процесса $x(n)$ существует спектральная плотность $\varphi(\sigma) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) \exp(-i\sigma k)$, то $\varphi(\sigma) = \lim\limits_{s\to\infty} \varphi_s(\sigma)$.

Теорема 4. Рассмотрим значения функции $\varphi_p(\sigma)$ в точках $\sigma_j = 2\pi j/p$, где $j = 0, \ldots, p-1$, и обозначим их через $\varphi^{(j)} = \varphi_p(\sigma_j)$. Предположим, что множество чисел $\varphi^{(j)}$ $(j = 0, \ldots, p-1)$ можно разбить на две группы такие, что количество чисел в первой группе равно $m < p^{1/3}$ $(m \geqslant 1)$, а все числа во второй группе равны между собой. Тогда для нахождения чисел $a_1, \ldots, a_p$ достаточно выполнить $O(mp \log_2 p + m^3 + m^2 p)$ а. о.

Следствие. Пусть удовлетворяется условие теоремы 4, а число m постоянно и от p не зависит. Тогда для нахождения чисел $a_1, \ldots, a_p$ достаточно выполнить $O(p \log_2 p)$ а. о.

Доказательство теоремы 4 приведено в [15] и существенно использует теорему 7 п. 1.6.

Частным случаем ($m = 1$) условия теоремы 4 является условие из теоремы 2 п. 2.1, налагаемое на ковариационную функцию $R(l)$. При выполнении этого условия справедливо утверждение теоремы 2 из главы 3 в [15].

Список литературы

[1] *Бабенко К. И.* О теплицевых и ганкелевых матрицах // УМН. — 1986. — Т. 41, Вып. 1 — С. 171–177.

[2] *Воеводин В. В.* Математические модели и методы в параллельных процессах. — М.: Наука, 1986.

[3] *Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е.* Вычислительные процессы и системы. Вып. 1 — М.: Наука, 1983. — С. 124–266.

[4] *Гохберг И. Ц., Семенцул А. А.* Об обращении конечных теплицевых матриц и их континальных аналогов // Мат. исслед. — Кишинев, 1972. — Т. 7, вып. 2 (24). — С. 201–223.

[5] *Гренандер У., Сегё Г.* Теплицевы формы и их приложения. — М.: ИЛ, 1961.

[6] *Грэгг В. Б., Уорнер Д. Д.* О быстром решении систем линейных уравнений с положительно определенной ганкелевой матрицей // Численные методы линейной алгебры. — М.: МГУ, 1982. — С. 10–15.

[7] *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. — М.: Наука, 1974.

[8] *Колмогоров А. Н.* Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР; сер. мат. — 1941. — Т. 5. — С. 3–14.

[9] *Пустыльников Л. Д., Локоть Т. В.* Параллельные вычисления с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // Кибернетика и вычислительная техника, вып. 4, (1988), 96–123.

[10] *Макаров О. М.* О нижней границе числа операций умножения при вычислении произведения ганкелевых матриц // ЖВМ и МФ. — 1977. — Т. 17, № 5. — С. 1298–1301.

[11] *Маккол Дж.* Линейное предсказание. Обзор // ТИИЭР. — 1975. — Т. 63, № 4. — с. 20–44.

[12] *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. — М.: Радио и связь, 1985.

[13] *Пустыльников Л. Д.* Об алгебраической структуре пространств теплицевых и ганкелеых матриц // ДАН. — 1980. — Т. 250, № 3. — С. 556–559.

[14] *Пустыльников Л. Д.* О быстрых вычислениях в некоторых задачах линейной алгебры, связанных с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // УМН. — 1980. — Т. 35, № 5. — С. 241–242.

[15] *Пустыльников Л. Д.* Теплицевы и ганкелевы матрицы и их применения // УМН, 1984. — Т. 39, № 4. — С. 53–84.

[16] *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.

[17] *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

[18] *Тыртышников Е. Е.* Об алгоритмах дискретного преобразования Фурье // Численные методы алгебры. — М.: Изд-во МГУ, 1981. — С. 10–26.

[19] *Фланаган Д.* Анализ, синтез и восприятие речи. — М.: Связь, 1968.

[20] *Atal B. S., Hanauer S. L.* Speech analysis and synthesis by linear prediction of the speech wave // J. Acoust. Soc. Amer. — 1971. — V. 50, № 2. — P. 637–655.

[21] *Bareiss E. H.* Solution of linear equations with Toeplitz and vector Toeplitz matrices // Numerische Mathematik. — 1969. — T. 13, № 5. — P. 404–424.

[22] *Bitmead R. R., Anderson B. D. O.* Asymptotically fast solution of Toeplitz and related systems of linear equations // Linear Alg. and Appl. — 1980. — V. 34. — P.103–116.

[23] *Bluestein L. I.* A linear filtering approach to the computation of discrete Fourier transform // IEEE Trans. — 1970. — AU-8. — P. 451–455.

[24] *Bohlin T.* Comparison of two methods of modeling stationary EEG signals // IBM. J. Res. Dev. — 1973. — P. 194–205.

[25] *Cooley I. W., Lewis P. A. W., Welch P. D.* Historical notes on the fast Fourier transform // Proc. IEEE. — 1967. — V. 55, № 10. — P. 1675–1677.

[26] *Cooley I. W., Tukey I. W.* An algorithm for the machine calculations of complex Fourier series // Math. Comput. — 1965. — V. 19, № 90. — P. 297–301.

[27] *Durbin J.* The fitting of time series models // Rev. Inst. Int. Statist. — 1960. — V. 28, № 3 — P. 233–243.

[28] *Fenwick P. B. C., Michie P., Dollimore J., Fenton G. W.* Mathematical simulation of the electro-encephalogram using an autoregressive series // Bio-Med. Comput. — 1971. — V. 2. — P. 281–307.

[29] *Gersch W.* Spectral analysis of EEG's by autoregressive decomposition of time series // Math. Biosci. — 1970. — V. 7. — P. 205–222.

[30] *Itakura F., Saito S.* Analysis synthesis telephony based on the maximum likelihood method // In Rep. 6th Int. Congr. Acoustics/Y. Kohasi. Paper C-5-5, — 1968. Aug., P. C17–C20.

[31] *Itakura F., Saito S.* A statistical method for estimation of speech spectral density and formant frequencies // Electron. Commun. Japan. —1970- V. 53-A, № 1. — P. 36–43.

[32] *Levinson N.* The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction //J. Math. and Phys. — 1947. -V.25 - P. 261-278.

[33] *Makhoul J.* Spectral analysis of speech by linear prediction // IEEE Trans. Audio Electroacust. — 1973. — V. AU-21, June. — P. 140–148.

[34] *Markel J. D.* Digital inverse filtering — A new tool for formant trajectory estimation // IEEE Trans. Audio Electroacust. — 1972. — V. AU-20, June. — P.129–137.

[35] *Rabiner L. R., Rader C. M.* (ed.) Digital signal processing. — New York: IEEE Press. — 1972.

[36] *Robinson E. A.* Multichannel Time Series Analysis with Digital Computer Programs. — San Francisco, Calif.: Holden-Day, 1967.

[37] *Robinson E. A.* Statistical Communication and Detection. — New York: Hafner, 1967.

[38] *Robinson E. A.* Predictive decomposition of time series with application to seismic exploration // Geophysics. — 1967. — V. 32, № 3, June. — P. 418–484.

[39] *Robinson E. A., Treitel S.* The Robinson-Treitel Reader. — Tulsa, Okla: Sismograph Service Corp. — 1973.

[40] *Schafer R. W., Rabiner L. R.* Digital representations of speech signals // Proceedings IEEE. — 1975. — V. 63, № 4, April. — P. 662–677.

[41] *Wennberg A., Zetterberg L. H.* Application of a computerbased model of EEG analysis // Electroencephalogr. Clin. Neurophys. — 1971. — V. 31, № 5. — P. 457–468.

[42] *Wiener N.* Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications. Cambridge, Mass.: MIT Press. — 1949.

[43] *Wood L. C., Treitel S.* Seismic signal processing // Proceedings IEEE. — 1975. — V. 63, № 4. — P. 649–661.

[44] *Yun D. Y. Y., Gustavson F. G.* Fast computation of the rational Hermite interpolant and solving Toeplitz systems of equations via the extended Euclidean algorithm // Lect. Notes Comput. Sci. — 1979. — V. 72. — P. 58–64.

[45] *Zohar Sh.* The solution of a Toeplitz set of linear equations // J. Assoc. Comput. Mach. — 1974. — V. 21, № 2. — P. 272–276.

[46] *Пустыльников Л. Д., Локоть Т. В.* Алгебраические структуры, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // Препринт ИПМ, № 60, 2010.