ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 58 за 2011 г.

Пустыльников Л.Д.

Квазистационарные процессы и их прогнозирование

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

Л. Д. Пустыльников

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ
И ИХ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

Москва, 2011 г.

УДК
Л. Д. Пустыльников. Квазистационарные процессы и их прогнозирование. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Построена теория квазистационарных процессов и их прогнозирования, обобщающая соответствующую классическую теорию для стационарных случайных процессов. Для важного класса таких процессов найдены явные выражения прогнозирования по конечному числу предыдущих значений, для вычисления которых требуется выполнить $O(r \log_2 r)$ или $O(r)$ арифметических операций, где r — количество предыдущих значений.

L. D. Pustyl'nikov. Quasistationary processes and their prediction. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2011.

The theory of quasistationary processes and their prediction, generalizing the corresponding classical theory for stationary processes is constructed. For important class of such processes the explicit expressions of prediction in term of finite preceding values are found. To calculate these expressions one can perform $O(r \log_2 r)$ or $O(r)$ arithmetic operations, where r is the number of preceding values.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

сайт: www.keldysh.ru

Введение

Главная цель этой работы в том, чтобы найти явные выражения для прогнозирования квзистациорнарных случайных процессов. Теория прогнозирования стационарных случайных процессов была построена Колмогоровым и Винером ([1], [2]). Квазистационарные процессы, введённые здесь, есть обобщение стационарных. Они определяются, используя асимптотические свойства траекторий на бесконечности. Левинсон доказал ([3]), что проблема линейного прогнозирования случайных процессов с дискретным временем по конечному числу предыдущих значений процесса сводится к решению системы линейных уравнений с симметрической теплицевой матрицей, порядок которой равен числу этих предыдущих значений. Он также указал некоторый специфический способ решения этой системы, использующий $O(r^2)$ арифметических операций, где r — порядок матрицы. Заметим, что метод Гаусса решения системы с матрицей порядка r требует выполнения $O(r^3)$ арифметических операций. Проблема минимизации числа арифметических операций для большого числа предыдущих значений — важная в связи с тем, что в этом случае точность прогнозирования и скорость его вычисления улучшаются.

Работа состоит из двух частей. В настоящей работе (часть 1) построена теория квазистационарных процессов, доказаны основные свойства этих процессов, и найдено общее выражение для их прогнозирования. В части 2 для важного класса таких процессов (кусочно постоянные процессы) выведены явные выражения значений прогнозирования процесса по r предыдущим значениям, вычисления которых требуют выполнения $O(r \log r)$ или $O(r)$ арифметических операций.

Доказательства существенно используют свойства дискретного преобразования Фурье и теплицевых матриц, которые изучены в [4]–[8].

1 Определение и основные свойства квазистационарных стохастических процессов

Рассмотрим стохастиский процесс с дискретным временем $x = x(n)$, где $-\infty < n < \infty$, переменная n — целое число и характеризует время. Здесь $x(n) = x(n, \omega)$ — случайная величина, оперделённая на вероятностном пространстве (Φ, F, P), где $\omega \in \Phi$, Φ — пространство элементарных событий, F — σ-алгебра измеримых подмножеств пространства Φ, и P — вероятностная мера. Мы предполагаем, что для любых целых чисел n и m математические ожидания $Ex(n, \omega)$ и $E(x(n, \omega)x(n + m, \omega))$ — конечные.

Определение 1.1. Процесс $x = x(n)$ называется квазистационарным, если существует число M_x и функция $R_x(m)$ целого аргумента m такие, что выполняются следующие равенства:

1) $M_x = \lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ N\geqslant 1}} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} Ex(n,\omega) = \lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ N\geqslant 1}} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=-1}^{-N} Ex(n,\omega)$;

2) $R_x(m) = \lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ N\geqslant 1}} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1} E\big(x(n,\omega)x(n+m,\omega)\big) = \lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ N\geqslant 1}} \dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=-1}^{-N} E\big(x(n,\omega)x(n+m,\omega)\big)$.

Замечание 1.1. Из определения 1.1 следует, что если процесс $x = x(n)$ — квазистационарный, то

$$M_x = \lim_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}\sum_{n=N_1}^{N_2} Ex(n,\omega);$$

$$R_x(m) = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}\sum_{n=N_1}^{N_2} E\big(x(n,\omega)x(n+m,\omega)\big).$$

Определение 1.2. Пусть $x = x(n)$ — квазистационарный процесс, M_x и $R_x(m)$ — число и функция, введённые в определении 1.1. Тогда M_x и $R_x(m)$ назовём соответственно математическим ожиданием и корреляционной функцией процесса x. Будем считать, что M_x и $R_x(m)$ — параметры процесса x.

Замечание 1.2. Если $x = x(n)$ — стационарный процесс, то параметры M_x и $R_x(m)$ существуют и совпадают с величинами $Ex(n)$ и $E\big(x(n)x(n+m)\big)$ соответственно, которые не зависят от n.

Замечание 1.3. Из определения 1.1 следует, что $R_x(m)$ — чётная функция, то есть $R_x(m) = R_x(-m)$.

Пример 1.1. Пусть $u = u(n)$ и $v = v(n)$ — два стационарных процесса, такие что для любых целых чисел n, m выполнены неравенства $Eu \overset{\text{def}}{=} Eu(n) < \infty$, $Ev \overset{\text{def}}{=} Ev(n) < \infty$, $E\big(u(n)u(n+m)\big) < \infty$, $E\big(v(n)v(n+m)\big) < \infty$, $Eu(n) \neq Ev(n)$. Предположим, что процессы u, v стационарно связаны, то есть для любого целого m величина $E\big(u(n)v(n+m)$ не зависит от m.

Рассмотрим процесс $x = x(n)$, такой что

$$x(n) = \begin{cases} u(k), & \text{если} \quad n = 2k,\\ v(k), & \text{если} \quad n = 2k-1.\end{cases}$$

Процесс x не является стационарным, так как $Ex(n) \neq Ex(n+1)$. Однако он — квазистационарный с параметрами

$$M_x = \frac{1}{2}(Eu + Ev),$$
$$R_x(m) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(E\big(u(0)u(k)\big) + E\big(v(0)v(k)\big)\Big), & \text{если} \quad m = 2k, \\ \frac{1}{2}\Big(E\big(u(0)v(k)\big) + E\big(v(0)u(k)\big)\Big), & \text{если} \quad m = 2k-1. \end{cases}$$

Пример 1.2. Пусть $u = u(n)$ — стационарный процесс, такой что $Eu^2(n) \neq E\big(u(n)u(n+1)\big)$, p — натуральное число. Определим кусочно постоянный по модулю p процесс $x = x(n)$ следующим способом: если целое число n представлено в виде $n = pk + s$, где k, s — целые числа, $0 \leqslant s < p$, то $x(n) = u(k)$. Процесс $x = x(n)$ не является стационарным, так как функция $E\big(x(n)x(n+1)\big)$ от n не является константой. Однако процесс x — квазистационарный, $M_x = Eu$, и, как будет доказано в теореме 2.1 (секция 2), для процесса x существует корреляционная функция $R_x(m)$.

Лемма 1.1. Пусть $x = x(n)$ — квазистационарный процесс, c — вещественное число. Тогда процесс $y = y(n) = x(n) + c$ — квазистационарный с параметрами

$$M_y = M_x + c, \quad R_y(m) = R_x(m) + c^2 + 2cM_x.$$

Определение 1.3. Пусть $x = x(n)$ — квазистационарный процесс, и $y = y(n)$ — квазистационарный процесс, такой что $y(n) = x(n) - M_x$.

Тогда величина $D_x \stackrel{\text{def}}{=} R_y(0)$ называется дисперсией процесса x.

Как следствие леммы 1.1 получаем следующее утверждение.

Лемма 1.2. Справедливо равенство

$$D_y = R_x(0) - M_x^2,$$

где $y = y(n) = x(n) - M_x$.

Далее будут доказаны аналоги неравенств Чебышева для квазистационарных процессов.

Теорема 1.1. Пусть $x = x(n)$ — квазистационарный процесс, такой что для некоторого числа $n_0 \geqslant 1$ справедливо неравенство $x(n) \geqslant 0$, если $|n| \geqslant n_0$. Тогда для любого числа $t > 0$ и целых чисел N_1, N_2, удовлетворяющих условию $N_2 - N_1 \geqslant 0$, вероятности

$$P_{N_1,N_2} \stackrel{\text{def}}{=} P\left\{\omega \,\middle|\, \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n,\omega) \geqslant t\right\}$$

удовлетворяют неравенству

$$\varlimsup_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} P_{N_1,N_2} \leqslant \frac{M_x}{t}.$$

$\triangleright$ Введём случайную величину

$$\xi_{N_1,N_2}(\omega) = \frac{1}{N_2-N_1+1}\sum_{n=N_1}^{N_2} x(n,\omega).$$

Имеем:

$$P\left\{\omega\,\middle|\,\frac{1}{N_2-N_1+1}\sum_{n=N_1}^{N_2} x(n,\omega)\geqslant t\right\} = \int_{\omega|\xi_{N_1,N_2}\geqslant t} dP(\omega) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\omega|\xi_{N_1,N_2}\geqslant t}\frac{\xi_{N_1,N_2}(\omega)}{t}\,dP(\omega) = \frac{1}{t}\int_{\omega|\xi_{N_1,N_2}\geqslant t}\xi_{N_1,N_2}(\omega)\,dP(\omega). \quad (1.1)$$

Предполагая, что $N_1 < -n_0$, $N_2 > n_0$, и используя определение величины $\xi_{N_1,N_2}(\omega)$, получаем:

$$\xi_{N_1,N_2}(\omega) = \frac{2n_0+1}{N_2-N_1+1}\xi_{-n_0,n_0}(\omega)+\frac{1}{N_2-N_1+1}\left(\sum_{n=N_1}^{-n_0-1} x(n,\omega)+\sum_{n=n_0+1}^{N_2} x(n,\omega)\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{t}\int_{\omega|\xi_{N_1,N_2}\geqslant t}\xi_{N_1,N_2}(\omega)\,dP(\omega) = I_1(N_1,N_2)+I_2(N_1,N_2), \quad (1.2)$$

где

$$I_1(N_1,N_2) = \frac{1}{t}\int_{\omega|\xi_{N_1,N_2}\geqslant t}\frac{1}{N_2-N_1+1}\left(\sum_{n=N_1}^{-n_0-1} x(n,\omega)+\sum_{n=n_0+1}^{N_2} x(n,\omega)\right)dP(\omega),$$
$$I_2(N_1,N_2) = \frac{2n_0+1}{t(N_2-N_1+1)}\int_{\omega|\xi_{N_1,N_2}\geqslant t}\xi_{-n_0,n_0}(\omega)\,dP(\omega).$$

Далее имеем:

$$\lim_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} I_2(N_1,N_2) = 0, \quad (1.3)$$

и согласно условию теоремы 1.1, если удовлетворяются условия $n_0 \leqslant n \leqslant N_2$, $N_1 \leqslant n \leqslant -n_0$, то справедливо неравенство $x(n,\omega) \geqslant 0$. Следовательно,

$$I_1(N_1,N_2) \leqslant \frac{M_{N_1,N_2}}{t}, \quad (1.4)$$

где

$$M_{N_1,N_2} = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}\left(\sum_{n=N_1}^{-n_0-1} Ex(n,\omega) + \sum_{n=n_0+1}^{N_2} Ex(n)\right). \qquad (1.5)$$

Из замечания 1.1 и (1.5) следует, что

$$\lim_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} M_{N_1,N_2} = M_x. \qquad (1.6)$$

Поэтому, переходя к пределу при $N_1 \to -\infty$, $N_2 \to +\infty$ в равенстве (1.2) и используя (1.3), (1.4) и (1.6) получаем:

$$\varlimsup_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_{\omega|\xi_{N_1,N_2}\geqslant t} \xi_{N_1,N_2}(\omega)\, dP(\omega) \leqslant \frac{M_x}{t}.$$

В силу (1.1) из этого неравенства следует утверждение теоремы 1.1. Теорема 1.1 доказана. $\triangleleft$

Теорема 1.2. Предположим, что $x = x(n)$ — квазистационарный процесс, и для любого числа $t > 0$ и произвольных целых чисел N_1, N_2, удовлетворяющих условию $N_2 - N_1 \geqslant 0$ введём вероятности

$$Q_{N_1,N_2} = P\bigl\{\omega \bigm| |x(n) - M_x| \geqslant t; N_1 \leqslant n \leqslant N_2\bigr\}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} Q_{N_1,N_2} \leqslant \frac{D_x}{t^2}.$$

$\triangleright$ Имеем:

$$Q_{N_1,N_2} = P\bigl\{\omega \bigm| \bigl(x(n) - M_x\bigr)^2 \geqslant t^2; N_1 \leqslant n \leqslant N_2\bigr\}.$$

Поэтому

$$Q_{N_1,N_2} \leqslant P\left\{\omega \,\middle|\, \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}\sum_{n=N_1}^{N_2} \bigl(x(n) - M_x\bigr)^2 \geqslant t^2\right\}. \qquad (1.7)$$

Рассмотрим процесс $y = y(n) = \bigl(x(n) - M_x\bigr)^2$ $(n \in \mathbb{Z})$. Так как процесс x — квазистационарный, то в силу определения 1.3 математическое ожидание M_y процесса $y(n)$ и дисперсия процесса $x(n)$ связаны между собой равенством $M_y = D_x$, и согласно лемме 1.2 $M_y < \infty$. Поэтому, заменяя процесс $x(n)$ на процесс $y(n)$, число t на число t^2 и применяя доказательство теоремы 1.1 к процессу $y(n)$ получим утверждение теоремы 1.2.Теорема 1.2 доказана. $\triangleleft$

Лемма 1.3. Если процесс $x = x(n)$ — квазистационарный, то для любых целых чисел $k_1, \dots, k_r$ и любых вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ процесс $y = y(n) = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s x(n + k_s)$ — также квазистационарный с параметрами

$$M_y = M_x \sum_{s=1}^{r} \alpha_s,$$
$$R_y(m) = \sum_{\substack{v=1,\dots,r \\ j=1,\dots,r}} R_x(m + k_j - k_v)\alpha_v \alpha_j.$$

Определение 1.4. Два процесса $x = x(n)$ и $y = y(n)$, определённые на вероятностном пространстве (Φ, F, P), называются взаимно квазистационарными, если для любых целых чисел m, s математическое ожидание $E\big(x(m)y(s)\big) < \infty$ и если существует функция

$$R_{xy}(m) = \lim_{\substack{N \to +\infty \\ N \geqslant 1}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E\big(x(n)y(n+m)\big) = \lim_{\substack{N \to +\infty \\ N \geqslant 1}} \frac{1}{N} \sum_{n=-1}^{-N} E\big(x(n)y(n+m)\big).$$

Замечание 1.4. Если два процесса x и y — взаимно квазистационарные, то

$$R_{xy}(m) = \lim_{\substack{N_1 \to +\infty, \\ N_2 \to +\infty}} \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} E\big(x(n)y(n+m)\big).$$

Замечание 1.5. Если процессы x и y — взаимно квазистационарные, то процессы y и x также взаимно квазистационарные и справедливо равенство

$$R_{xy}(m) = R_{yx}(-m), \quad R_{xx}(m) = R_x(m) = R_x(-m) = R_{xx}(-m).$$

Лемма 1.4. Пусть квазистационарные процессы $x = x(n)$, $y = y(n)$ — взаимно квазистационарные. Тогда процесс $z = z(n) = x(n) - y(n)$ — квазистационарный с параметрами

$$M_z = M_x - M_y,$$
$$R_z(m) = R_x(m) + R_y(m) - R_{xy}(m) - R_{yx}(-m).$$

Теорема 1.3. Предположим, что процесс $x = x(n)$ — квазистационарный, $k_1, \dots, k_r$ — целые числа, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — вещественные числа. Тогда процесс $z = z(n) = x(n) - \sum_{x=1}^{r} \alpha_s x(n+k_s)$ — квазистационарный с параметрами

$$M_z = M_x\big(1 - \sum_{s=1}^{r} \alpha_s\big),$$

$$R_z(m) = R_x(m) + \sum_{\substack{v=1,\dots,r\\ j=1,\dots,r}} R_x(m + k_j - k_v)\alpha_v\alpha_j -$$

$$- \sum_{s=1}^{r} R_x(m+k_s)\alpha_s - \sum_{s=1}^{r} R_x(-m+k_s)\alpha_s.$$

▷ Рассмотрим процесс $y = y(n) = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s x(n+k_s)$. Тогда $z(n) = x(n) - y(n)$, и применяя леммы 1.3, 1.4 и замечания 1.1 и 1.4 получим утверждение теоремы 1.3. Теорема 1.3 доказана. ◁

2 Кусочно-постоянно коррелированные стохастические процессы и их корреляционные функции

В этой секции рассматриваются квазистационарные процессы, которые являются кусочно-постоянно коррелированы по модулю некоторого натурального числа.

Обозначение 2.1. Если δ — вещественное число, то целая часть δ обозначается через $[\delta]$.

Определение 2.1. Пусть p — натуральное число. Процесс $x = x(n)$ называется кусочно-постоянно коррелированным по модулю p, если для любых четырёх целых чисел n_1, n_2, n_1', n_2', таких что $\left[\dfrac{n_1}{p}\right] = \left[\dfrac{n_1'}{p}\right]$, $\left[\dfrac{n_2}{p}\right] = \left[\dfrac{n_2'}{p}\right]$, справедливо равенство

$$E\big(x(n_1)x(n_2)\big) = E\big(x(n_1')x(n_2')\big).$$

Замечание 2.1. Произвольный процесс является кусочно-постоянно коррелированным по модулю 1 ($p = 1$).

Замечание 2.2. Кусочно-постоянный по модулю p процесс, введённый в примере 1.2 (секция 1), является кусочно-постоянно коррелированным по модулю p.

Теперь укажем пример кусочно-постоянно коррелированного по модулю p процесс, который не является кусочно-постоянным по модулю p процессом.

Пример 2.1. Пусть $x = x(n)$ — процесс, такой что $x(n) = y(n) + z(n)$, где $y(n)$ — кусочно-постоянный по модулю p процесс из примера 1.2, и $z = z(n)$ — процесс, такой что для любых различных целых чисел n, m справедливы равенства $E\big(z(n)z(m)\big) = 0$, $E\big(y(n)z(m)\big) = 0$. Тогда, если процесс x — кусочно-постоянно коррелированный по модулю p, и если процесс $z(n)$ не является кусочно-постоянным по модулю p, то и процесс $x(n)$ не является кусочно-постоянным по модулю p.

Лемма 2.1. Предположим, что процесс $x = x(n)$ — квазистационарный и кусочно-постоянно коррелированный по модулю p. Тогда для любого целого числа r существует функция

$$\Gamma(r) = \lim_{\substack{N_1 \to -\infty \\ N_2 \to +\infty}} \frac{1}{(N_2 - N_1 + 1)p} \sum_{n=N_1}^{N_2} E\big(x(np)x(np + rp)\big), \tag{2.1}$$

и $\Gamma(r)$ связана с корреляционной функцией $R_x(m)$ процесса x с помощью равенства

$$\Gamma(r) = \frac{1}{p} R_x(pr).$$

$\triangleright$ Для любых целых чисел N_1, N_2, s, удовлетворяющих неравенствам $N_1 \leqslant N_2$, $0 \leqslant s < p$, введём величину

$$\Gamma_{s,N_1,N_2}(r) = \frac{1}{(N_2 - N_1 + 1)p} \sum_{n=N_1}^{N_2} E\big(x(np + s)x(np + rp + s)\big). \tag{2.2}$$

Тогда имеем:

$$\sum_{s=0}^{p-1} \Gamma_{s,N_1,N_2}(r) = \frac{1}{(1 + N_2)p - 1 - pN_1 + 1} \sum_{n=pN_1}^{(1+N_2)p-1} E\big(x(n)x(n + rp)\big). \tag{2.3}$$

а в силу определения 2.1

$$\Gamma_{s,N_1,N_2}(r) = \Gamma_{0,N_1,N_2}(r), \quad (0 \leqslant s < p). \tag{2.4}$$

Поэтому согласно замечанию 1.1 и равенствам (2.1)–(2.4)

$$R_x(pr) = \lim_{\substack{N_1 \to -\infty \\ N_2 \to +\infty}} \sum_{s=0}^{p-1} \Gamma_{s,N_1,N_2}(r) = p \sum_{\substack{N_1 \to -\infty \\ N_2 \to +\infty}} \Gamma_{0,N_1,N_2}(r) = p\Gamma(r).$$

Лемма 2.1 доказана. $\triangleleft$

Теорема 2.1. Предположим, что процесс $x = x(n)$ — квазистационарный и кусочно-постоянно коррелированный по модулю p, а $\Gamma(r)$ — функция, введённая в (2.1). Тогда, если целое число m удовлетворяет неравенствам

$$pr \leqslant m \leqslant p(r + 1), \tag{2.5}$$

то значение корреляционной функции $R_x(m)$ процесса x имеет вид

$$R_x(m) = (p - m + pr)\Gamma(r) + (m - pr)\Gamma(r + 1).$$

$\triangleright$ Пусть N_1 и N_2 — целые числа, $N_1 \leqslant N_2$. В силу определения 2.1 и (2.5) имеем:

$$\sum_{n=pN_1}^{(1+N_2)p-1} E\bigl(x(n)x(n+m)\bigr) = (p - m + pr)\sum_{n=N_1}^{N_2} E\bigl(x(np)x(np+rp)\bigr) + \\ + (m - pr)\sum_{n=N_1}^{N_2} E\bigl(x(np)x(np+rp+p)\bigr).$$

Поэтому из (2.1) и (2.5) следует, что

$$R_x(m) = \lim_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} \frac{1}{(1+N_2)p - 1 - pN_1 + 1}\sum_{n=pN_1}^{(1+N_2)p-1} E\bigl(x(n)x(n+m)\bigr) = \\ = (p - m + pr)\lim_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}\sum_{n=N_1}^{N_2} E\bigl(x(np)x(np+rp)\bigr) + \\ + (m - pr)\lim_{\substack{N_1\to-\infty\\ N_2\to+\infty}} \frac{1}{N_2 - N_1 + 1}\sum_{n=N_1}^{N_2} E\bigl(x(np)x(np+rp+p)\bigr) = \\ = (p - m + pr)\Gamma(r) + (m - pr)\Gamma(r + 1).$$

Теорема 2.1 доказана. $\triangleleft$

Следствие 2.1. Предположим, что процесс $x = x(n)$ — квазистационарный и кусочно-постоянно коррелированный по модулю p. Тогда для любого целого числа $r \geqslant 0$ корреляционная функция $R_x(m)$ — линейная на отрезке $pr \leqslant m \leqslant p(r+1)$ и

$$R_x(pr + s) - R_x(pr + s + 1) = \Gamma(r) - \Gamma(r + 1) \quad (0 \leqslant s \leqslant p - 1).$$

3 Прогнозирование квазистационарных процессов по конечному числу предыдущих значений

Предположим, что $k_0, \ldots, k_{r-1}$ — попарно различные натуральные числа. Задача линейного прогнозирования процесса $x(n)$ по значениям $x(n-k_0), \ldots, x(n-k_{r-1})$ состоит в нахождении величин $\hat{x}(n) = \sum_{s=0}^{r-1} a_s x(n - k_s)$, таких что значение $F(c_1, \ldots, c_r) \stackrel{\text{def}}{=} R_z(0)$ корреляционной функции $R_z(m)$ при $m = 0$

процесса $z = z(n) = x(n) - \sum_{s=0}^{r-1} c_s x(n-k_s)$ достигает минимума при $c_0 = a_0, \ldots, c_{r-1} = a_{r-1}$.

Замечание 3.1. В случае стационарного процесса $x(n)$ это определение совпадает с классическим определением прогнозирования по конечному числу предыдущих значений ([1]–[3]).

Теорема 3.1. Если $\hat{x}(n) = \sum_{s=0}^{r-1} a_s x(n-k_s)$ — значения прогнозирования процесса $x(n)$, то вектор $a = (a_0, \ldots, a_{r-1})$ с координатами $a_0, \ldots, a_{r-1}$ является решением линейной алгебраической системы уравнений

$$Aa = b, \tag{3.1}$$

где

$$A = (a_{vj}) = \begin{pmatrix} R_x(0), R_x(k_2-k_1), \ldots, R_x(k_r-k_1) \\ R_x(k_1-k_2), R_x(0), \ldots, R_x(k_r-k_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_x(k_1-k_r), R_x(k_2-k_r), \ldots, R_x(0) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

есть матрица порядка r $(v, j = 0, \ldots, r-1)$, элементы которой a_{vj} имеют вид $a_{vj} = R_x(k_j - k_v)$, и $b = (b_0, \ldots, b_{r-1})$ — r-мерный вектор с координатами $b_s = R_x(k_s)$ $(s = 0, \ldots, r-1)$.

$\triangleright$ Согласно теореме 1.3 значение $R_z(0)$ функции $R_z(m)$ имеет вид

$$R_z(0) = R_x(0) + \sum_{s=0}^{r-1} R_x(0) c_s^2 + 2 \sum_{\substack{v,j \\ v<j}} R_x(k_j - k_v) c_v c_j - 2 \sum_{s=0}^{r-1} R_x(k_s) c_s. \tag{3.3}$$

Так как функция $F(c_0, \ldots, c_{r-1}) = R_z(0)$, введённая в начале этой секции, имеет единственный экстремум, то необходимое и достаточное условие для нахождения её минимума есть справедливость равенств

$$\frac{\partial F}{\partial c_s} = 0, \quad (s = 0, \ldots, r-1).$$

Подставляя (3.3) в эти равенства, получим утверждение теоремы 3.1. Теорема 3.1 доказана. $\triangleleft$

Специальный, но очень важный случай общего понятия прогнозирования процесса $x = x(n)$ на $N \geqslant 1$ вперёд по r предыдущим значениям ([1]–[3]) состоит в нахождении величин

$$\hat{x}(n) = \sum_{s=0}^{r-1} a_s x(n-N-s),$$

таких что значение $F(c_0, \ldots, c_{r-1}) \stackrel{\text{def}}{=} R_z(0)$ корреляционной функции $R_z(m)$ при $m = 0$ процесса $z = z(n) = x(n) - \sum_{s=0}^{r-1} c_s x(n-N-s)$ достигает минимума при $c_0 = a_0, \ldots, c_{r-1} = a_{r-1}$.

Определение 3.1. Матрица $A = (a_{vj})$ $(v, j = 0, \dots, r-1)$ порядка r называется тёплицевой, если $a_{vj} = a_{kl}$ при выполнении равенств $v-j = k-l$.

Замечание 3.2. Симметрическая тёплицева матрица $A = (a_{vj})$ однозначно определяется своей верхней строкой $(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0,r-1})$.

Замечание 3.3. Матрица $A = (a_{vj})$ в теореме 3.1 есть симметрическая тёплицева матрица.

Замечание 3.3 вытекает из замечания 3.2 и замечания 1.5.

Следствие 3.1. Если $\hat{x}(n) = \sum_{s=0}^{r-1} a_s x(n-N-s)$ — значения прогнозирования процесса $x(n)$ на N шагов вперёд по r предыдущим значениям, то вектор $a = (a_0, \dots, a_r)$ с координатами $a_0, \dots, a_{r-1}$ есть решение линейной алгебраической системы уравнений $Aa = b$, где $A = (a_{vj})$ — симметрическая тёплицева матрица порядка r $(v, j = 0, \dots, r-1)$, у которой верхняя строка $(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0,r-1})$ имеет вид $a_{0s} = R_x(s)$ $(s = 0, \dots, r-1)$, и $b = (b_0, \dots, b_{r-1})$ — r-мерный вектор с координатами $b_s = R_x(N+s)$.

Список литературы

[1] А. Н. Колмогоров. Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР, сер. матем. 5 (1941), 3–14.

[2] N. Wiener. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series with engineering applications // The Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, Cambridge; John Wiley and Sons, New York; Chapman and Hall, London, 1949.

[3] N. Levinson. The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction // J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. 25 (1947), 261–278.

[4] Л./. Д. Пустыльников. Об алгебраической структуре пространств теплицевых и ганкелевых матриц // ДАН СССР, 250 (1980), 556–559.

[5] Л./ Д. Пустыльников. О быстрых вычислениях в некоторых задачах линейной алгебры, связанных с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // УМН 35:5 (1980), 241–242.

[6] Л./. Д. Пустыльников. Теплицевы и ганкелевы матрицы и их применения // УМН, 39:4 (1984), 53–84.

[7] Л./. Д. Пустыльников и Т. В. Локоть. Параллельные вычисления с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // Кибернетика и вычислительная техника, том 4 (1988), 96–21.

[8] А. Д. Пустыльников и Т. В. Локоть. Алгебраические структуры, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами // Препринт ИПМ, № 60, 2010.