ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 25 за 2011 г.

Горючкина И. В.

Теорема о сходимости формального решения ОДУ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И. В. Горючкина

ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДУ

Москва, 2011 г.

УДК 517.91

И. В. Горючкина. Теорема о сходимости формального решения ОДУ. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Здесь представлено доказательство теоремы, сформулированной в более общем виде А.Д. Брюно в статье журнала ”Успехи математических наук” (2004 г.). Доказательство проводится для формального решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида, которое имеет вид степенного ряда с комплексными показателями степени независимой переменной и постоянными коэффициентами. Здесь рассматривается случай, когда множество показателей степени ряда имеют одну комплексную образующую. Теорема доказывается при помощи метода мажорант и новых приемов, использующих методы плоской и трехмерной степенной геометрии.

I. V. Goryuchkina. Theorem on convergence of a formal solution of ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2011.

Here is presented a proof of the theorem, which was formulated in more general form by A.D. Bruno in the paper in ”Russian Mathematical Surveys” (2004). Proof is realized for formal solution of non-linear ordinary differential equation in general form, which is the series with complex power exponents and constant coefficients. Here we consider the case of the one complex generatrix in the set of power exponents of the series. Theorem is proved by the majorant method and new approaches using methods of plain and three-dimensional Power Geometry.

§1. Асимптотические ряды с комплексными показателями степени

Пусть $x \in \mathbb{C}$. Напомним, что функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) \tag{1}$$

называется *асимптотическим* в окрестности точки $x = 0$ для функции $y(x)$ [1], если при $x \to 0$ выполнены условия:

$$y(x) - \sum_{k=0}^{m} \psi_k(x) = o(\psi_m(x)),$$

$$\psi_{k+1}(x) = o(\psi_k(x)).$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\, x^{s_k}, \tag{2}$$

где c_k, $s_k \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s_k - s_0) \geqslant 0$, $s_k - s_0 \in \mathbf{K} \subset \mathbb{C}$, $\mathbf{K}$ – конечнопорожденная аддитивная полугруппа с образующими, вещественные части которых неотрицательны, число показателей степени s_k с одинаковой вещественной частью $\mathrm{Re} s_k$ конечно, $-\infty < \mathrm{Re} s_k \leqslant \mathrm{Re} s_{k+1}$, и если $\mathrm{Re} s_k = \mathrm{Re} s_{k+1}$, то $\mathrm{Im} s_k < \mathrm{Im} s_{k+1}$.

Множество целых неотрицательных чисел обозначим $\mathbb{Z}_+$.

Если для коэффициентов c_k ряда (2) и вещественных неотрицательных коэффициентов C_k ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k\, x^{s_k}, \tag{3}$$

(s_k те же, что и в формуле (2)) выполняются неравенства

$$C_k \geqslant |c_k| \text{ для любого } k \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

то будем говорить, что ряд (3) *мажорирует* ряд (2).

Продифференцируем ряд (3) n раз, получим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k s_k \cdot \ldots \cdot (s_k - n + 1)\, x^{s_k - n}. \tag{5}$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k |s_k \cdot \ldots \cdot (s_k - n + 1)|\, x^{s_k - n} \tag{6}$$

будем называть *ассоциированным рядом* с рядом (5).

Очевидно, что если коэффициенты c_k и C_k удовлетворяют неравенствам (4), то ряд (6) мажорирует продифференцированный n раз ряд (2) в указанном смысле.

Отметим, что здесь весьма важен тот факт, что $s_k - s_0 \in \mathbf{K}$. Поскольку в этом случае ряды (2), (3), (5) и (6) одной переменной x с комплексными показателями степени можно записать в виде ряда многих переменных, но с целыми показателями степени. Такие ряды хорошо изучены и понятие мажорантного ряда имеет классический смысл (см. [2] и [3]).

Например, рассмотрим ряд

$$\sum_M c_M \, x^{m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2}, \tag{7}$$

где $M = (m_1, m_2)$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$, c_M, γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\gamma_1$, $\operatorname{Re}\gamma_2 > 0$.

Положим

$$\xi_1 = x^{\gamma_1}, \xi_2 = x^{\gamma_2}. \tag{8}$$

Если ряд

$$\sum_M c_M \, \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2} \tag{9}$$

сходится равномерно для достаточно малых $|\xi_1|$ и $|\xi_2|$, то ряд (7) сходится равномерно для достаточно малых $|x|$.

§2. Некоторые понятия степенной геометрии [4]

Дифференциальной суммой $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ называется сумма слагаемых вида

$$\alpha x^{q_1} y^{q_{20}} (xy')^{q_{21}} \cdot \ldots \cdot (x^n y^{(n)})^{q_{2n}}, \tag{10}$$

где $\alpha,\ q_1 \in \mathbb{C},\ q_{20}, \dots, q_{2n} \in \mathbb{Z}_+$.

Каждому слагаемому вида (22) дифференциальной суммы $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ ставится в соответствие (*векторный*) *показатель степени* $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Z}_+$, $q_2 = q_{20} + \dots + q_{2n}$.

Множество $\mathbf{S}'(f)$ показателей степени всех слагаемых дифференциальной суммы $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ называется *комплексным носителем дифференциальной суммы* $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$.

Проекцию комплексного носителя $\mathbf{S}'(f)$ дифференциальной суммы $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ на вещественную плоскость $(\operatorname{Re} q_1,\ q_2)$ будем называть *вещественным носителем* дифференциальной суммы $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ и обозначать $\mathbf{S}(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_+$.

Выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ множества $\mathbf{S}(f)$ называется *многоугольником дифференциальной суммы* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$.

§3. Постановка задачи

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{11}$$

где $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ – это многочлен своих переменных.

Пусть при $|x| \to 0$, $|\arg(x)| \leqslant \pi$, уравнение (11) имеет формальное решение

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s_k}, \tag{12}$$

где $c_k,\, s_k \in \mathbb{C}$, $s_k - s_0 \in \mathbf{K} \subset \mathbb{C}$

$$\mathbf{K} = \{m_1 r_1 + m_2 r_2,\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{13}$$

$\mathbf{K}$ не имеет точек накопления в конечной части комплексной плоскости,

$$\begin{gathered} s_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q},\ \ r_1 = \langle R_1,\, (1, s_0)\rangle,\ r_2 = \langle R_2,\, (1, s_0)\rangle, \\ R_1 = (\alpha_1,\, \beta_1),\ R_2 = (\alpha_2,\, \beta_2),\ R_1,\, R_2 \in \mathbb{Q}^2, \end{gathered} \tag{14}$$

при этом R_1 и R_2 взяты в таком порядке, что

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} > 0, \tag{15}$$

$\operatorname{Re} s_k \geqslant \operatorname{Re} s_0$, $\operatorname{Re} s_k$ возрастают, количество показателей степени s_k с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s_k$ конечно, Занумеруем показатели степени s_k в порядке возрастания их вещественных частей $\operatorname{Re} s_k$: $\operatorname{Re} s_0 \leqslant \operatorname{Re} s_1 \leqslant \operatorname{Re} s_2 \leqslant \ldots$.

Векторы R_1 и R_2 образуют базис носителя $\mathbf{S}(f)$, т. е. $\mathbf{S}(f) \subset \{Q + M_1 R_1 + M_2 R_2,\ M_1,\, M_2 \in \mathbb{Z}_+\} \subset \mathbb{Z}^2$, $Q \in \mathbb{Z}^2$.

Сделаем в уравнении (11) замену зависимой переменной

$$y = \sum_{k=0}^{m} c_k x^{s_k} + u, \tag{16}$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{Re}(s_m - s_0) \geqslant n$, s_k и c_k из формулы (12), после которой согласно [4] уравнение (11) принимает специальный вид

$$f_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x) u + g(x, u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0, \tag{17}$$

где $\mathcal{L}(x)$ – это линейный дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L}(x) = x^v \sum_{l=1}^{n} a_l x^l \frac{d^l}{dx^l}, \tag{18}$$

$\mathcal{L}(x) \not\equiv 0$, v, $a_l \in \mathbb{C}$, $\mathbf{S}(\mathcal{L}(x)u) = (v,1)$ и $(\operatorname{Re} v, 1)$ – это вершина многоугольника $\Gamma(f_0)$. Функция g может содержать члены, зависящие только от x, члены линейные по $u, u', \ldots, u^{(n)}$, т.е. члены вида $b_0 x^{v_1+m} \dfrac{d^m u}{dx^m}$ с $\operatorname{Re} v_1 > \operatorname{Re} v$, $v_1 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant m \leqslant n$, $b_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$ и нелинейные по $u, u', \ldots, u^{(n)}$ члены.

Может случиться, что после замены переменной (16) в уравнении (11), полученное уравнение не принимает специальный вид (17), т. е. линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x) \equiv 0$. Здесь возможны два случая.

В первом случае в уравнении (17) линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x) \equiv 0$ при любой длине m начального отрезка $\sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^{s_k}$ ряда (12) в замене (16). Это означает, что ряд (12) является кратным решением уравнения (11). Этот случай здесь не рассматриваем.

Во втором случае при длине $m < N$, $N \in \mathbb{N}$, начальной части $\sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^{s_k}$ ряда (12) в замене (16) линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x) \equiv 0$, а при $m \geqslant N$ – линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x) \not\equiv 0$ и имеет вид (18), т. е. в замене (16) нужно взять начальный отрезок $\sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^{s_k}$ ряда (12) длины $m \geqslant N$.

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x)$ имеет характеристические числа λ_i, $i = 1 \ldots, n$, которые можно упорядочить по возрастанию вещественных частей $\operatorname{Re} \lambda_1 \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \lambda_n$. Напомним, что число λ называется *характеристическим числом* линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}(x)$, если оно удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}(x)x^\lambda = 0$. При этом $\mathcal{L}(x)x^\lambda = x^{v+\lambda}\nu(\lambda)$, где $\nu(\lambda)$ – характеристический многочлен. Таким образом, корни λ_i, $i = 1 \ldots, n$ характеристического уравнения $\nu(\lambda) = 0$ являются характеристическими числами линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}(x)$. Характеристическое число λ_i с $\operatorname{Re} \lambda_i > \operatorname{Re} s_0$ называется *критическим числом* разложения (12).

Носитель разложения (12) имеет две образующие r_1 и r_2, зависящие от s_0. Разложение (12) имеет носитель вида (16): 1) если оператор $\mathcal{L}(x)$ не имеет критических чисел; 2) если оператор $\mathcal{L}(x)$ имеет критические числа $\lambda_i - s_0 \notin \mathbf{K}$ и в разложении (12) коэффициенты $c_k = 0$ с $s_k = \lambda_i$; 3) если оператор $\mathcal{L}(x)$ имеет критические числа $\lambda_i - s_0 \in \mathbf{K}$ и в разложении (12) коэффициенты c_k с $s_k = \lambda_i$ – это произвольные постоянные.

Если в разложении (12) есть произвольные постоянные, то при $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant \operatorname{Re}s_m$ все они содержатся в сумме $\sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^{s_k}$ замены (16). Если $\operatorname{Re}\lambda_i > \operatorname{Re}s_m$, то в замене (16) необходимо увеличить длину отрезка $\sum\limits_{k=0}^{m} c_k x^{s_k}$ ряда (12) до члена $s_m = \lambda_n$. Тогда при $|x| \to 0$, $|\arg(x)| \leqslant \pi$ уравнение (17) имеет формальное решение

$$u = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^{s_k}, \tag{19}$$

где c_k и s_k те же, что и в формуле (12) и $\operatorname{Re}s_k > n$, $\operatorname{Re}s_k > \operatorname{Re}\lambda_n$.

Теорема [4]. *Если в уравнении* (17)*, которое получается из уравнения* (11) *после замены переменной* (16)*, порядок старшей производной в* $\mathcal{L}(x)u$ *равен порядку старшей производной во всем уравнении, тогда ряд* (19) *равномерно сходится для достаточно малых* $|x|$ *и* $|\arg x| \leqslant \pi$.

Замечание. Здесь рассматривается случай, когда $s_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$, т. е. s_0 может быть и вещественным. Случай $s_0 \in \mathbb{Q}$ рассмотрен в [5].

§4. Доказательство

Сделаем в уравнении (17) преобразование

$$u = x^{s_0} w, \tag{20}$$

после которого оно примет вид

$$f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_1(x)w + g_1(x, w, w', \ldots, w^{(n)}) = 0. \tag{21}$$

Уравнение (21) аналогично уравнению (17). Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}_1(x) \not\equiv 0$ имеет вид

$$\mathcal{L}_1(x) = x^{v+s_0} \sum_{l=1}^{n} a_l x^l \frac{d^l u}{dx^l}, \tag{22}$$

функция g_1 может содержать члены, зависящие только от x, члены линейные по $w, w', \ldots, w^{(n)}$, т.е. члены вида $b_1 x^{v_1+s_0+m} \dfrac{d^m w}{dx^m}$ с $\operatorname{Re}v_1 > \operatorname{Re}v$, $v_1 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant m \leqslant n$, $b_1 = \text{const} \in \mathbb{C}$ и нелинейные по $w, w', \ldots, w^{(n)}$ члены.

Поскольку $s_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, то в дифференциальную сумму f_1 входят дифференциальные мономы, содержащие x в комплексных степенях, а $w,\, w',\, \ldots,\, w^{(n)}$ в целых неотрицательных степенях. Таким образом, комплексный носитель уравнения (21) $\mathbf{S}'(f_1) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{Z}_+$.

Вещественный носитель уравнения (21) обладает свойствами:

1. $\mathbf{S}(\mathcal{L}_1(x)w) = (\operatorname{Re} v + \operatorname{Re} s_0,\ 1)$;
2. $(\operatorname{Re} v + \operatorname{Re} s_0,\ 1)$ – вершина многоугольника $\Gamma(f_1)$;
3. $\mathbf{S}(f_1) \subset \{q_1 \geqslant \operatorname{Re} v + \operatorname{Re} s_0,\ q_2 \geqslant 0\}$;
4. $\mathbf{S}(g_1) \bigcap \{q_2 = 1\} \subset \{q_1 > \operatorname{Re} v + \operatorname{Re} s_0\}$;
5. $\mathbf{S}(g_1) \bigcap \{q_2 = 0\} \subset \{q_1 \geqslant \operatorname{Re} v + \operatorname{Re} s_{m+1}\}$,

(23)
где $\operatorname{Re} s_{m+1} > \operatorname{Re} \lambda_n$ и $\operatorname{Re}(s_{m+1} - s_0) > n$.

При $|x| \to 0$, $|\arg(x)| \leqslant \pi$ уравнение (21) имеет формальное решение

$$w = \sum_{k=m+1}^{\infty} c_k x^{s_k - s_0}, \tag{24}$$

где $s_k - s_0 \in \mathbf{K} \subset \mathbb{C}$, $\mathbf{K}$ определено формулой (13), c_k те же, что и в разложении (19).

Линейному дифференциальному оператору (22) соответствует характеристический многочлен $\nu_1(\tilde{\lambda}) = \nu(\lambda + s_0)$. Он имеет вид $\nu_1(\tilde{\lambda}) = \mathrm{a}_n\,(\tilde{\lambda} - \lambda_1 + s_0)(\tilde{\lambda} - \lambda_2 + s_0) \cdot \ldots \cdot (\tilde{\lambda} - \lambda_n + s_0)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – это корни характеристического многочлена $\nu(\lambda)$ линейного дифференциального оператора (18), $\mathrm{a}_n = \mathrm{const} \neq 0$. Пусть $\mathrm{a}_n \neq 1$. Разделив уравнение (21) на a_n, получаем такое уравнение, в котором $\mathrm{a}_n = 1$. Будем считать, что это справедливо для самого уравнения (21).

Далее рассмотрим ряд

$$W = \sum_{s=s_{m+1}}^{\infty} C_k x^{s - s_0}, \tag{25}$$

где $c_k \in \mathbb{R},\ C_k \geqslant |c_k| \geqslant 0$, $s_k - s_0$ те же, что и в (24).

Продифференцируем ряд (25) n раз и получим ряд

$$W^{(n)} = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k\,(s_k - s_0 - n + 1) \cdot \ldots \cdot (s_k - s_0)\; x^{s_k - s_0 - n}. \tag{26}$$

Согласно §1 *ассоциированный ряд* с рядом (26) имеет вид

$$\tilde{W} = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_k\,|(s_k - s_0 - n + 1) \cdot \ldots \cdot (s_k - s_0)|\; x^{s - s_0 - n}. \tag{27}$$

Если выполняются неравенства $C_k \geqslant |c_k| > 0$, то ряд (25) мажорирует ряд (24), а ряд (27) мажорирует n раз продифференцированный ряд (24) в смысле §1.

Построим уравнение

$$f_2 \overset{\text{def}}{=} \sigma x^{n+v+s_0}\tilde{W} - G_1(x,\, \tilde{W}) = 0, \tag{28}$$

где $\sigma = \text{const} \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, для которого разложение (27) является формальным решением и мажорирует n-тую производную ряда (24). Для этого запишем уравнение (21) в виде

$$\mathcal{L}_1(x)w = -g_1(x,\, w,\, w', \ldots, w^{(n)}). \tag{29}$$

Рассмотрим левую часть уравнения (29). Напомним, что

$$\mathcal{L}_1(x)x^{s_k} = x^{s_k+s_0+v}\nu_1(s_k - s_0),$$

а

$$x^{v+n}\frac{d^n}{dx^n}x^{s_k} = |(s_k - s_0)(s_k - s_0 - 1)\ldots(s_k - s_0 - n + 1).$$

Поскольку $\mathrm{Re}(s_k - s_0) > n$ и $\mathrm{Re}\, s_k > \mathrm{Re}\, \lambda_n$, то существует $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ такое, что

$$|\nu_1(s_k - s_0)| \geqslant \sigma|(s_k - s_0)(s_k - s_0 - 1)\ldots(s_k - s_0 - n + 1)|. \tag{30}$$

Теперь по функции $-g_1$ построим функцию $G_1(x,\, \tilde{W})$ следующим образом.

Сначала в дифференциальной сумме $-g_1$ заменим все коэффициенты на их модули, а затем заменим функцию w и все ее производные $w^{(k)}$ на выражения $x^{n-k}\tilde{W}$, где $\tilde{W}$ – это ряд (27), ассоциированный с рядом (26):

$$w^{(k)} \longrightarrow x^{n-k}\tilde{W},\ n \geqslant k \geqslant 0, \tag{31}$$

Заметим, что если $w = x^r$, $r \in \mathbb{C}$, где $\mathrm{Re}\, r > n$, $|x| > 0$, то $w^{(k)} = r(r-1)\ldots(r-k+1)\, x^{r-k}$, а $x^{n-k}w^{(n)} = r(r-1)\ldots(r-n+1)\, x^{r-k}$; т. е. во втором случае модуль коэффициента не меньше, чем модуль коэффициента в первом случае, а показатели степени совпадают.

Если положить $Q(\tilde{W}) = (-n, 1)$, тогда комплексные носители дифференциальных сумм $-g_1$ и G_1 совпадают $\mathbf{S}'(-g_1) = \mathbf{S}'(\tilde{G}_1)$. Итак, по уравнению (21) построено уравнение (28).

Положим $s_M = \langle M, R\rangle$, $M = (m_1, m_2)$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$, $R = (r_1, r_2)$, r_1 и r_2 из (14), тогда разложение (24) можно записать в виде

$$w = \sum_M c_M x^{\langle M,R\rangle}, \tag{32}$$

а разложение (25) в виде

$$\tilde{W} = x^{-n} \sum_M C_M |(s - s_0 - n + 1) \cdot \ldots \cdot (s - s_0)| x^{\langle M,R \rangle}, \qquad (33)$$

где $c_M = c_k$ и $C_M = c_k$ с $s_k - s_0 = \langle M, R \rangle$ и $\operatorname{Re} s_k \geqslant \operatorname{Re} s_{m+1}$.

Теперь покажем, что каждый коэффициент c_T ряда (32) однозначно определяется коэффициентами уравнения, которому он удовлетворяет, и предыдущими коэффициентами c_M, где $T = (t_1, t_2)$, $m_1 + m_2 \leqslant t_1 + t_2$, $m_1 \leqslant t_1$, $m_2 \leqslant t_2$.

Рассмотрим алгебраическое уравнение вида

$$\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} x^{v+s_0} \left(\beta_{0,0,1}\, w - \sum_{N,\, n_3} \beta_{n_1,n_2,n_3}\, x^{\langle N,R \rangle} w^{n_3} \right) = 0, \qquad (34)$$

где $N = (n_1, n_2)$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_+$, $+\infty > n_1 + n_2 + n_3 > 0$, $\beta_{0,0,1}$, β_{n_1,n_2,n_3} – комплексные постоянные, с носителем

$$\mathbf{S}(\tilde{f}) = \mathbf{S}(f_1) = \mathbf{S}(f_2).$$

Пусть разложение (32) является формальным решением этого уравнения. Покажем, что коэффициент c_T с $T = (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+$, зависит только от коэффициентов $\beta_{0,0,1}$, β_{n_1,n_2,n_3} уравнения (34) и от коэффициентов разложения (32) c_M с $M = (m_1, m_2)$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$, $m_1 \leqslant t_1$, $m_2 \leqslant t_2$, $m_1 + m_2 < t_1 + t_2$.

Подставим ряд (32) в уравнение (34). Получаем уравнение

$$x^{v+s_0} \left(\beta_{0,0,1} \sum_M c_M x^{\langle M,R \rangle} - \right. \qquad (35)$$

$$\left. - \sum_{N,\, n_3} \beta_{n_1,n_2,n_3} x^{\langle N,R \rangle} \left(\sum_M c_M x^{\langle M,R \rangle} \right)^{n_3} \right) = 0.$$

Уравнение (35) запишем в виде

$$\beta_{0,0,1} \sum_M c_M x^{\langle M,R \rangle} - \qquad (36)$$

$$- \sum_{M,\, N,\, n_3} \sum_{k=0}^{n_3} \frac{n_3!}{(n_3 - k)!\, k!}\, \beta_{n_1,n_2,n_3}\, c_M^{n_3 - k} x^{\langle M(n_3-k)+N,R \rangle} = 0.$$

Поскольку $n_3 - k \geqslant 0$, $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$, то $m_1 \leqslant m_1(n_3 - k) + n_1$, $m_2 \leqslant m_2(n_3 - k) + n_2$, $m_1 + m_2 < (m_1 + m_2)(n_3 - k) + (n_1 + n_2)$. Пусть $M = T$ и $M(n_3 - k) + N = T$, $T = (t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+$.

Упорядочим члены уравнения (36) в порядке возрастания значения $t_1 + t_2$. Пусть $n_3 - k = 0$, тогда для коэффициента c_T получаем уравнение

$$\nu_1(s_T)c_T = -\beta_{n_1,n_2,0},$$

из которого следует, что коэффициент c_T зависит только от коэффициента $\beta_{n_1,n_2,0}$ уравнения (34). Пусть теперь $n_3 - k > 0$, для коэффициента c_T получаем уравнение

$$\nu_1(s_T)\, c_T = \sum_{k=0}^{n_3} \frac{n_3!}{(n_3-k)!\, k!}\ \beta_{n_1,n_2,n_3}\, c_M^{n_3-k},$$

где $m_1 \leqslant t_1$, $m_2 \leqslant t_2$, $m_1 + m_2 < t_1 + t_2$.

Из этого уравнения следует, что коэффициент c_T зависит от коэффициентов β_{n_1,n_2,n_3} уравнения (34) и от предыдущих коэффициентов c_M с $m_1 \leqslant t_1$, $m_2 \leqslant t_2$, $m_1 + m_2 < t_1 + t_2$.

Положим

$$\sum_{k=0}^{n_3} \frac{n_3!}{(n_3-k)!\, k!}\ \beta_{n_1,n_2,n_3}\, c_M^{n_3-k} \stackrel{\text{def}}{=} b_T.$$

Если ряд (32) подставить в уравнение (21), то для каждого коэффициента c_T разложения (32) получаем уравнение

$$\nu_1(s_T)c_T + b_T = 0, \tag{37}$$

где b_T зависят от коэффициентов уравнения (21) и от предыдущих коэффициентов c_M разложения (32) с $m_1 \leqslant t_1$, $m_2 \leqslant t_2$, $m_1 + m_2 < t_1 + t_2$.

Подставим ряд (33) в уравнение (28). Для коэффициентов C_T этого ряда получаются равенства аналогичные равенствам (37), т. е.

$$\sigma|s_T(s_T-1)\dots(s_T-n+1)|C_T = B_T, \tag{38}$$

где B_T зависят от коэффициентов уравнения (28) и от предыдущих коэффициентов $C_M \geqslant |c_M|$ с $m_1 \leqslant t_1$, $m_2 \leqslant t_2$, $m_1 + m_2 < t_1 + t_2$.

Действительно, рассмотрим уравнения (37) и (38) при $n_3 - k = 0$, тогда коэффициенты b_M и B_M зависят только от коэффициентов уравнений (21) и (28) соответственно. Пусть $s_M = s_{m+1}$. Согласно построению уравнения (28) и формуле (30) выполняются неравенства $|-b_M| \leqslant B_M$, $|\nu_1(s_M)| \geqslant |s_M(s_M - 1)\dots(s_M - n + 1)|$, следовательно, $|c_M| \leqslant C_M$.

Теперь пусть $n_3 - k > 0$. Получаем уравнения $\nu_1(s_T)c_T = -b_T$ и $\sigma|s_T(s_T - 1)\dots(s_T - n + 1)|\, C_T = B_T$. Поскольку выполняются неравенства $|-b_M| \leqslant B_M$, $|c_M| \leqslant C_M$ с $m_1 \leqslant t_1$, $m_2 \leqslant t_2$, $m_1 + m_2 < t_1 + t_2$ и $|\nu_1(s_T)| \geqslant |s_T(s_T - 1)\dots(s_T - n + 1)|$, то $|-b_T| \leqslant B_T$ и $|c_T| \leqslant C_T$.

Продолжая по индукции этот процесс получаем, что $|-b_T| \leqslant B_T$, $|c_T| \leqslant C_T$ и $|\nu_1(s_T)| \geqslant \sigma |s_T(s_T-1)\dots(s_T-n+1)|$. Поэтому

$$C_T = \frac{B_T}{|\,(\sigma s_T(s_T-1)\dots(s_T-n+1))\,|} \geqslant |c_T| = \frac{|b_T|}{|\nu(s_T)|}.$$

Таким образом, решение (33) уравнения (28) мажорирует n раз продифференцированный ряд (24).

Теперь покажем, что ряд (33) сходится. Для этого в уравнении (28) положим

$$x^n \tilde{W} \overset{\text{def}}{=} \Psi \tag{39}$$

и запишем его в виде

$$f_3 \overset{\text{def}}{=} \sigma x^v\, \Psi - G_1(x,\, \Psi) = 0. \tag{40}$$

При этом $\mathbf{S}(f_1) = \mathbf{S}(f_2) = \mathbf{S}(f_3)$. Следовательно, носитель $\mathbf{S}(f_3)$ обладает свойствами (23).

Сделаем в уравнении (40) преобразование

$$\xi_1^{\theta}\, \xi_2 = x^{r_1},\ \xi_1\, \xi_2^{\theta} = x^{r_2}, \tag{41}$$

где $r_1 = \alpha_1 + \beta_1 s_0$, $r_2 = \alpha_2 + \beta_2 s_0$, $\theta \in \mathbb{N}$, $\theta > 1$,

$$\theta > \frac{\operatorname{Re} r_1}{\operatorname{Re} r_2},\quad \theta > \frac{\operatorname{Re} r_2}{\operatorname{Re} r_1}, \tag{42}$$

$\operatorname{Re} r_1 \geqslant 0$, $\operatorname{Re} r_2 \geqslant 0$, $\operatorname{Re}(r_1 + r_2) > 0$, $\operatorname{Re}(\theta r_2 - r_1) > 0$, $\operatorname{Re}(\theta r_1 - r_2) > 0$.

При этом

$$\xi_1 = x^{(\theta r_2 - r_1)/(\theta_1^2 - 1)},\ \xi_2 = x^{(\theta r_1 - r_2)/(\theta_1^2 - 1)},$$

и

$$x^{s_0 \gamma} = \xi_1^{\alpha_1 - \theta\alpha_2}\, \xi_2^{\theta\alpha_1 - \alpha_2},\ x^{\gamma} = \xi_1^{\theta\beta_2 - \beta_1}\, \xi_2^{\beta_2 - \theta\beta_1},$$

где γ определяется формулой (15).

Пусть $x^v = \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2}$. После преобразования (41) в уравнении (40) получаем уравнение

$$\xi_1^{\mu_1}\, \xi_2^{\mu_2} (\sigma\, \Psi - G_2(\xi_1, \xi_2, \Psi)) = 0, \tag{43}$$

где $G_2(\xi_1, \xi_2, \Psi) = \xi_1 \xi_2\, P_0(\xi_1, \xi_2, \Psi)$, $P_0(\xi_1, \xi_2, \Psi)$– многочлен своих переменных. Запишем уравнение (43) в виде

$$f_4 \overset{\text{def}}{=} \sigma\, \Psi - G_2(\xi_1, \xi_2, \Psi) = 0. \tag{44}$$

Трехмерный носитель $\tilde{\mathbf{S}}(f_4)$ уравнения (43) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{S}}(f_4) \subset \{q_1 = \theta m_1 + m_2,\ q_2 = m_1 + \theta m_2,\ q_3 = m_3\}, \tag{45}$$

где $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, $m_1, m_2, m_3 \geqslant 0$, и обладает свойствами

$$\begin{array}{ll} 1. & \tilde{\mathbf{S}}(\sigma\Psi) = (0,0,\ 1); \\ 2. & (0,0,\ 1) \text{ – вершина многогранника } \Gamma(f_4); \\ 3. & \tilde{\mathbf{S}}(f_4) \subset \{q_1 \geqslant 0,\ q_2 \geqslant 0,\ q_3 \geqslant 0\}; \\ 4. & \tilde{\mathbf{S}}(G_2) \bigcap \{0 \leqslant q_3 \leqslant 1\} \subset \{q_1 \geqslant 1,\ q_2 \geqslant 1\}. \end{array} \tag{46}$$

Теперь сделаем замену переменной

$$\Psi = \xi_1 \xi_2\, \Upsilon \tag{47}$$

в уравнении (45), после которой оно принимает вид

$$f_5 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\, \xi_1\, \xi_2 \Upsilon - G_3(\xi_1, \xi_2, \Upsilon) = 0. \tag{48}$$

Носитель $\tilde{\mathbf{S}}(f_5) \subset \{q_1 = 1 + \theta m_1 + m_2,\ q_2 = 1 + m_1 + \theta m_2,\ q_3 = m_3\}$, где $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, $m_1, m_2, m_3 \geqslant 0$, и обладает свойствами

$$\begin{array}{ll} 1. & \tilde{\mathbf{S}}(\sigma \xi_1\, \xi_2\, \Upsilon) = (1,1,\ 1); \\ 2. & (1,1,\ 1) \text{ – вершина многогранника } \Gamma(f_5); \\ 3. & \tilde{\mathbf{S}}(f_5) \subset \{q_1 \geqslant 1,\ q_2 \geqslant 1,\ q_3 \geqslant 0\}; \\ 4. & \tilde{\mathbf{S}}(G_3) \bigcap \{q_3 = 1\} \subset \{q_1 \geqslant 2,\ q_2 \geqslant 2\}; \\ 5. & \tilde{\mathbf{S}}(G_3) \bigcap \{q_3 = 0\} \subset \{q_1 \geqslant 1, q_2 \geqslant 1\}. \end{array} \tag{49}$$

Покажем, что

$$G_3(\xi_1, \xi_2, \Upsilon)/(\xi_1 \xi_2) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1 \xi_2\, G_4(\xi_1, \xi_2, \Upsilon) + G_5(\xi_1, \xi_2),$$

где $G_4(\xi_1, \xi_2, \Upsilon)$ и $G_5(\xi_1, \xi_2)$ – это многочлены своих переменных.

Согласно свойству 5) (49) функция $G_3(\xi_1, \xi_2, \Upsilon)$ содержит мономы вида $c\, \xi_1^{q_1} \xi_2^{q_2}$, $c = \text{const} \in \mathbb{C}$, только с $q_1 \geqslant 1$, $q_2 \geqslant 1$, поэтому функция $G_5(\xi_1, \xi_2)$ содержит мономы того же вида, но с $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant 0$. Согласно свойству 4) (49) функция $G_3(\xi_1, \xi_2, \Upsilon)$ содержит мономы вида $c\, \xi_1^{q_1} \xi_2^{q_2}\, \Upsilon$ только с $q_1 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$, поэтому функция $G_4(\xi_1, \xi_2, \Upsilon)$ содержит мономы того же вида, но с $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant 0$. Согласно свойству 3) (46) функция $G_2(\xi_1, \xi_2, \Upsilon)$ содержит мономы вида $c\, \xi_1^{q_1} \xi_2^{q_2}\, \Psi^2$ только с $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant 0$, но после замены (47) они перейдут в мономы вида $c\, \xi_1^{q_1} \xi_2^{q_2}\, \Upsilon^2$ только с $q_1 \geqslant 2$, $q_2 \geqslant 2$, поэтому функция $G_4(\xi_1, \xi_2, \Upsilon)$ содержит мономы того же вида, но с $q_1 \geqslant 0$, $q_2 \geqslant 0$. Для мономов вида $c\, \xi_1^{q_1} \xi_2^{q_2}\, \Upsilon^l$, $l \geqslant 3$

имеем $q_1 \geqslant l-1$, $q_2 \geqslant l-1$. Таким образом, получаем, что уравнение (48) можно записать в виде

$$f_6 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\,\Upsilon - \xi_1\xi_2 G_4(\xi_1,\xi_2,\Upsilon) + G_5(\xi_1,\xi_2) = 0, \qquad (50)$$

где $G_4(\xi_1,\xi_2,\Upsilon)$ и $G_5(\xi_1,\xi_2)$ – это многочлены своих переменных.

Поскольку f_6 многочлен своих переменных и

$$f_6(0,0,0)=0,\ \frac{\partial f_6}{\partial\Upsilon}(0,0,0)=\sigma\neq 0,$$

то согласно теореме Коши о неявной функции [2] уравнение (50) имеет единственное аналитическое решение

$$\Upsilon = \sum_{m_1,m_2} \delta_{m_1,m_2}\,\xi_1^{(\theta m_1+m_2)-1}\xi_2^{(m_1+\theta m_2)-1}, \qquad (51)$$

где $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$, $m_1,m_2\geqslant 0$.

Возвращаясь обратно $(51)\to(47)\to(41)\to(39)$ к переменным $\tilde W^{(n)}$ и x получаем выражения: сначала

$$\Psi = \sum_{m_1,m_2} \delta_{m_1,m_2}\,\xi_1^{\theta m_1+m_2}\xi_2^{m_1+\theta m_2},$$

затем

$$x^n\tilde W = \sum_{m_1,m_2} \delta_{m_1,m_2}\,x^{m_1r_1+m_2r_2},$$

которое можно записать в виде

$$\tilde W = \sum_{m_1,m_2} \delta_{m_1,m_2}\,x^{m_1r_1+m_2r_2-n}. \qquad (52)$$

Поскольку формальное решение (27) определено единственным образом, то оно совпадает с решением (52), т. е. ряд (27) сходится. А так как ряд (27) является мажорантой для n-той производной ряда (24), то отсюда следует, что ряд (24) также сходится. Доказательство окончено.

§5. Неформальные решения уравнений Пенлеве

В предыдущих параграфах мы рассматривали случай, когда $s_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$. Но если в разложении (12) $s_0\in\mathbb{Z}$ и линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x)$ уравнения (17) имеет одно критическое значение $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$ с $\operatorname{Re}\lambda > s_0$, тогда носитель разложения (12), зависит от s_0 и от λ. Этот случай сводится к случаю рассмотренному в предыдущих параграфах. Для этого в уравнении (11) нужно сделать замену $y=\psi+\phi$, где ψ – это отрезок ряда (12) содержащий члены с $\mathrm{Re} s_k \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda$, $s_k \neq \lambda$. В результате этой замены получится уравнение аналогичное уравнению (11). Оно имеет решение вида (12), но с ϕ вместо y и λ вместо s_0.

Из шести уравнений Пенлеве только у третьего, пятого и шестого уравнений имеются формальные решения, которые имеют вид степенных рядов (12) с комплексными показателями степени. При этом все носители этих разложений имеют одну комплексную образующую s_0 или λ.

Согласно § 4 [6] в окрестности точки $x = 0$ третье уравнение Пенлеве при всех значениях его четырех комплексных параметров имеет 5 семейств степенных разложений решений. Среди них одно двупараметрическое (по c_{s_0} и s_0 с $\mathrm{Re}\,s_0 \in (-1, 1)$) семейство степенных разложений, соответствующее вершине $\Gamma_2^{(0)}$, и 4 однопараметрических (по c_λ) семейства степенных разложений, соответствующих ребрам $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$.

Согласно [7] в окрестности точки $x = 0$ пятое уравнение Пенлеве при всех значениях его четырех комплексных параметров имеет 8 семейств степенных разложений вида (12). А именно, два двупараметрических (по c_{s_0} и s_0) семейства: $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ и 6 однопараметрических (по c_λ) семейств: $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_8$, $\mathcal{B}_9$.

Согласно гл. 2 и гл. 3 [8] в окрестности точки $x = 0$ шестое уравнение Пенлеве при всех значениях его четырех комплексных параметров имеет 13 семейств степенных разложений с комлексными показателями степени. А именно, одно двупараметрическое (по c_{s_0} и s_0) семейство $\mathcal{A}_0$ и 12 однопараметрических (по c_λ) семейств: $\mathcal{B}_j$, $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2, 6, 8, 9$, $\mathcal{C}_0^0$, $\mathcal{C}_0^\infty$.

Все перечисленные в этом параграфе степенные разложения сходятся согласно доказанной теореме в случае $s_0,\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ и согласно теореме из [5] в случае $s_0,\ \lambda \in \mathbb{Q}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962.

2. *Гурса Э.,* Курс математического анализа. Москва-Ленинград: ГТТИ. 1933. Т. 1. 1 ч. 368 с.

3. *Гурса Э.,* Курс математического анализа. Москва-Ленинград: ГТТИ. 1933. Т. 2. 1 ч. 271 с.

4. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. №3. С. 31–80.

5. *Брюно А.Д.*, *Горючкина И.В.* О сходимости формального решения обыкновенного дифференциального уравнения. // ДАН. 2010. Т. 432. №2. С. 151–154.

6. *Брюно А.Д.*, *Гриднев А.В.* Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. №51. с. 33.

7. *Брюно А.Д.*, *Парусникова А.В.* Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. №72. 27 с.

8. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды московского математического общества, 2010. Т. 71. С. 6–118.