ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 18 за 2011 г.

Брюно А.Д., Парусникова А.В.

Разложения решений пятого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д., Парусникова А.В. Разложения решений пятого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 18. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-18

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, А. В. Парусникова

РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ВБЛИЗИ ЕГО НЕОСОБОЙ ТОЧКИ

Москва, 2011 г.

УДК 517.925

А.Д. Брюно, А.В. Парусникова. Разложения решений пятого уравнения Пенлеве вблизи его неособой точки. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

В данной работе рассматривается пятое уравнение Пенлеве, которое имеет 4 комплексных параметра. Методами степенной геометрии ищутся асимптотические разложения его решений в орестности его неособой точки $z = z_0$, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq \infty$, при любых значениях параметров уравнения. Показано, что имеется ровно 10 семейств разложений решений уравнения. Все они – по целым степеням локальной переменной $z - z_0$. Из них одно новое; у него произвольный коэффициент при четвертой степени локальной переменной. Одно из семейств однопараметрическое, остальные – двухпараметрические. Доказано, что все разложения сходятся в окрестности (а являющиеся полюсами — в проколотой окрестности) точки $z = z_0$.

A.D. Bruno, A.V. Parusnikova. Expansions of solutions to the fifth Painlevé equation near its nonsingular point. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2011.

The article is devoted to the study of the fifth Painlevé equation which has 4 complex parameters. By methods of Power Geometry we look for asymptotic expansions of solutions to the equation near its nonsingular point $z = z_0$, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq \infty$ for all values of parameters of the equation. We have proved that there exist exactly 10 families of expansions. These families are power series in the local variable $z - z_0$. One of them is new: it has an arbitrary coefficient of the $(z - z_0)^4$. One of these families is two-parameter, other are one-parameter. All the expansions converge near the point $z = z_0$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

E-mails: abruno@keldysh.ru, parus-a@mail.ru
сайт: www.keldysh.ru

1 Постановка задачи

Пятое уравнение Пенлеве имеет вид:

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}, \tag{1.1}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — комплексные параметры, z — независимая, w — зависимая комплексные переменные. Уравнение (1.1) имеет две особые точки $z = 0$ и $z = \infty$.

В этой работе методами двумерной степенной геометрии [1,2] найдём все асимптотические разложения решений уравнения (1.1) в окрестности его неособой точки $z = z_0$, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq \infty$. Для этого в уравнении (1.1) сделаем замену $z = t + z_0$, которая переводит точку $z = z_0$ в точку $t = 0$. После этой замены уравнение (1.1) перейдёт в следующее уравнение:

$$w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)(w')^2 - \frac{w'}{t+z_0} + \frac{(w-1)^2}{(t+z_0)^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \frac{\gamma w}{t+z_0} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1}. \tag{1.2}$$

Наша задача сводится к нахождению асимптотических разложений решений уравнения (1.2) при $t \to 0$. Ищем разложения вида

$$y = c_r(t)t^r + \sum_{s \in \mathbf{K}} c_s(t)t^s, \tag{1.3}$$

где $c_r(t), c_s(t), r, s \in \mathbb{C}$, $\mathbf{K} \subset \{s \mid \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r\}$, множество $\mathbf{K}$ счётно. Различаем 5 типов разложений (1.3):

Тип 1. *Степенные разложения*: $c_r(t)$ и $c_s(t)$ — постоянные.

Тип 2. *Степенно-логарифмические разложения*: $c_r(t)$ — постоянный коэффициент, $c_s(t)$— многочлены от $\ln t$.

Тип 3. *Сложные разложения*: $c_r(t)$ и $c_s(t)$ — ряды по убывающим степеням $\ln t$.

Тип 4. *Экзотические разложения*: $c_r(t)$ и $c_s(t)$ — ряды по степеням t^i, в c_r содержится счётное число слагаемых и показатели степеней t^i ограничены либо сверху, либо снизу.

Тип 5. *Полуэкзотические разложения*: $c_r(t)$ — конечная сумма степеней t^i с комплексными коэффициентами и $c_s(t)$ — ряды по степеням t^i.

Представим уравнение (1.2) в виде дифференциальной суммы. Для этого умножим его на $(t+z_0)^2 w(w-1)$ и перенесём все члены уравнения в правую часть. Получим уравнение

$$f(t,w) \stackrel{def}{=} -(t+z_0)^2 w(w-1)w'' + (t+z_0)^2\left(\frac{3}{2}w - \frac{1}{2}\right)(w')^2 - (t+z_0)w(w-1)w' +$$

$$+(w-1)^3(\alpha w^2+\beta)+\gamma(t+z_0)w^2(w-1)+\delta(t+z_0)^2w^2(w+1)=0. \quad (1.4)$$

2 Случай $\alpha\beta\gamma\delta\neq 0$

При $\alpha\beta\gamma\delta\neq 0$ носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (1.4), многоугольник $\Gamma(f)$ и его рёбра $\Gamma_j^{(1)}$, $j=1,\ldots,6$ изображены на рис. 1. Так как мы рассматриваем случай $t\to 0$, то конус задачи $\mathcal{K}=\{p_1\le 0\}$, т. е. нас интересуют только вершины $\Gamma_1^{(0)}=(0,0)$, $\Gamma_2^{(0)}=(-2,2)$, $\Gamma_3^{(0)}=(-2,3)$ $\Gamma_4^{(0)}=(0,5)$ и рёбра $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$, расположенные на левой части границы $\partial\Gamma$ многоугольника $\Gamma(f)$.

Вершинам $\Gamma_1^{(0)}$ и $\Gamma_4^{(0)}$ соответствуют алгебраические укороченные уравнения, которые не дают решений согласно замечанию 1.1 из [1].

Вершине $\Gamma_2^{(0)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat f_2^{(0)}(t,w)\overset{def}{=}z_0^2ww''-\frac{1}{2}z_0^2(w')^2=0 \qquad (2.1)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(0)}=\{r|\ 0<r<1\}$. Подставляя $w=c_rt^r$ в уравнение (2.1), получаем, что $r=0$ или $r=2$, такие r не лежат в нормальном конусе $\mathbf{U}_2^{(0)}$, поэтому решений, соответствующих вершине $\Gamma_2^{(0)}$, нет.

Вершине $\Gamma_3^{(0)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat f_3^{(0)}(t,w)\overset{def}{=}-z_0^2w^2w''+\frac{3}{2}z_0^2w(w')^2=0 \qquad (2.2)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(0)}=\{r|\ -1<r<0\}$. Подставляя $w=c_rt^r$ в уравнение (2.2), получаем, что $r=0$ или $r=-2$, такие r не лежат в нормальном конусе $\mathbf{U}_3^{(0)}$, поэтому решений, соответствующих вершине $\Gamma_3^{(0)}$, нет.

Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat f_1^{(1)}(t,w)\overset{def}{=}z_0^2ww''-\frac{1}{2}z_0^2(w')^2-\beta=0 \qquad (2.3)$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)}=\{\lambda(-1,-1),\lambda>0\}$. Подставляя $w=c_1t$ в уравнение (2.3), получаем, что $w_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{-2\beta}}{z_0}t$. Полученное решение подставляем в первую вариацию $\delta\hat f_1^{(1)}/\delta w$, получаем оператор

$$\mathcal{L}_{1,2}=z_0^2c_1\left(t\frac{d^2}{dt^2}-\frac{d}{dt}\right), \qquad (2.4)$$

характеристический многочлен которого равен $c_1z_0^2k(k-2)$ (корни $k_1=0$ и $k_2=2$). В конусе задачи $\mathcal{K}=\{k>1\}$ лежит только корень $k=2$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем следующие семейства асимптотических разложений решений уравнения (1.1):

$$\mathcal{O}_{1,2}:\ w=(-1)^j\frac{\sqrt{-2\beta}}{z_0}(z-z_0)+\sum_{s=2}^{\infty}c_{sj}(z-z_0)^s,\ j=1,2, \tag{2.5}$$

где c_{2j} — произвольные постоянные, остальные коэффициенты $c_{sj},\ s\geq 2$ постоянны и однозначно определены. Разложения существуют при $\beta\neq 0$.

Ребру $\Gamma_3^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_3^{(1)}(t,w)\stackrel{def}{=}-z_0^2w^2w''+\frac{3}{2}z_0^2w(w')^2+\alpha w^5=0 \tag{2.6}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(1)}=\{\lambda(-1,1),\lambda>0\}$. Подставляя $w=c_{-1}/t$ в уравнение (2.6), получаем, что $w_{1,2}=\pm\dfrac{z_0}{\sqrt{2\alpha t}}$. Полученное решение подставляем в первую вариацию $\delta\hat{f}_3^{(1)}/\delta w$, получаем оператор

$$\mathcal{L}_{3,4}=-z_0^2c_{-1}^2t^{-2}\frac{d^2}{dt^2}+3z_0^2c_{-1}^2t^{-3}\frac{d}{dt}, \tag{2.7}$$

характеристический многочлен которого равен $-c_{-1}^2z_0^2k(k+2)$ (корни $k_1=0$ и $k_2=-2$). В конусе задачи $\mathcal{K}=\{k>-1\}$ лежит только корень $k=0$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем два семейства асимптотических разложений решений уравнения (1.1):

$$\mathcal{O}_{3,4}:\ w=(-1)^j\frac{z_0}{\sqrt{2\alpha}(z-z_0)}+\sum_{s=0}^{\infty}c_{sj}(z-z_0)^s,\ j=3,4, \tag{2.8}$$

где c_{0j} — произвольные постоянные, остальные коэффициенты $c_{sj},\ s\geq 1$ постоянны и однозначно определены. Разложение существует при $\alpha\neq 0$.

Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{f}_2^{(1)}(t,w)\stackrel{def}{=}z_0^2ww''-\frac{1}{2}z_0^2(w')^2-z_0^2w^2w''+\frac{3}{2}z_0^2w(w')^2=0 \tag{2.9}$$

и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(1)}=\{\lambda(-1,0),\lambda>0\}$. Подставляя $w=c_0$ в уравнение (2.9), получаем тождество. Подставив $w=c_0,\ c_0\neq 0$ в первую вариацию $\delta\hat{f}_2^{(1)}/\delta w$, получаем оператор

$$\mathcal{L}_5=z_0^2c_0(1-c_0)\frac{d^2}{dt^2}, \tag{2.10}$$

который равен нулевому только при $c_0 = 1$ ($c_0 \neq 0$ по условию), поэтому случай $c_0 = 1$ будет рассмотрен в разделе 3. Характеристический многочлен оператора (2.10) равен $c_0(1-c_0)z_0^2 k(k-1)$ (корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$). В конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > 0\}$ лежит только корень $k = 1$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем следующее семейство асимптотических разложений решений уравнения (1.1):

$$\mathcal{O}_5: \; w = \sum_{s=0}^{\infty} c_s (z - z_0)^s, \tag{2.11}$$

где $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные, $c_0 \neq 0$, $c_0 \neq 1$, остальные коэффициенты c_s, $s \geq 2$ постоянны и однозначно определены. Разложение существует при всех значениях параметров уравнения.

3 Случай $c_0 = 1$

Найдём разложения решений уравнения (1.2), первый член которых равен 1: для этого в уравнении (1.4) сделаем замену $w = 1 + v$, получим уравнение

$$g(t,v) \overset{def}{=} -(t+z_0)^2(1+v)vv'' + (t+z_0)^2\left(\frac{3}{2}v + 1\right)(v')^2 - (t+z_0)v(v+1)v' +$$

$$+v^3(\alpha(v+1)^2 + \beta) + \gamma(t+z_0)v(v+1)^2 + \delta(t+z_0)^2(v+1)^2(v+2) = 0. \tag{3.1}$$

3.1 Подслучай $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$

При $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (3.1), многоугольник $\Gamma(g)$ и его рёбра $G_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots 6$ изображены на рис. 2. Так как мы рассматриваем случай $t \to 0$, $v \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0, \; p_2 \leq 0\}$, т. е. нас интересуют только вершины $G_1^{(0)} = (0,0)$, $G_2^{(0)} = (-2,2)$ и ребра $G_1^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ и $G_6^{(1)}$.

Вершине $G_1^{(0)}$ соответствует алгебраическое укороченное уравнение $(\alpha + \beta)v^3 = 0$, которое не даёт решений.

Вершине $G_2^{(0)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$-z_0^2 vv'' + z_0^2(v')^2 = 0 \tag{3.2}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_2^{(0)} = \{r | \; 0 < r < 1\}$. Подставляя $v = c_r t^r$ в уравнение (3.2), получаем, что $r = 0$, такое r не лежит в нормальном конусе $\tilde{\mathbf{U}}_2^{(0)} = \{r | \; 0 < r < 1\}$, поэтому решений, соответствующих вершине $G_2^{(0)}$, нет. Вершина $G_2^{(0)}$ является резонансной для ребра $G_2^{(1)}$, значит, ребру $G_2^{(1)}$ могут соответствовать разложения, содержащие $\ln t$.

Ребру $G_1^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$g_1^{(1)}(t,v) \stackrel{def}{=} 2\delta z_0^2 - z_0^2 vv'' + z_0^2(v')^2 = 0 \tag{3.3}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \{\lambda(-1,-1), \lambda > 0\}$. Подставляя $v = c_1 t$ в уравнение (3.3), получаем, что $v_{1,2} = \pm\sqrt{-2\delta}t$. Полученное решение подставляем в первую вариацию $\delta\hat{g}_1^{(1)}/\delta v$, получаем оператор

$$\mathcal{L}_{6,7} = z_0^2 c_0 \left(-t\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt}\right), \tag{3.4}$$

характеристический многочлен которого равен $-c_0 z_0^2 k(k-3)$ (корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 3$). В конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > 0\}$ лежит только корень $k = 3$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем следующие семейства асимптотических разложений решений уравнения (1.1):

$$\mathcal{O}_{6,7}:\ w = 1 + (-1)^j\sqrt{-2\delta}(z - z_0) + \sum_{s=2}^{\infty} c_{sj}(z - z_0)^s,\ j = 6, 7, \tag{3.5}$$

где $c_{2j} = -\dfrac{\gamma}{2z_0} - \delta + (-1)^j\dfrac{\sqrt{-2\delta}}{2z_0}$, c_{3j} — произвольная постоянная, остальные коэффициенты $c_{sj},\ s \geq 4$ постоянны и однозначно определены. Разложения существуют при $\delta \neq 0$ независимо от значений α, β, γ.

Ребру $G_2^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$g_2^{(1)}(t,v) \stackrel{def}{=} -z_0^2(1+v)vv'' + z_0^2\left(\frac{3}{2}v + 1\right)(v')^2 = 0 \tag{3.6}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \{\lambda(-1,0), \lambda > 0\}$. Уравнение (3.6) получается из уравнения (2.9) в результате подстановки $w = 1 + v$. Найдём теперь решения $v \to 0$ при $t \to 0$, соответствующие ребру $G_2^{(1)}$. Решив уравнение (3.6), получаем $v = \text{const}$ и $v = -1 + \text{th}(Ct + D)^2,\ C,\ D = \text{const}$. Если решение $v \not\equiv 0$, то при $t \to 0$ оно не стремится к нулю, т. е. решения уравнения (3.6) не подходят.

Ребру $G_6^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $2\delta(t + z_0)^2 = 0$, которое не даёт решений.

3.2 Подслучай $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$

При $\alpha\beta\gamma \neq 0$, $\delta = 0$ носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (3.1), многоугольник $\Gamma(g)$ и его рёбра $G_j^{(1)},\ j = 2, 3, 7, 8, 9, 10$ изображены на рис. 3. Так как мы рассматриваем случай $t \to 0$, $v \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \le 0,\ p_2 \le 0\}$, т. е. нас интересуют только вершины $G_1^{(0)} = (0,1)$, $G_2^{(0)} = (-2,2)$ и рёбра $G_2^{(1)}$, $G_7^{(1)}$ и $G_{10}^{(1)}$.

Вершине $G_1^{(0)}$ соответствует алгебраическое укороченное уравнение, которое не даёт решений. Вершине $G_2^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение (3.2), ребру $G_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (3.6), ранее мы выяснили, что им не соответствуют никакие разложения решений.

Ребру $G_{10}^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение $\gamma(t+z_0)v = 0$, которое не даёт решений.

Ребру $G_7^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$\hat{g}_7^{(1)}(t,w) \stackrel{def}{=} \gamma z_0 v - z_0^2 v v'' + z_0^2 (v')^2 = 0 \tag{3.7}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_7^{(1)} = \{\lambda(-1,-2), \lambda > 0\}$. Подставляя $v = c_2 t^2$ в уравнение (3.7), получаем, что $v = -\gamma t^2/(2z_0)$. Полученное решение подставляем в первую вариацию $\delta \hat{g}_7^{(1)}/\delta v$, получаем оператор

$$\mathcal{L}_8 = \gamma z_0 \left(\frac{1}{2} t^2 \frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} + 2 \right), \tag{3.8}$$

характеристический многочлен которого равен $\gamma/2z_0(k-1)(k-4)$ (корни $k_1 = 1$ и $k_2 = 4$). В конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > 2\}$ лежит только корень $k = 4$, это единственное критическое число. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем следующее семейство асимптотических разложений решений уравнения (1.1):

$$\mathcal{O}_8 :\ w = 1 - \frac{\gamma}{2z_0}(z-z_0)^2 + \sum_{s=4}^{\infty} c_s (z-z_0)^s, \tag{3.9}$$

где c_4 — произвольная постоянная, остальные коэффициенты c_s, $s \ge 5$ постоянны и однозначно определены. Разложение существует при $\gamma \ne 0$, $\delta = 0$ независимо от значений α и β.

3.3 Подслучай $\alpha\beta \ne 0$, $\gamma = \delta = 0$

При $\gamma = \delta = 0$ носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (3.1), многоугольник $\Gamma(g)$ и его рёбра $G_j^{(1)}$, $j = 2, 3, 11, 12$ изображены на рис. 4. Так как мы рассматриваем случай $t \to 0$, $v \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \le 0,\ p_2 \le 0\}$, т. е. нас интересуют только вершины $G_2^{(0)} = (-2,2)$, $G_3^{(0)} = (-2,3)$ и ребра $G_2^{(1)}$, $G_{11}^{(1)}$.

Ребру $G_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (3.6), ранее мы выяснили, что ему не соответствуют никакие разложения решений.

Вершине $G_2^{(0)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$-z_0^2\left(vv''-(v')^2\right)=0 \qquad (3.10)$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_2^{(0)}=\{r|\ 0<r<\infty\}$. Получаем характеристическое уравнение $-z_0^2r=0$, которое имеет один корень $r=0$, но в уравнении (3.10) содержался второй порядок дифференцирования, поэтому считаем, что характеристический многочлен является многочленом второй степени, другой корень которого $r=\infty$. Это означает, что вершина $G_2^{(0)}$ является резонансной для ребра $G_{11}^{(1)}$, поэтому в уравнении (3.11) надо сделать замену $\ln v=\eta$.

Ребру $G_{11}^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$-(t+z_0)^2\left(vv''-(v')^2\right)-(t+z_0)vv'=0 \qquad (3.11)$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_{11}^{(1)}=\{\lambda(0,-1),\lambda>0\}$.

В уравнении (3.11) сделаем замену $\ln v=\eta$, сократим на $-(t+z_0)v^2$, получим уравнение $(t+z_0)\eta''+\eta'=0$, общее решение которого $\eta=C\ln(t+z_0)+D$, где C, D — произвольные постоянные, откуда $v=D(t+z_0)^C$. Мы ищем нетривиальные решения $v\not\equiv 0$, поэтому $D\neq 0$. Это решение не подходит, поскольку $D(t+z_0)^C\to Dz_0^C$ при $t\to 0$, т. е. $v\to \mathrm{const}\neq 0$, а мы ищем решения $v\to 0$.

4 Случай $\alpha=0$

При $\alpha=0$, $\beta\gamma\delta\neq 0$ носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (3.1), многоугольник $\Gamma(g)$ и его рёбра $\Gamma_j^{(1)}$, $j=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ изображены на рис. 5. Мы рассматриваем случай $t\to 0$, поэтому задачи $\mathcal{K}=\{p_1\le 0\}$, т. е. нас интересуют только вершины $\Gamma_1^{(0)}=(0,0)$, $\Gamma_2^{(0)}=(-2,2)$, $\Gamma_3^{(0)}=(-2,3)$ и рёбра $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_7^{(1)}$.

Разложения, соответствующие вершинам $\Gamma_1^{(0)}$, $\Gamma_2^{(0)}$ и рёбрам $\Gamma_1^{(1)}$, $\Gamma_2^{(1)}$ не изменятся по сравнению со случаем $\alpha\neq 0$. Рассмотрим вершину $G_3^{(0)}$. Ей соответствует укороченное уравнение (2.2) и нормальный конус $\mathbf{U}_3^{(0)}=\{r|\ r<0\}$. Подставляя $w=c_rt^r$ в уравнение (2.2), получаем, что $r=0$ или $r=-2$, только $r=-2$ лежит нормальном конусе $\mathbf{U}_3^{(0)}$.

Подставляем $w=c_{-2}t^{-2}$ в первую вариацию $\delta\hat{f}_3^{(0)}/\delta w$, получаем оператор

$$\mathcal{L}_9=-c_{-2}^2t^{-6}z_0^2\left(t^2\frac{d^2}{dt^2}+6t\frac{d}{dt}+6\right), \qquad (4.1)$$

характеристический многочлен которого равен $-c_{-2}^2z_0^2(k+2)(k+3)$ (корни $k_1=-2$ и $k_2=-3$). В конусе задачи $\mathcal{K}=\{k>-2\}$ не лежит ни одного корня, т. е. критических чисел нет. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем следующее семейство асимптотических разложений решений уравнения (1.1):

$$\mathcal{O}_9: \; w = \sum_{s=-2}^{\infty} c_s (z - z_0)^s, \tag{4.2}$$

где c_{-2} — произвольная постоянная, c_s, $s \geq -1$ постоянны и однозначно определены. Разложение существует при $\alpha = 0$.

Ребру $\Gamma_7^{(1)}$ соответствуют укороченное уравнение

$$-(t+z_0)^2 \left(w^2 w'' - \frac{3}{2} w (w')^2 \right) - (t+z_0) w^2 w' + \beta w^3 + \gamma (t+z_0) w^3 +$$
$$+\delta (t+z_0)^2 w^3 = 0 \tag{4.3}$$

и нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_7^{(1)} = \{\lambda(0,-1), \lambda > 0\}$.

В уравнении (4.3) сделаем замену $\ln w = \eta$, сократим на w^3, получим уравнение

$$-(t+z_0)^2 \left(\eta'' - \frac{1}{2} (\eta')^2 \right) - (t+z_0)\eta' + \beta + \gamma(t+z_0) + \delta(t+z_0)^2 = 0,$$

носитель которого изображен на рис. 6. Так как мы рассматриваем случай $t \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0, \; p_2 \geq 0\}$, т. е. нас интересуют только вершина $\Phi_4^{(0)} = (-2, 2)$ и ребра $\Phi_4^{(1)}$ и $\Phi_5^{(1)}$.

Вершине $\Phi_4^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение $\dfrac{z_0^2}{2} (\eta')^2 = 0$. Его решения $\eta = \mathrm{const}$ не подходят, так как мы ищем решения $\eta \to \infty$ при $t \to 0$.

Ребру $\Phi_4^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $-z_0^2 \left(\eta'' - \dfrac{(\eta')^2}{2} \right) = 0$. Его решения $\eta = -2\ln(-t/2 + C) + D$ при $C \neq 0$ не подходят (см. рассуждения выше), а при $C = 0$ получаем первый член разложения (4.2).

Ребру $\Phi_5^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение $(t+z_0)^2 \dfrac{(\eta')^2}{2} = 0$. Его решения $\eta = \mathrm{const}$ не подходят (см. рассуждения выше).

5 Случай $\beta = 0$

При $\beta = 0$, $\alpha\gamma\delta \neq 0$ носитель $\mathbf{S}(g)$ уравнения (3.1), многоугольник $\Gamma(g)$ с рёбрами $\Gamma_j^{(1)}$, $j = 2, \; 3, \; 4, \; 5, \; 6, \; 8$ изображены на рис. 7. Так как мы рассматриваем случай $t \to 0$, то конус задачи $\mathcal{K} = \{p_1 \leq 0\}$, т. е. нас интересуют только вершины $\Gamma_2^{(0)} = (-2, 2)$, $\Gamma_3^{(0)} = (-2, 3)$, $\Gamma_4^{(0)} = (0, 5)$ и рёбра $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$, $\Gamma_8^{(1)}$.

Разложения, соответствующие вершинам $\Gamma_3^{(0)}$, $\Gamma_4^{(0)}$ и рёбрам $\Gamma_2^{(1)}$, $\Gamma_3^{(1)}$ не изменятся по сравнению со случаем $\beta \neq 0$. Разложений, соответствующих ребру $\Gamma_8^{(1)}$ не будет (рассуждения повторяют проведённые в случае $\alpha = 0$ рассуждения для ребра $\Gamma_7^{(1)}$).

Рассмотрим вершину $\Gamma_2^{(0)}$. Ей соответствуют укороченное уравнение (2.1) и нормальный конус $\mathbf{U}_2^{(0)} = \{r|\ r > 0\}$. Подставляя $w = c_r t^r$ в уравнение (2.1), получаем, что $r = 0$ или $r = 2$, только $r = 2$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_2^{(0)}$.

Подставляем $w = c_2 t^2$ в первую вариацию $\delta \hat{f}_2^{(0)}/\delta w$, получаем оператор

$$\mathcal{L}_{10} = c_2 z_0^2 \left(t \frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \right), \tag{5.1}$$

характеристический многочлен которого равен $c_2 z_0^2 k(k-2)$ (корни $k_1 = 0$ и $k_2 = 2$). В конусе задачи $\mathcal{K} = \{k > 2\}$ не лежит ни одного корня, т. е. критических чисел нет. Условие совместности [1] выполнено. Таким образом, получаем следующее семейство асимптотических разложений решений уравнения (1.1):

$$\mathcal{O}_{10}:\ w = \sum_{s=2}^{\infty} c_s (z - z_0)^s, \tag{5.2}$$

где c_2 — произвольная постоянная, $c_s,\ s \geq 3$ постоянны и однозначно определены. Разложение существует при $\beta = 0$.

6 Сводка результатов

Теорема 1. *В окрестности неособой точки уравнения* (1.1) *имеется 10 семейств асимптотических разложений его решений:*
$\mathcal{O}_{1,2}$ (2.5), *которые существуют при* $\beta \neq 0$*;*
$\mathcal{O}_{3,4}$ (2.8), *которые существуют при* $\alpha \neq 0$*;*
$\mathcal{O}_5$ (2.11), *которое существует при всех значениях параметров;*
$\mathcal{O}_{6,7}$ (3.5), *которые существуют при* $\delta \neq 0$*;*
$\mathcal{O}_8$ (3.9), *которое существует при* $\delta = 0,\ \gamma \neq 0$*.*
$\mathcal{O}_9$ (4.2), *которое существует при* $\alpha = 0$*;*
$\mathcal{O}_{10}$ (5.2), *которое существует при* $\beta = 0$*.*

Семейство $\mathcal{O}_5$ *двухпараметрическое, остальные семейства однопараметрические.*

Теорема 1 следует из рассуждений разделов 1–5.

Семейства разложений $\mathcal{O}_j,\ j = 1, 2, 3, 4, 9, 10$ были известны [3]. Семейства разложений $\mathcal{O}_j,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ имеются в работе [4]. Для семейств разложений $\mathcal{O}_6$ и $\mathcal{O}_7$ в работе [4] указано, что коэффициент $c_{3j},\ j=6,\ 7$ произволен. Мы впервые указываем семейство разложений $\mathcal{O}_8$, где коэффициент c_4 произволен.

Уравнение (1.1) инвариантно относительно замены (симметрии)

$$(z,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(\tilde{z},\frac{1}{\tilde{w}},-\tilde{\beta},-\tilde{\alpha},-\tilde{\gamma},\tilde{\delta}). \tag{6.1}$$

Лемма 1. *При замене* (6.1) *семейства асимптотических разложений* $\mathcal{O}_i$ *уравнения* (1.1) *перейдут в семейства* $\mathcal{O}_j$*. Соответствие между номерами* i *и* j *приведено в следующей таблице:*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j	3	4	1	2	5	6	7	8	10	9

Доказательство очевидно.

7 Сходимость разложений

Теорема 2. *Разложения* $\mathcal{O}_j,\ j=1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10$ *сходятся в окрестности* $z=z_0$*, а разложения* $\mathcal{O}_3,\ \mathcal{O}_4,\ \mathcal{O}_9$ *сходятся в проколотой окрестности точки* $z=z_0$*.*

Доказательство. Докажем сначала сходимость разложения $\mathcal{O}_5$ (доказательство сходимости разложений $\mathcal{O}_j,\ j=1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10$ проводится аналогично).

В уравнении (1.2) сделаем замену $w=c_0+c_1t+p(t)$, где $p(0)=0$, $p'(0)=c_1$ и $c_0\neq 0,\ c_0\neq 1$, получим уравнение

$$p''=\left(\frac{1}{2(c_0+c_1t+p)}+\frac{1}{c_0+c_1t+p-1}\right)(c_1+p')^2-\frac{c_1+p'}{t+z_0}+$$
$$+\frac{(c_0+c_1t+p-1)^2}{(t+z_0)^2}\left(\alpha(c_0+c_1t+p)+\frac{\beta}{c_0+c_1t+p}\right)+$$
$$+\frac{\gamma(c_0+c_1t+p)}{t+z_0}+\frac{\delta(c_0+c_1t+p)(c_0+c_1t+p+1)}{c_0+c_1t+p-1}. \tag{7.1}$$

Сформулируем теорму Коши для уравнений второго порядка, разрешенных относительно старшей производной (см., например, [5]): пусть

$$y''=\varphi(t,y,y'), \tag{7.2}$$

$$y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y'_0 \tag{7.3}$$

и функция $\varphi(u_1, u_2, u_3)$ аналитична по (u_1, u_2, u_3) в окрестности точки $(u_1, u_2, u_3) = (t_0, y_0, y_0')$, тогда существует единственное решение $y(t)$ задачи Коши (7.2), (7.3), причём это решение является аналитической функцией в окрестности точки $t = t_0$.

Теорему Коши применим к уравнению (7.1) (все слагаемые в правой части уравнения являются аналитическими функциями в окрестности точки $(t_0, y_0, y_0') = (0, 0, c_1)$), поэтому разложение $\mathcal{O}_5$ сходится в окрестности точки $t = 0$, т. е. $z = z_0$.

Докажем сходимость разложения $\mathcal{O}_3$ (доказательство сходимости $\mathcal{O}_4$, $\mathcal{O}_9$ проводится аналогично). По лемме 1 семейство $\mathcal{O}_3$ получается из семейства $\mathcal{O}_1$ при помощи замены (6.1). Зафиксируем некоторый набор параметров $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Выше доказано, что $w_1(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)$ сходится в окрестности точки $z = z_0$, причём w_1 представляется в окрестности точки $z = z_0$ рядом Тейлора (2.5). Исходя из вида этого ряда, функция $\tilde{w}_1 = \dfrac{w_1}{z - z_0}$ также сходится в окрестности точки $z = z_0$, $\tilde{w}_1(z_0) \neq 0$. Рассмотрим функцию $w_4(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \dfrac{1}{w_1(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)} = \dfrac{1}{(z - z_0)\tilde{w}_1(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)}$, функция $\tilde{w}_1(z, -\beta, -\alpha, -\gamma, \delta)$ аналитична в окрестности точки $z = z_0$, в точке $z = z_0$ в ноль не обращается, поэтому $w_4(z, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ в проколотой окрестности точки $z = z_0$ разлагается в сходящийся ряд Лорана (имеет полюс первого порядка).

Теперь докажем сходимость всех разложений $\mathcal{O}_1$ – $\mathcal{O}_{10}$ по-другому. Для этого воспользуемся теоремой 3.4, сформулированной в [1] без доказательства: степенное разложение решения уравнения

$$\tilde{f}(x, z) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(x) + h(x, z) = 0$$

сходится для достаточно малых $|x| \neq 0$, если максимальный порядок производной в операторе $\mathcal{L}$, равен максимальному порядку производной в дифференциальной сумме $\tilde{f}$. Доказательство теоремы для случая целых показателей степени см. в [2] (теорема 1.7.2).

Максимальный порядок дифференцирования в уравнении (1.2) – второй, максимальный порядок дифференцирования в операторах $\mathcal{L}_1$ – $\mathcal{L}_{10}$ также второй согласно (2.4), (2.7), (2.10), (3.4), (3.8), (4.1), (5.1), разложения $\mathcal{O}_1$ – $\mathcal{O}_{10}$ идут по целым степеням $t = z - z_0$, следовательно, по доказанному случаю сформулированной теоремы, они сходятся при малых $|t| \neq 0$. Доказательство закончено.

Асимптотические разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности особой точки $z = 0$ описаны авторами в работе [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004. Т. 59. № 3. С. 31-80.

2. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды ММО. 2010. Т. 71. С. 6-118.

3. *Gromak V.I., Laine I., Shimomoura S.*, Painlevé Differential Equations in the Complex Plane // Walter de Gruyter. Berlin, New York, 2002. 303 p.

4. *Karulina E. S.* Expansions of solutions to the fifth Painlevé equation in a neigbourhood of a nonsingular point. Journal of Mathematical Sciences, 2007, vol. 145, № 5. P. 5252-5259.

5. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. ГИТТЛ. Москва-Ленинград. 1950. 436 с.

6. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт № 72. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. 27 с.

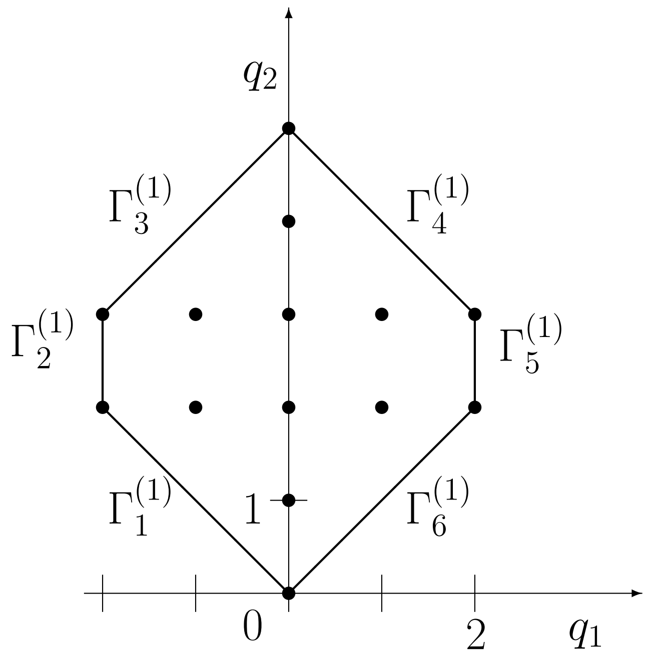

Рис. 1

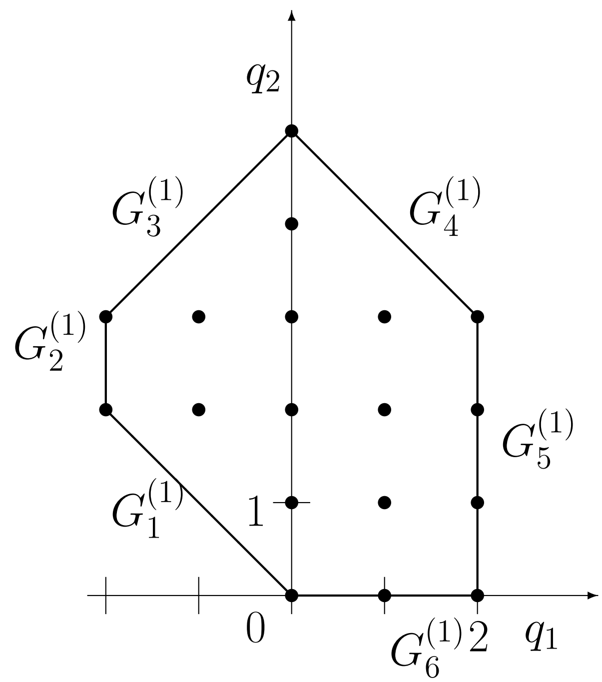

Рис. 2

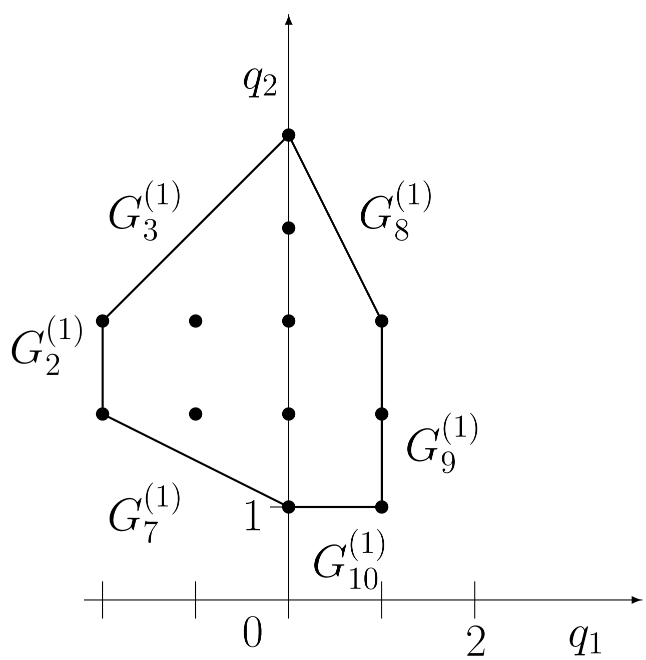

Рис. 3

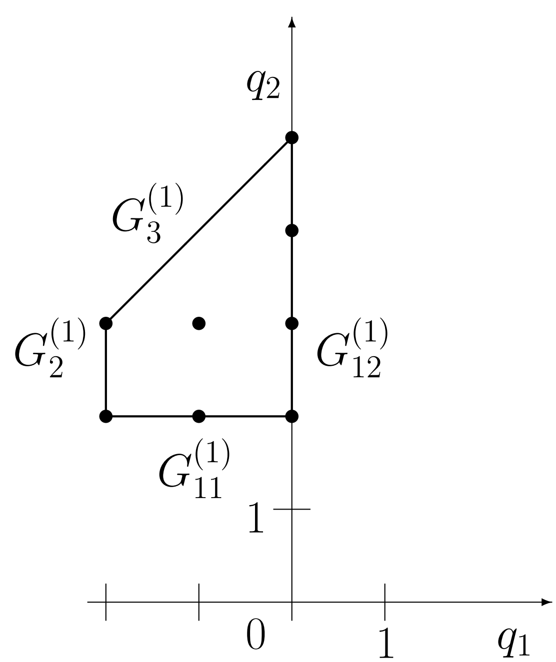

Рис. 4

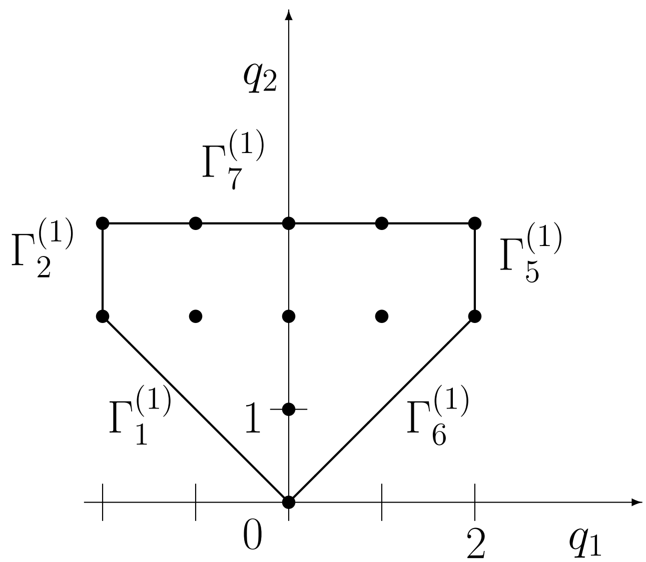

Рис. 5

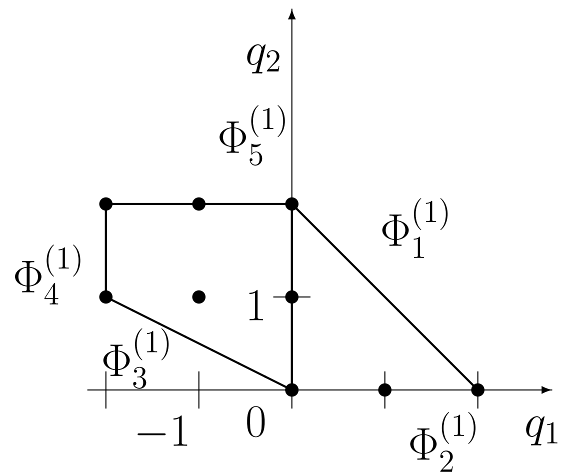

Рис. 6

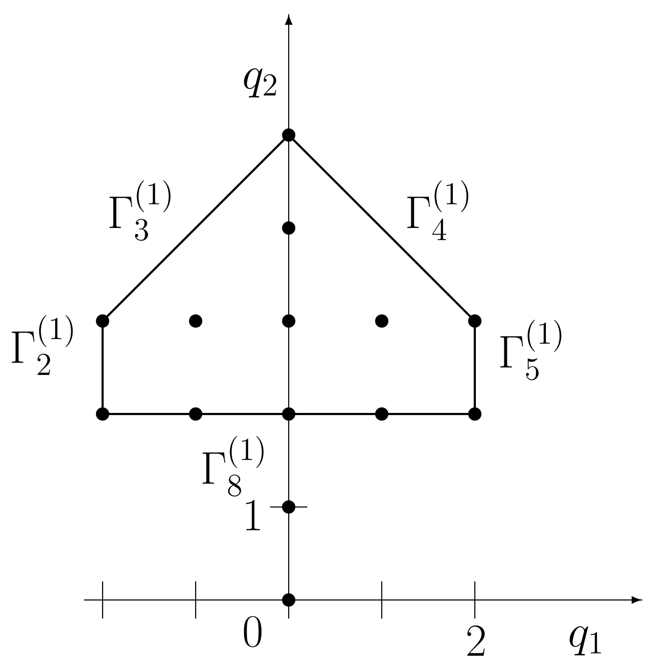

Рис. 7