Препринты ИПМ • Препринт № 15 за 2011 г.

Брюно А.Д.

О сложных разложениях решений ОДУ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно

О СЛОЖНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ОДУ

Москва, 2011 г.

УДК 517.925

А.Д. Брюно. О сложных разложениях решений ОДУ. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение весьма общего вида. Предполагается, что его укороченное уравнение, соответствующее вершине или негоризонтальному ребру многоугольника исходного уравнения, имеет решение, содержащее логарифм независимой переменной. Показывается, что при очень слабых ограничениях, эту нестепенную асимптотику решений исходного уравнения можно продолжить в асимптотическое разложение этих решений. Это – разложение по степеням независимой переменной, коэффициенты которого суть ряды по убывающим степеням от логарифма. Уазаны алгоритмы таких вычислений. Приводятся 6 примеров, 4 из них относятся к уравнениям Пенлеве.

A.D. Bruno. On complicated expansions of solutions to ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2011.

We consider an ordinary differential equation of a very general form. Let its truncated equation corresponding to a vertex or to a nonhorisontal edge of the polygon of the initial equation have a solution containing the logarithm of the independent variable. We demonstrate that, under a very weak restriction, the nonpower asymptotic form of solutions to the initial equation can be continued into an asymptotic expansion of the solutions. The expansion is in powers of the independent variable with coefficients that are series in decreasing powers of its logarithm. We demonstrate algorithms of such computations. We also give 6 examples, 4 of them are related to to Painlevé equations.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 08-01-00082 и 11-01-00023.

E-mail: abruno@keldysh.ru
сайт: www.keldysh.ru

1. Введение

Здесь рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x, y) = 0, \tag{1.1}$$

где $f(x, y)$ — дифференциальная сумма [1], т. е. сумма (конечного) числа дифференциальных мономов, каждый из которых является произведением обычного монома и конечного числа производных $d^l y/dx^l$. В [1] показано, как при $x \to 0$ или ∞ вычислять *степенно-логарифмические разложения*

$$y = c_r x^r + \sum c_s x^s, \ \ s \in \mathbf{K}, \tag{1.2}$$

решений уравнения (1.1), где $r, s, \in \mathbb{C}$, $c_r = \text{const} \in \mathbb{C}$ и степенная функция $c_r x^r$ является ведущей в сумме (1.2), а c_s являются либо постоянными, либо многочленами от логарифма $\ln x$. При этом укороченное решение

$$y = c_r x^r \tag{1.3}$$

является решением соответствующего укороченного уравнения

$$\hat{f}_j^{(d)}(x, y) = 0. \tag{1.4}$$

Напомним, что дифференциальной сумме $f(x, y)$ в (1.1) соответствуют носитель $\mathbf{S}(f)$, многоуольник $\Gamma(f)$, являющийся выпуклой оболочкой носителя, обобщенные грани $\Gamma_j^{(d)}$ — вершины и ребра многоугольника $\Gamma(f)$, их нормальные конусы $\mathbf{U}_j^{(d)}$ и укороченные суммы $\hat{f}_j^{(d)}(x, y)$. Пусть

$$\omega = -1, \text{ если } x \to 0,$$

$$\omega = 1, \text{ если } x \to \infty. \tag{1.5}$$

Тогда в разложении (1.2) $\omega \operatorname{Re}\ s < \omega \operatorname{Re}\ r$.

В [1] доказано, что если разложение (1.2) является формальным решением уравнения (1.1) и вектор

$$\omega(1, \operatorname{Re} r) \in \mathbf{U}_j^{(d)}, \tag{1.6}$$

то укороченное решение (1.3) является решением укороченного уравнения (1.4). Там же показано, как вычислять всё разложение (1.2), если найден его ведущий член (1.3). Более того, там доказано и обратное: Если (1.3) — решение укороченного уравнения (1.4) со свойством (1.6), то оно всегда продолжается в решение (1.2) полного уравнения, у которого c_s не сложнее, чем многочлены от $\ln x$.

В § 5 [1] было указано, что укороченное уравнение (1.4) может иметь решение вида

$$y = c_r(\ln x)x^r, \tag{1.7}$$

где $r \in \mathbb{R}$ и $c_r(\ln x)$ — ряд по убывающим степеням $\ln x$. При этом выполнено включеное (1.6). Там же был указан метод вычисления решения (1.7) укороченного уравнения (1.4). Этот метод использует степенное и логарифмическое преобразования и сводит задачу вычисления решения (1.7) уравнения (1.4) к задаче вычисления решения вида (1.2) уравнения вида (1.1). В [2,3] и в § 1.4 [4] показано как решение (1.7) укороченного уравнения (1.4) продолжается в решение вида

$$y = c_r(\ln x)x^r + \sum c_s(\ln x)x^s,\ s \in \mathbf{K} \tag{1.8}$$

полного уравнения (1.1), где $c_s(\ln x)$ суть ряды по убывающим степеням $\ln x$, коэффициенты которых являются рядами по кратным логарифмам $\ln\ln x$, при этом возможность такого продолжения была обусловлена отсутствием критических чисел у решения (1.7).

В настоящей работе отбрасывается это условие и доказывается

Теорема 1. *Если* (1.7) *— решение укороченного уравнения* (1.4) *со свойством* (1.6)*, где* $c_r(\ln x)$ *— степенное разложение по* $\ln x$*, то полное уравнение* (1.1) *имеет решение вида* (1.8)*, где все* $c_s(\ln x)$ *суть степенно–логарифмические разложения по* $\ln x$*, т. е. являются рядами по убывающим степеням* $\ln x$*, коэффициенты которых суть многочлены от* $\ln\ln x$*.*

При этом указывается процедура вычисления таких разложений (1.8), которые в [2,3] были названы *сложными.* В дальнейшем используются техника и терминология плоской степенной геометрии, изложенная в [1] и в гл. 1 [4]. В § 2 излагается теория, а в § 3 даны примеры вычислений.

Ограничение 1. Далее для простоты изложения рассматриваем только случаи, когда вещественны все показатели степени в разложениях и учитываем только вещественные критические числа.

2. Теория

2.1. Решение укороченного уравнения. В § 5 [1] показано, что укороченное уравнение (1.4) имеет решения вида (1.7) только в следующих четырёх случаях.

Случай 1. $d = 1$, т. е. $\Gamma_j^{(d)}$ — ребро. Ребро $\Gamma_j^{(1)}$ — не горизонтально, и соответствующее определяющее уравнение $\tilde{f}_j(c) = 0$ имеет кратный корень.

Случай 2. $d = 1$ и число r является корнем хотя бы одного из двух характеристических уравнений $\chi_k(r)$ для вершин ребра $\Gamma_j^{(1)}$, т. е. одна из двух вершин является *резонансной.*

Случай 3. $d = 0$, т. е. $\Gamma_j^{(d)}$ — вершина, и её характеристический многочлен $\chi_j(r)$ имеет такой кратный корень $r = r_0$, что один из векторов $\pm(1, r)$ лежит в нормальном конусе $\mathbf{U}_j^{(0)}$.

Случай 4. $d = 0$ и один из векторов $\pm(0, 1)$ лежит в $\mathbf{U}_j^{(0)}$, т. е. вершина $\Gamma_j^{(0)}$ — верхняя или нижняя, и характеристический многочлен $\chi_j(r)$ имеет бесконечный корень $r = \infty$, т. е. его старший коэффициент равен нулю.

Там же было показано, как в этих случаях вычисляются решения вида (1.7) укороченного уравнения (1.4). Напомним это для случаев 1 и 2. Пусть $\Gamma_j^{(1)}$ — негоризонтальное ребро с нормальным вектором $(1, r)$, $r \in \mathbb{R}$. Сначала делается степенное преобразование

$$y = x^r z, \tag{2.1}$$

которое переводит укороченное уравнение (1.4) в уравнение вида

$$x^a \hat{g}(x, z) = 0, \tag{2.2}$$

где $a = \text{const} \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{S}(\hat{g})$ лежит на вертикальной оси $q_1 = 0$. Затем делается логарифмическое преобразование

$$\ln x = \xi, \tag{2.3}$$

которое переводит дифференциальную сумму $\hat{g}(x, z)$ в дифференциальную сумму $h(\xi, z) = \hat{g}(x, z)$. Для уравнения $h(\xi, z) = 0$ применяется техника, которая использовалась для исходного уравнения (1.1). А именно, вычисляется его носитель $\mathbf{S}(h)$, строится многоугольник $\Gamma(h)$, его обобщенные грани $\tilde{\Gamma}_k^{(d)}$ и их нормальные конусы $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(d)}$. Поскольку всегда $\xi \to \infty$, то отбираются только правые грани $\tilde{\Gamma}_k^{(d)}$ многоугольника $\Gamma(h)$, и для каждой из них рассматривается соответствующее укороченное уравнение

$$\hat{h}_k^{(d)}(\xi, z) = 0. \tag{2.4}$$

Находятся все его степенные решения

$$z = b_\rho \xi^\rho \tag{2.5}$$

с $(1, \rho) \in \tilde{\mathbf{U}}_k^{(d)}$, и каждое из них с $\rho \neq 0$ продолжается в виде степенно-логарифмического разложения

$$z = b_\rho \xi^\rho + \sum b_\sigma(\ln \xi) \xi^\sigma \tag{2.6}$$

решения уравнения $h(\xi, z) = 0$. Они относятся к случаю 2. Если же $\rho = 0$ у решения (2.5) и оно является кратным корнем для уравнения (2.4), то оно соответствует кратному корню $c = b_0$ определяющего уравнения $\tilde{f}_j(c) = 0$ исходного укороченного уравнения (1.4). После сдвига

$$z = b_0 + w \tag{2.7}$$

получаем уравнение

$$\tilde{h}(\xi, w) \stackrel{def}{=} h(\xi, z) = 0, \tag{2.8}$$

для которого находим решения вида (2.6), (2.7) с $w \to 0$ указанным способом, т. е. через построение многоугольника и т. д.

2.2. Вычисление разложения (1.8). Теперь делаем степенное преобразование (2.1) в полном уравнении (1.1) и после сокращения на x^a получаем уравнение

$$g(x, z) = 0. \tag{2.9}$$

Заметим, что *конус задачи* $\mathcal{K}$ для уравнения (2.9) есть

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\;\; s > 0, \text{если } \omega = -1, \\ \mathrm{Re}\;\; s < 0, \text{если } \omega = 1.\end{gathered} \tag{2.10}$$

То есть ищутся разложения

$$z = c_0(\ln x) + \sum c_s(\ln x) x^s \tag{2.11}$$

решений уравнения (2.9), где выполнены неравенства (2.10).

Пусть $\mathcal{S}(g)$ — вертикальная проекция носителя $\mathbf{S}(g)$ на ось q_1, $\mathcal{S}(g) = \{0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\}$, где $\sigma_i\omega < \sigma_{i-1}\omega < 0$. Каждому σ_i поставим в соответствие дифференциальную сумму $g_i(x, z)$, содержащую все те дифференциальные мономы суммы $g(x, z)$, у которых векторные показатели $Q = (q_1, q_2)$ имеют $q_1 = \sigma_i$. Обозначим $g_1(x, z) \stackrel{def}{=} \hat{\hat{g}}(x, z)$. Тогда

$$g(x, z) = \hat{g}(x, z) + \hat{\hat{g}}(x, z) + \cdots \tag{2.12}$$

Разложение решения (2.11) запишем в виде

$$z = c_0(\ln x) + c_1(\ln x) x^{\sigma_1} + \cdots \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.12) получаем

$$g(x, z) = \hat{g}(x, c_0) + \left.\frac{\delta \hat{g}}{\delta z}\right|_{z\,=\,c_0} c_1 x^{\sigma_1} + \hat{\hat{g}}(x, c_0) + \cdots \tag{2.14}$$

По условию $\hat{g}(x, c_0) = 0$. Поэтому приравнивая (2.14) к нулю, в первом приближении получаем равенство

$$\mathcal{L}(x) c_1 x^{\sigma_1} + \hat{\hat{g}}(x, c_0) = 0, \tag{2.15}$$

где

$$\mathcal{L}(x) = \left.\frac{\delta \hat{g}}{\delta z}\right|_{z\,=\,c_0}, \tag{2.16}$$

т. е. оператор $\mathcal{L}(x)$ — это первая вариация укороченной дифференциальной суммы $\hat{g}(x, z)$, взятой на решении $z = c_0(\ln x)$ укороченного уравнения $\hat{g} = 0$.

Рассмотрим подробнее линейное уравнение для $\varphi(\xi)$ вида

$$\mathcal{L}(x)(x^s \varphi(\xi)) + x^s b(\xi) = 0, \tag{2.17}$$

где $b(\xi)$ — степенно-логарифмическая сумма по ξ. Перейдём к переменной $\xi = \ln x$. Поскольку $\hat{g}(x, z) = h(\xi, z)$, то

$$\frac{\delta \hat{g}}{\delta z} = \frac{\delta h}{\delta z}. \tag{2.18}$$

Обозначим

$$\mathcal{M}(\xi, z) = \frac{\delta h}{\delta z}. \tag{2.19}$$

Очевидно,

$$\mathcal{M}(\xi, z) = \sum_{i=1}^{M} a_i(\xi, z) \mu_i \left(\frac{d}{d\xi}\right), \tag{2.20}$$

где a_i — дифференциальные мономы и μ_i — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$\mu_i \left(\frac{d}{d\xi}\right) = \sum_{k=0}^{l_i} \alpha_{ik} \frac{d^k}{d\xi^k},\ \alpha_{ik} = \mathrm{const} \in \mathbb{C}. \tag{2.21}$$

Выделим в сумме (2.20) ведущие слагаемые при подстановке $z = c_0$ в оператор $\mathcal{M}(\xi, z)$, учитывая (2.6). Для этого воспользуемся плоской степенной геометрией. А именно, каждому дифференциальному моному $a_i(\xi, z)$ суммы (2.20) поставим в соответствие его векторный показатель степени $Q(a_i) = (q_1, q_2)$. Их совокупность $\mathbf{S}(\mathcal{M})$ назовём *носителем оператора* (2.20), а его выпуклую оболочку $\Gamma(\mathcal{M})$ — *его многоугольником.* Из граней $\Gamma_l^{*(d)}$ этого многоугольника выберем ту, для которой нормальный конус $\mathbf{U}_l^{*(d)}$ содержит вектор $(1, \rho)$. Соответствующую этой грани $\Gamma_l^{*(d)}$ подсумму суммы (2.20) обозначим $\hat{\mathcal{M}}(\xi, z)$.

Поскольку $x^s = e^{s\xi}$, то уравнение (2.17) можно записать в виде

$$\mathcal{L}(e^{\xi})(e^{s\xi}\varphi(\xi)) + e^{s\xi} b(\xi) = 0.$$

Лемма 1. *Пусть*

$$\mu\left(\frac{d}{d\xi}\right) = \sum_{l=0}^{N} \mu_l \frac{d^l}{d\xi^l},\ \mu_l = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \tag{2.22}$$

тогда

$$\mu\left(\frac{d}{d\xi}\right)(e^{s\xi}\varphi(\xi)) = e^{s\xi}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\mu^{(k)}(s)\cdot\varphi^{(k)}(\xi), \tag{2.23}$$

где многочлен $\mu(s) = \sum_{l=0}^{N}\mu_l s^l$, $\mu^{(k)}(s)$ *— k-тая производная от* $\mu(s)$ *по* s *и* $\varphi^{(k)}(\xi)$ *— k-тая производная* $\varphi(\xi)$ *по* ξ.

Доказательство. Согласно биному Ньютона

$$\frac{d^l}{d\xi^l}(e^{s\xi}\varphi(\xi)) = \sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}(e^{s\xi})^{(l-k)}\varphi^{(k)}(\xi),$$

где верхние индексы в скобках указывают порядок дифференцировния по ξ. Поскольку

$$(e^{s\xi})^{(l-k)} = s^{l-k}e^{s\xi},$$

$$\frac{d^k}{ds^k}(s^l) = l(l-1)\dots(l-k+1)s^{l-k} = \frac{l!}{(l-k)!}s^{l-k},$$

то

$$\frac{d^l}{d\xi^l}(e^{s\xi}\varphi(\xi)) = e^{s\xi}\sum_{k=0}^{l}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}(s^l)\varphi^{(k)}(\xi).$$

Отсюда и из (2.22) следует (2.23). Доказательство леммы окончено.

Выделим теперь ведущий член по ξ, т. е. член наибольшей степени, в сумме

$$e^{-s\xi}\mathcal{L}(e^{\xi})(e^{s\xi}\varphi(\xi)). \tag{2.24}$$

При этом ведущие члены в операторе $\mathcal{M}(\xi, z)$ из (2.20) образуют оператор

$$\hat{\mathcal{M}}(\xi, z) = \sum_{i=1}^{m} a_i(\xi, z)\mu_i(\frac{d}{d\xi}). \tag{2.25}$$

Согласно лемме 1

$$e^{-s\xi}\hat{\mathcal{M}}(\xi, z)(e^{s\xi}\varphi(\xi)) = \sum_{i=1}^{m} a_i(\xi, z)\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\mu_i^{(k)}(s)\varphi^{(k)}(\xi). \tag{2.26}$$

При подстановке (2.5) все $a_i(\xi, z)$ в (2.26) будут иметь одинаковую степень α по ξ; пусть

$$a_i(\xi, b_\rho\xi^\rho) = A_i\xi^\alpha,\ A_i = \mathrm{const},\ i = 1, \dots, m'.$$

Тогда ведущий член в (2.26) есть

$$\sum_{i=1}^{m} A_i\mu_i(s)\varphi(\xi). \tag{2.27}$$

Обозначим сумму
$$\nu(s) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{m} A_i \mu_i(s) \tag{2.28}$$
и назовём её *характеристическим многочленом решения* (2.6) укороченного уравнения $\hat{g} = 0$. Вещественные корни s_i этого многочлена, которые лежат в конусе задачи $\mathcal{K}$, назовём *критическими числами первого уровня решения* (2.6).

Пусть $z = c_0(\xi)$ — решение (2.6) укороченного уравнения $\hat{g}(x, z) = 0$. После замены
$$z = c_0(\ln x) + w \tag{2.29}$$
уравнение $g(x, y) = 0$ перейдёт в уравнение
$$\tilde{g}(x, w) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(x) w + H(x, w) = 0, \tag{2.30}$$
которое содержит $\ln x$. Будем предполагать, что $\mathcal{L}(x) \not\equiv 0$. Напомним, что $\ln x$ имеет нулевой показатель степени. Рассмотрим носитель $\mathbf{S}(\tilde{g})$. Он содержит точку $(0, 1)$, соответствующую слагаемому $\mathcal{L}(x)w$, и эта точка расположена вне носителя $\mathbf{S}(H)$ и многоугольника $\Gamma(H)$. Проекция носителя $\mathbf{S}(\tilde{g})$ на ось q_1 совпадает с множеством $\mathcal{S}$, т. е. проекцией множества $\mathbf{S}(g)$. Пусть $\mathbf{K}(s_1, \ldots, s_n)$ — множество конечных сумм точек из множества $\mathcal{S}$ и точек $s_1, \ldots, s_n$. Будем считать, что критические числа s_i упорядочены: $\omega s_i < \omega s_{i+1}$. Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — некоторое подмножество критических чисел первого уровня, сохраняющее указанную упорядоченность. Допускаются и пустые подмножества.

Теорема 2. *Если укороченное уравнение $\hat{g} = 0$ имеет решение $z = c_0(\ln x)$ в виде степенного разложения по $\ln x$, то уравнение (2.30) имеет формальное решение (2.11), где $s \in \mathbf{K}(s_1, \ldots, s_n)$, c_s суть ряды по убывающим степеням $\ln x$, коэффициенты в которых являются многочленами от $\ln\ln x$, и $s_1, \ldots, s_n$ — критические числа первого уровня укороченного решения (2.6), может быть не все. Если ни одно из критических чисел $s_i \in \{s_1, \ldots, s_n\}$ первого уровня не лежит в множестве $\mathbf{K}(s_1, \ldots, s_{i-1})$, то в разложении (2.11) с $s \in \mathbf{K}(s_1, \ldots, s_n)$ все $c_s(\ln x)$ являются степенными разложениями без кратных логарифмов.*

Доказательство. Двигаясь по точкам s множества $\mathbf{K}(s_1, \ldots, s_n)$ в направлении возрастания $-\omega s$, для каждого коэффициента $c_s(\ln x) = \varphi(\xi)$ получаем линейное уравнение вида (2.17), где $b(\xi)$ — многочлен от предыдущих c_p и их производных. Кроме того, $b(\xi)$ зависит от коэффициентов суммы H в (2.30). Пусть утверждение теоремы справедливо для всех c_p с $\omega p > \omega s$.

Тогда $b(\xi)$ — ряд по убывающим степеням ξ, коэффициенты которого суть многочлены от $\ln\xi$. Если число s не является критическим, то ведущий член для $x^{-s}\mathcal{L}(x)(x^s\varphi(\xi))$ имеет вид $\xi^a\nu(s)\varphi$ с $\nu(s)\neq 0$. Поэтому уравнение (2.17) имеет однозначное решение $\varphi(\xi)$ указанного вида. Если число s является критическим, то $\nu(s)=0$ и ведущий по ξ член для $x^{-s}\mathcal{L}(x)(x^s\varphi(\xi))$ имеет вид $\xi^a\sum_{i=0}^N\gamma_i\xi^i\varphi^{(i)}(\xi)$, где γ_i суть постоянные, а $\varphi^{(i)}(\xi)$ — i-тая производная. Тогда разлагая φ в ряд по степеням ξ: $\varphi=\sum\varphi_k\xi^k$ для каждого коэффициента φ_k получаем линейное дифференциальное уравнение, имеющее решением функцию от $\ln\xi$, которая иногда содержит произвольную постоянную. Рассмотрим это подробнее для случая, когда выполнено

Условие 1. В разложении $c_0(\ln x)$ (2.6) по степеням $\ln x$ шаг между показателями степени равен единице, т. е.

$$c_0(\xi)=\xi^\rho\sum_{k=0}^{-\infty}\beta_k\xi^k, \tag{2.31}$$

где ρ — произвольное число и β_k — постоянные.

Разложим оператор $\mathcal{L}(x)$ по степеням ξ:

$$\mathcal{L}(x)=\xi^\beta\sum_{k=0}^{-\infty}\xi^kL_k\left(\frac{d}{d\xi}\right),$$

где $L_k\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)$ – дифференциальные операторы вида (2.21). Согласно лемме 1

$$e^{-s\xi}\mathcal{L}(x)(e^{s\xi}\varphi(\xi))=\xi^\beta\sum_{k=0}^{-\infty}\xi^k\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}L_k^{(j)}(\ln\xi,s)\varphi^{(j)}(\xi), \tag{2.32}$$

где N — наибольший порядок дифференцирования в исходном уравнении (1.1). Выпишем по убыванию порядка по ξ несколько первых членов разложения (2.32), считая $\varphi(\xi)$ степенной функцией $c_\gamma\xi^\gamma$. Старший член порядка β имеет вид

$$L_0(s)\varphi, \tag{2.33}$$

следующий член порядка $\beta-1$ имеет вид

$$L_0'(s)\dot\varphi+L_{-1}(s)\varphi, \tag{2.34}$$

третий член порядка $\beta-2$ имеет вид

$$\frac{1}{2}L_0''(s)\ddot\varphi+L_{-1}'(s)\dot\varphi+L_{-2}\varphi, \tag{2.35}$$

четвёртый член порядка $\beta - 3$ есть

$$\frac{1}{6}L_0'''(s)\,\dddot{\varphi} + \frac{1}{2}L_{-1}''(s)\ddot{\varphi} + L_{-2}'(s)\dot{\varphi} + L_{-3}\varphi. \qquad (2.36)$$

Здесь и далее точка сверху обозначает производную по ξ. Будем искать решение уравнения (2.17) вида

$$\varphi(\xi) = \xi^\gamma \sum_{k=0}^{-\infty} \varphi_k \xi^k. \qquad (2.37)$$

Если число s не является критическим, то $L_0(s) \neq 0$ и уравнение (2.17) решается последовательно по убыванию степени ξ, причём для каждого коэффициента φ_k получается алгебраическое уравнение вида

$$L_0(s)\varphi_k + \psi_k(\ln\xi) = 0. \qquad (2.38)$$

Поэтому ряд $\varphi(\xi)$ определяется однозначно. Пусть s — критическое число, тогда $L_0(s) = 0$. Если $|L_0'(s)| + |L_{-1}(s)| \neq 0$, то согласно (2.34) в (2.30) старший член имеет вид $\xi^\beta[L_0'(s)\dot{\varphi} + L_{-1}(s)\varphi]$. Для разложения (2.37) он даёт характеристическое уравнение

$$L_0'(s)(\gamma + k) + L_{-1}(s) = 0. \qquad (2.39)$$

Уравнение (2.17) решается последовательно по убыванию степеней ξ как в теореме 3.1 [1], и каждый коэффициент φ_k находится из алгебраического уравнения вида (2.38), если k не является корнем уравнения (2.39), т. е. не является критическим. Если число k является корнем уравнения (2.39), то для φ_k получаем дифференциальное уравнение. Согласно лемме 3.2 [1] это уравнение имеет решение φ_k в виде многочлена от $\ln\xi$, содержащего одну произвольную постоянную.

Если $|L_0'(s)| + |L_{-1}(s)| = 0$, то получаем характеристическое уравнение

$$\frac{1}{2}L_0''(s)(\gamma + k)(\gamma + k - 1) + L_{-1}'(s)(\gamma + k) + L_{-2}(s) = 0. \qquad (2.40)$$

Для его корней $\gamma + k$ (критических чисел второго уравнения) коэффициенты φ_k в разложении (2.37) содержат произвольную постоянную. Если корень кратный, то — две.

Аналогично, для каждого критического числа первого уровня s получаем несколько (не меньше одного) критических чисел второго уровня k_i. В каждом критическом числе второго уровня в решении линейного уравнения (2.17) получаем одну произвольную постоянную, и решение $\varphi(\xi)$ будет рядом по степеням ξ, коэффициенты которых являются многочленами от $\ln\xi$.

Но если критическое число первого уровня $s = s_i$ не лежит в множестве $\mathbf{K}(s_1 \ldots, s_{i-1})$, то в соответствующем уравнении (2.17) член $b(\xi) \equiv 0$. Получается однородное линейное уравнение для $\varphi(\xi)$, в решениях которого отсутствует $\ln \xi$. Доказательство окончено.

Очевидно, что теорема 1 следует из теоремы 2.

Теперь рассмотрим случай, когда укороченное решение $z = c_0(\xi)$ является степенно–логарифмическим по ξ.

Условие 2. Решение $c_0(\xi)$ имеет вид (2.31), где β_k с $k < 0$ суть многочлены от $\ln \xi$, но для каждого критического числа s первого уровня ведущие члены в $e^{-s\xi}\mathcal{L}(x)(e^{s\xi}\varphi)$ не содержат кратных логарифмов $\ln \xi$.

Теорема 3. *Если укороченное решение* (2.31) *является степенно–логарифмическим по* $\xi = \ln x$ *и выполнено условие* 2, *то в разложении* (2.11) *решения полного уравнения* (2.9) *все ряды* $c_s(\xi)$ *являются степенно–логарифмическими по* ξ.

Доказательство. Действительно, при условии 2 дифференциальные операторы $L_k\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)$ зависят от $\ln \xi$, т. е. их коэффициенты являются многочленами от $\ln \xi$: $L_k\left(\dfrac{d}{d\xi}\right) = L_k\left(\ln \xi, \dfrac{d}{d\xi}\right)$. Следовательно, $L_k(s)$ и их производные суть многочлены от $\ln \xi$. Но поскольку коэффициент φ_0 в (2.17) является постоянной, то $\nu(s)$ в (2.27) не зависит от $\ln \xi$. Поскольку $L_0(s) = \nu(s)$, то L_0 также не зависит от $\ln \xi$, но по условию 2 многочлены $L_k(s)$ и их производные, участвующие в характеристическом уравнении второго уровня, не зависят от $\ln \xi$. Поэтому критические числа k_i второго уровня определяются однозначно и решения $\varphi(\xi)$ уравнения (2.17) для критического s являются рядами по степеням ξ с полиномиальными по $\ln \xi$ коэффициентами и зависящими от нескольких произвольных постоянных. Теорема доказана.

Лемма 2. *Если укороченная сумма* (2.25) *состоит из одного слагаемого*

$$\hat{\mathcal{M}}(\xi, z) = a_1(\xi, z)\mu_1\left(\frac{d}{d\xi}\right), \tag{2.41}$$

то первое характеристическое уравнение второго уровня (2.39) *не зависит от* $\ln \xi$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}} + \hat{\hat{\mathcal{M}}} + \ldots$, где $\hat{\hat{\mathcal{M}}}$ содержит все те слагаемые $a_i\mu_i$ суммы (2.20), для которых скалярные произведения $\langle Q(a_i), (1, \rho)\rangle$ на единицу меньше, чем для членов, вошедших в $\hat{\mathcal{M}}$. Тогда при подстановке (2.6) в $a_1(\xi, z)$ получаем

$$a_1(\xi,\ b_\rho\xi^\rho + b_{\rho-1}\xi^{\rho-1} + \ldots) = a_1(\xi,\ b_\rho\xi^\rho) + \frac{\partial a_1}{\partial z}(\xi,\ b_\rho\xi^\rho)b_{\rho-1}\xi^{\rho-1} + \ldots$$

Следовательно,

$$L_0 = \hat{\mathcal{M}}\Big|_{z\,=\,b_\rho \xi^\rho},$$

$$L_{-1} = \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}}{\partial z}\bigg|_{z\,=\,b_\rho \xi^\rho} b_{\rho-1}\xi^{\rho-1} + \hat{\hat{\mathcal{M}}}\Big|_{z\,=\,b_\rho \xi^\rho}.$$

Вследствие свойства (2.41) $\dfrac{\partial \hat{\mathcal{M}}}{\partial z}$ пропорционально $\mu_1\left(\dfrac{d}{d\xi}\right)$ и для критического числа s имеем $\mu_1(s) = 0$, т. е. $\dfrac{\partial \hat{\mathcal{M}}}{\partial z}$ также аннулируется. Поэтому

$$L_{-1} = \hat{\hat{\mathcal{M}}}\Big|_{z\,=\,b_\rho \xi^\rho}(s).$$

Следовательно, $L_0'(s)$ и $L_{-1}(s)$ не зависят от $b_{\rho-1}$, т. е. не содержат $\ln \xi$. Лемма доказана.

Замечание 1. Величины s здесь и k в [2,3,4] связаны равенством $k = r+s$.

2.3. Случаи 1, 3, 4. В случае 1 в уравнении (2.9) делается сдвиг (2.7) и все построения п. 2.2 применяются к получившемуся уравнению. Случай 3 сводится к случаю 1 после степенного преобразования (2.1) и логарифмического преобразования $\ln z = \zeta$. Случай 4 сводится к случаю 2 в результате аналогичного логарифмического преобразования $\ln y = \zeta$.

3. Примеры

Примеры вычислений, доказывающих существование сложных разложений приведены в [2, 3]. Здесь для этих же случаев приведём вычисления по схеме § 2, которые короче и проще, чем в [2, 3]. Кроме того, рассмотрим ещё несколько примеров, относящихся к уравнениям Пенлеве.

3.1. Уравнение из [1]. Рассмотрим уравнение (2.1) из [1, § 2]

$$f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2y'^2 - 2x^2yy'' + ay^2 + x^2y^2 - x^4 = 0, \tag{3.1}$$

где a — вещественный параметр. На рис. 1 показан многоугольник $\Gamma(f)$, который является треугольником. Согласно [1, § 6] нестепенные асимптотики даются тремя укороченными уравнениями, соответствующими вершинам $\Gamma_1^{(0)}$ и рёбрам $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ при определённых значениях параметра a. Но ребро $\Gamma_2^{(1)}$ горизонтально, и для соответствующей ему нестепенной асимптотики изложенная в § 2 теория неприменима, поэтому рассмотрим только вершину $\Gamma_2^{(0)}$ и ребро $\Gamma_1^{(1)}$ в примерах 1 и 2 соответственно.

Пример 1. Вершине $\Gamma_1^{(0)}$ рис. 1 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(0)}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2y'^2 - 2x^2yy'' + ay^2 = 0. \tag{3.2}$$

Его характеристический многочлен

$$r^2 - 2r(r-1) + a = -r^2 + 2r + a \tag{3.3}$$

имеет корни

$$r = 1 \pm \sqrt{1+a},$$

которые совпадают при $a = -1$. Это случай 3. Согласно [1, п. 6.1] при $a = -1$ уравнение (3.2) имеет двухпараметрическое семейство нестепенных решений

$$y = cx(\ln x + \tilde{c})^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} xc_0(\ln x), \tag{3.4}$$

где c и $\tilde{c}$ — произвольные постоянные, $c \neq 0$. Найдём дальнейшее разложение. Здесь $r = 1$ и c_0 является многочленом от $\xi = \ln x$. Делаем степенное преобразование (2.4)

$$y = xz. \tag{3.5}$$

Тогда $y' = z + xz'$, $y'' = 2z' + xz''$. Следовательно, уравнение (3.2) после сокращения на x^2 принимает вид

$$\hat{g} \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^2 z'^2 - 2xzz' - 2x^2 zz'' = 0.$$

Сделаем в нём логарифмическую замену $\xi = \ln x$. Производную по ξ будем обозначать точкой. Поскольку

$$z' = \dot{z}/x, \;\; z'' = (\ddot{z} - \dot{z})/x^2,$$

то получим уравнение

$$h(\xi, z) = \dot{z}^2 - 2z\ddot{z} = 0.$$

Легко видеть, что все его решения имеют вид

$$z = c(\xi + \tilde{c})^2, \tag{3.6}$$

где c и $\tilde{c}$ — произвольные постоянные. Их можно получить с помощью логарифмической замены $\ln z = \zeta$. Тогда $\dot{z} = 2c(\xi + \tilde{c})$, $\ddot{z} = 2c$.

Вычислим первую вариацию

$$\frac{\delta h}{\delta z} = 2\dot{z}\frac{d}{d\xi} - 2\ddot{z} - 2z\frac{d^2}{d\xi^2} = \mathcal{M}(\xi, z, \frac{d}{d\xi}). \tag{3.7}$$

Её носитель состоит из трёх точек $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$ (см. рис. 2). Согласно (3.6) здесь $\rho = 2$ и наибольшее значение скалярного произведения вектора $(1, \rho)$ с этими точками достигается на последней точке $(0, 1)$. Следовательно, $\mathcal{M} = -2z\dfrac{d^2}{d\xi^2}$ и

$$\nu(s) = -2cs^2.$$

Поскольку $c \neq 0$, то при любом $s \neq 0$ многочлен $\nu(s) \neq 0$ и критических чисел первого уровня нет. Здесь множество $\mathbf{K}$ состоит из чётных натуральных чисел. Согласно теореме 2 уравнение (3.1) при $a = -1$ имеет двухпараметрическое семейство решений

$$y = x[c(\ln x + \tilde{c})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k}(\ln x) x^{2k}].$$

Вычислим $\varphi_2(\ln x)$. Согласно (3.7)

$$a_1 = -2z,\ a_2 = 2\dot{z},\ a_3 = -2\ddot{z},$$

$$\mu_1(\frac{d}{d\xi}) = \frac{d^2}{d\xi^2},\ \mu_2(\frac{d}{d\xi}) = \frac{d}{d\xi},\ \mu_3(\frac{d}{d\xi}) = 1,$$

Положим $\ln x + \tilde{c} = \xi$, тогда $z = \varphi_0 = c\xi^2$, поэтому

$$L_0 = -2c\xi^2 s^2,\ L_{-1} = 4c\xi s,\ L_{-2} = 4c.$$

Согласно лемме 1 уравнение для φ_s имеет вид

$$-2c\xi^2(s^2\varphi_s + 2s\dot{\varphi}_s + \ddot{\varphi}_s) + 4c\xi(s\varphi_s + \dot{\varphi}_s) - 4c\varphi_s + b_s = 0.$$

Поскольку $\hat{\hat{g}} = x^2(z^2 - 1)$, то $b_2 = \varphi_0^2 - 1$ и при $s = 2$ получаем уравнение

$$-2c\xi^2(4\varphi_2 + 4\dot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_2) + 4c\xi(2\varphi_2 + \dot{\varphi}_2) - 4c\varphi_2 + c^2\xi^4 - 1 = 0.$$

Носитель этого уравнения см. на рис. 3, а его решение имеет вид

$$\varphi_2 = \frac{c}{8}(\xi^2 - \xi) - \frac{1}{8c\xi^2} + O(\xi^{-3}).$$

Оно отличается от решния φ_3 в [2] на стр. 11, ибо там были арифметические ошибки.

Пример 2. Вершине $\Gamma_1^{(1)}$ рис. 1 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{f}_1^{(1)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 y'^2 - 2x^2 y y'' + a y^2 - x^4 = 0. \tag{3.8}$$

Верхней вершине $\Gamma_1^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение (3.2) Его характеристический многочлен (3.3) при $a = 0$ имеет корень $r = 2$, который соответствует наклону ребра $\Gamma_1^{(1)}$, т. е. $\Gamma_1^{(0)}$ — резонансная вершина (случай 2). Положим $a = 0$ и сделаем степенное преобразование

$$y = x^2 z, \tag{3.9}$$

тогда $y' = 2xz + x^2 z'$ и $y'' = 2z + 4xz' + x^2 z''$. Уравнение (3.8) после сокращения на x^4 принимает вид

$$\hat{g} \stackrel{\text{def}}{=} x^2 z'^2 - 4xzz' - 2x^2 z z'' - 1 = 0. \tag{3.10}$$

После логарифмического преобразования $\ln x = \xi$, получаем уравнение

$$h \stackrel{\text{def}}{=} \dot{z}^2 - 2z\dot{z} - 2z\ddot{z} - 1 = 0. \tag{3.11}$$

Его носитель и многоугольник показаны на рис. 4.

Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$-2z\dot{z} - 1 = 0$$

с решениями

$$z = \pm i\sqrt{\xi}.$$

Продолжая их в разложения для решений полного уравнения (3.11), получаем

$$z = \pm i\sqrt{\xi}\left[1 + \frac{3}{8}\frac{(\ln\xi + c)}{\xi} - \frac{1}{2}\frac{3^2(\ln\xi + c)^2}{8\xi^2} + O(\xi^{-3})\right], \tag{3.12}$$

где c — произвольная постоянная и в квадратных скобках разложение идёт по целым степеням ξ, т. е. с единичным шагом.

В формуле (6.25) [1] второе слагаемое в квадратных скобках указано неправильно из-за арифметической ошибки вычисления. Этот случай интересен тем, что уже во втором слагаемом имеется кратный логарифм. Продолжим решения (3.12) укороченного уравнения в сложные разложения решений полного уравнения (3.1), которое после замены (3.9) и сокращения на x^4 имеет вид

$$g(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g} + x^2 z^2 = 0, \tag{3.13}$$

где $\hat{g}$ дано в (3.10) и $\hat{\hat{g}} = x^2 z^2$. Согласно (3.11) здесь первая вариация

$$\frac{\delta h}{\delta z} = 2\dot{z}\frac{d}{d\xi} - 2z\frac{d}{d\xi} - 2\dot{z} - 2z\frac{d^2}{d\xi^2} - 2\ddot{z} = -2z\left(\frac{d}{d\xi} + \frac{d^2}{d\xi^2}\right) + 2\dot{z}\left(\frac{d}{d\xi} - 1\right) - 2\ddot{z}.$$

Носитель этого оператора см. на рис. 2. Здесь $a_1 = -2z$, $a_2 = 2\dot{z}$ $a_3 = -2\ddot{z}$,

$$\mu_1\left(\frac{d}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi} + \frac{d^2}{d\xi^2},\ \mu_2 = \ \frac{d}{d\xi} - 1,\ \mu_3\left(\frac{d}{d\xi}\right) = 1.$$

Поскольку теперь $\rho = 1/2$, то ведущим является слагаемое $a_1\mu_1$, т. е.

$$\nu(s) = -2(\pm i)(s + s^2).$$

Этот многочлен имеет единственный ненулевой корень $s = -1$. Но конус задачи здесь есть $s > 0$, поэтому критических чисел нет. Кроме того, множество $\mathbf{K}$ состоит из чётных натуральных чисел, т. е. согласно теореме 3 решение полного уравнения (3.13) имеет вид

$$z = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k} x^{2k}.$$

где φ_0 даны в (3.12). Вычислим φ_2. Аналогично примеру 1 здесь

$$e^{-2\xi}\mathcal{L}(e^{2\xi}\varphi) = a_1[\mu_1(2)\varphi + \mu_1'(2)\dot\varphi + \frac{1}{2}\mu_1''(2)\ddot\varphi] + a_2[\mu_2(2)\varphi + \mu_2'(2)\dot\varphi] + a_3\varphi$$

и уравнение (2.17) для $s = 2$ есть

$$-2z[6\varphi + 5\dot\varphi + \ddot\varphi] + 2\dot z[\varphi + \dot\varphi] - 2\ddot z\varphi + z^2 = 0,$$

где z даётся формулой (3.12). Носитель этого уравнения показан на рис. 5. Укороченное уравнение есть $-2(\pm i)6\varphi - \xi = 0$, т. е.

$$\varphi = \pm i\frac{1}{12}\xi + \dots.$$

Если бы конус задачи был $s < 0$, то значение $s = -1$ было бы критическим. Но здесь работает лемма 2 и первое характеристическое уравнение второго уровня (2.39) есть

$$a_1\mu_1'(-1)k + a_2\xi\mu_2(-1) = 0,$$

где a_1 и a_2 берутся при $z = \pm i\sqrt{\xi}$, т. е. это уравнеие имеет вид

$$2z[k-1] = 0,$$

ибо $\mu_1' = 1 + 2s$, $\mu_1'(-1) = -1$, $\mu_2(-1) = -2$ и $\dot z\xi = \dfrac{1}{2}z$. Следовательно, критическое число второго уровня $k = 1$ и применима теорема 3.

3.2. Третье уравнение Пенлеве, записанное в виде дифференциальной суммы, есть

$$f(x,y) \overset{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + ay^3 + by + cxy^4 + dx = 0, \tag{3.14}$$

где a, b, c, d — комплексные параметры. Его носитель и многоугольник показаны на рис. 6. Вершине $\Gamma_1^{(0)} = (-1, 2)$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat f_1^{(0)} \overset{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

Его характеристический многочлен $\chi(x) = -r(r-1) + r^2 - r$ тождественно равен нулю. Поэтому любое чило r является его корнем. В частности, $r = 1$, что соответствует наклону нижнего ребра $\Gamma_1^{(1)}$, т. е. вершина $\Gamma_1^{(0)}$ является резонансной для ребра $\Gamma_1^{(1)}$. Это случай 2. Здесь можно ожидать нестепенного решения укороченного уравнения. Ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat f_1^{(1)} \overset{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + by + dx = 0.$$

Степенное преобразование $y = xz$ и сокращение на x приводит его к виду

$$\hat g \overset{\text{def}}{=} -x^2zz'' + x^2z'^2 - xzz' + bz + d = 0,$$

а логарифмическое преобразование $\ln x = \xi$ даёт уравнение

$$h \stackrel{\text{def}}{=} -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz + d = 0. \tag{3.15}$$

Его носитель и многоугольник показаны на рис. 7 в случае $bd \neq 0$.

Пример 3. Рассмотрим случай $b \neq 0$. Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ рис. 7 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_1^{(1)} = -z\ddot{z} + \dot{z}^2 + bz = 0.$$

Оно имеет степенное решение $z = -b\xi^2/2$. Продолжая его разложение по убывающим степеням ξ, получаем решение уравнения (3.15)

$$z = -\frac{b}{2}(\xi + \tilde{c})^2 - \frac{d}{2b}, \tag{3.16}$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная. По (3.15) первая вариация

$$\frac{\delta h}{\delta z} = -\ddot{z} - z\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\dot{z}\frac{d}{d\xi} + b. \tag{3.17}$$

Её носитель содержит три точки рис. 2 и точку $(0, 0)$. Поэтому

$$\mathcal{M}(\xi, z, \frac{d}{d\xi}) = a_1\mu_1\left(\frac{d}{d\xi}\right) + a_2\mu_2\left(\frac{d}{d\xi}\right) + a_3\mu_3 + a_4\mu_3,$$

где

$$a_1 = -z,\ a_2 = 2\dot{z},\ a_3 = -\ddot{z},\ a_4 = b,$$
$$\mu_1 = \frac{d^2}{d\xi^2},\ \mu_2 = \frac{d}{d\xi},\ \mu_3 = 1. \tag{3.18}$$

Поскольку $\rho = 2$, то ведущим является слагаемое $a_1\mu_1$. Оно даёт характеристический многочлен $\mu_1(s) = s^2$, который не имеет ненулевых корней. Следовательно, критических чисел нет и применима теорема 2. После степенного преобразования $y = xz$ и сокращения на x полное уравнение (3.14) переходит в

$$g \stackrel{\text{def}}{=} -x^2zz'' + x^2z'^2 - xzz' + bz + d + ax^2z^3 + cx^4z^4 = 0. \tag{3.19}$$

Здесь $\hat{\hat{g}} = ax^2z^3$. Множество $\mathbf{K}$ состоит из всех чётных натуральных чисел. По теореме 2 решение уравнения (3.19) имеет вид

$$z = \varphi_0(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2k}(\xi)x^{2k}, \tag{3.20}$$

где φ_0 даётся формулой (3.16).

Вычислим $\varphi_2(\xi)$. Положим $\xi = \ln x + \tilde{c}$, тогда (3.16) принимает вид

$$z = -\frac{b}{2}\xi^2 - \frac{d}{2b}. \tag{3.21}$$

Уравнение для $\varphi = \varphi_2$ есть

$$a_1[\mu_1(2)\varphi + \mu_1'(2)\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\mu_1''(2)\ddot{\varphi}] + a_2[\mu_2(2)\varphi + \mu_2'(2)\dot{\varphi}] + 2b\varphi + az^3 = 0, \tag{3.22}$$

где z даётся формулой (3.21) и учтено, что $a_3 = b$. Учитывая (3.15) и (3.21), получаем

$$\left(\frac{b}{2}\xi^2 + \frac{d}{2b}\right)[4\varphi + 4\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}] - 2b\xi[2\varphi + \dot{\varphi}] + 2b\varphi = a\left[\frac{b}{2}\xi^2 + \frac{d}{2b}\right]^3. \tag{3.23}$$

Носитель этого уравнения показан на рис. 8. Решение имеет вид

$$\varphi = \frac{a}{4}\left(\frac{b}{2}\xi^2\right)^2 + O(\xi^3).$$

Если $d = 0$, то уравнение сильно упрощается

$$\frac{1}{2}\xi^2[4\varphi + 4\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}] - 2\xi[2\varphi + \dot{\varphi}] + 2\varphi = a\frac{b^2}{8}\xi^6$$

и имеет полиномиальное решение

$$\varphi_2 = \varphi = \frac{ab^2}{16}\xi(\xi - 1)(\xi^2 - \xi + 1).$$

Можно показать, что в этом случае все $\varphi_{2k}(\xi)$ в разложении (3.20) являются полиномами. Однако, если $d \neq 0$, то решение уравнения (3.23) является бесконечным рядом

$$\varphi = \sum_{k=4}^{-\infty} c_k \xi^k.$$

Пример 4. Рассмотрим уравнение (3.14) в случае $b = 0$, $d \neq 0$. Тогда уравнение (3.15) имеет решение

$$z = \pm\sqrt{-d}(\ln x + \tilde{c}),$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная. Здесь остаются справедливыми формулы (3.15), (3.17), (3.18), только там $b = 0$ и a_4 отсутствует. Теперь $\rho = 1$ и ведущим в (3.18) по-прежнему является слагаемое $a_1\mu_1$. Поэтому многочлен $\nu(s)$ пропорционален s^2 и не имеет ненулевого корня. Разложение решения полного уравнения (3.19) имеет вид (3.20), где $\varphi_0 = \pm\sqrt{-d}\xi$, ибо положим

$\xi = \ln x + \tilde{c}$. Уравнение для $\varphi = \varphi_2$ снова есть (3.22) с $b = 0$ и $z = \pm\sqrt{-d}\xi$, т. е.

$$\mp\sqrt{-d}\xi\,[4\varphi + 4\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}] \pm 2\sqrt{-d}[2\varphi + \dot{\varphi}] = \pm d\sqrt{-d}a\xi^3.$$

Сокращая на $\pm\sqrt{-d}$, получаем уравнение

$$-\xi\,[4\varphi + 4\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}] + [2\varphi + \dot{\varphi}] = ad\xi^3.$$

Оно имеет полиномиальное решение

$$\varphi = -\frac{ad}{4}(\xi^2 - \xi + \frac{1}{2}).$$

Можно показать, что в этом случае все $\varphi_{2k}(\xi)$ в разложении (3.20) являются полиномами.

3.3. Шестое уравнение Пенлеве. Его носитель и многоугольник показан на рис. 9. Правому вертикальному ребру $\Gamma_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение, которое после сокращения на x^3 и введения $\xi = \ln x$, принимает вид

$$h \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2\ddot{y}y(y-1) + \dot{y}^2(2y-1) - 2b(y-1)^2 - 2cy^2 = 0. \tag{3.24}$$

Его носитель при $b + c \neq 0$ показан на рис. 10.

Пример 5. Рассмотрим уравнение (3.24) при $b + c \neq 0$. Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ рис. 10 соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h} \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2y - 2(b+c)y^2 = 0.$$

Оно имеет степенное решение $y = (b+c)\xi^2/2$. Продолжая его в виде ряда по ξ, получаем решение уравнения (3.24)

$$y = \frac{b+c}{2}(\ln x + \tilde{c})^2 + \frac{b}{b+c}, \tag{3.25}$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная.

Первая вариация для (3.24) есть

$$\frac{\delta h}{\delta y} = -2y^2\frac{d^2}{d\xi^2} + 4y\dot{y}\frac{d}{d\xi} + 2y\frac{d^2}{d\xi^2} - 4y\ddot{y} - 2\dot{y}\frac{d}{d\xi} + 2\dot{y}^2 - 4(b+c)y + 4b. \tag{3.26}$$

Её носитель показан на рис. 11. Согласно (3.25) здесь $\rho = 2$. Поэтому ведущим слагаемым является $-2y^2\dfrac{d^2}{d\xi^2}$ с $a_1 = -2y^2$ и $\mu_1 = \dfrac{d^2}{d\xi^2}$, т. е. $\mu_1(s) = s^2$. Критических чисел нет, и имеется сложное разложение решения, начинающееся с (3.25).

Пример 6. Рассмотрим уравнение (3.24) при $b + c = 0$ и $b \neq 0$. Тогда оно есть

$$h \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + \dot{y}^2(2y-1) + 4by - 2b = 0. \tag{3.27}$$

Его носитель и многоугольник см. на рис. 12. Ребру $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h} \stackrel{\text{def}}{=} -2\ddot{y}y^2 + 2\dot{y}^2 y + 4by = 0. \tag{3.28}$$

Оно имеет степенное решение

$$y = \pm\sqrt{-2b}\xi.$$

Продолжая его, получаем степенное разложение решения уравнения (3.27)

$$y = \pm\sqrt{-2b}(\xi + \tilde{c}), \tag{3.29}$$

где $\tilde{c}$ — произвольная постоянная. Первая вариация от (3.27) есть (3.26) с $b + c = 0$. Её носитель см. на рис. 11. Согласно (3.29) теперь $\rho = 1$, но ведущим по-прежнему является слагаемое $-2y^2 \dfrac{d^2}{d\xi^2}$. Поэтому, как и в примере 5, критических чисел нет и имеется сложное разложение решения, не содержащее кратных логарифмов $\ln \ln x$.

Замечание 2. Для уравнений Пенлеве, укороченные уравнения, имеющие логарифмические решения, с помощью степенных преобразований вида $y = x^{\pm 1}z$ и $y = z^{-1}$ сводятся к двум типам, рассмотренным в пп. 3.2 и 3.3. Они встречаются только у третьего (п. 3.2) [5], пятого (пп. 3.2 и 3.3) [6] и шестого (п. 3.3) [4] уравнений Пенлеве. Логарифмические решения самих укороченных уравнений очень просты, также относятся к двум видам и не содержат кратных логарифмов $\ln \ln x$.

Гипотеза. *Для уравнений Пенлеве в сложных разложениях решений* (2.11) *коэффициенты* $c_k(\ln x)$ *являются рациональными функциями от* $\ln x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН, 2004. Т. 59. № 3. С. 31-80.

2. *Брюно А.Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт № 36. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2005. 16 с.

3. *Брюно А.Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2006. Т.406. № 6. С. 730-733.

4. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды ММО. 2010. Т. 71. С. 6-118.

5. *Брюно А.Д., Гриднев А.В.* Нестепенные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт № 10. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. 18 с.

6. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве. Препринт № 72. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша. 2010. 27 с.

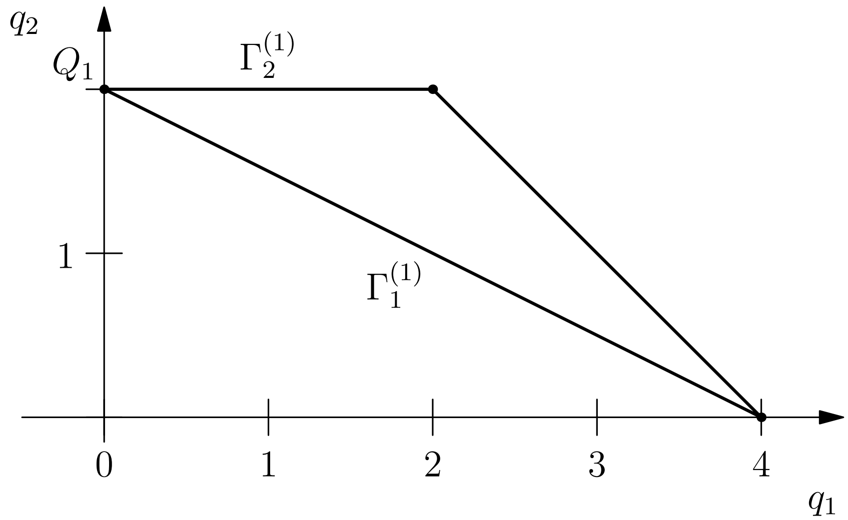

Рис. 1

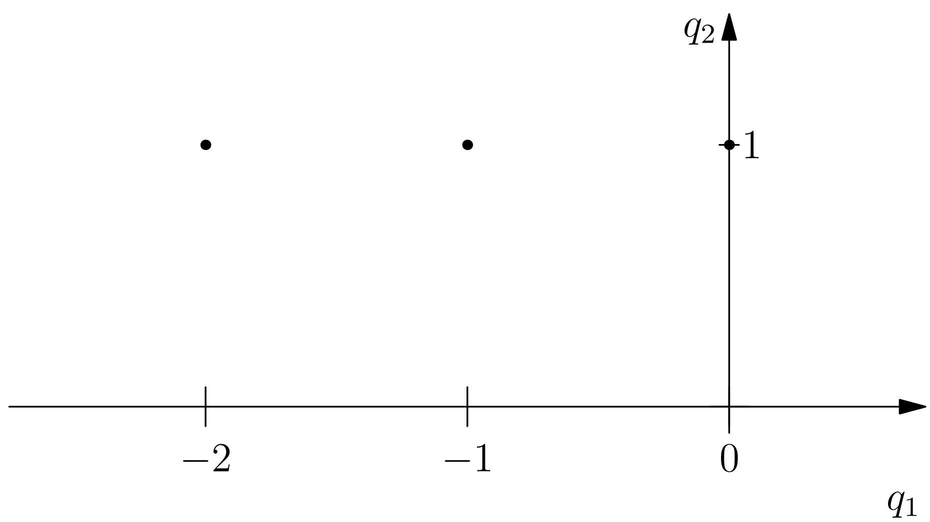

Рис. 2

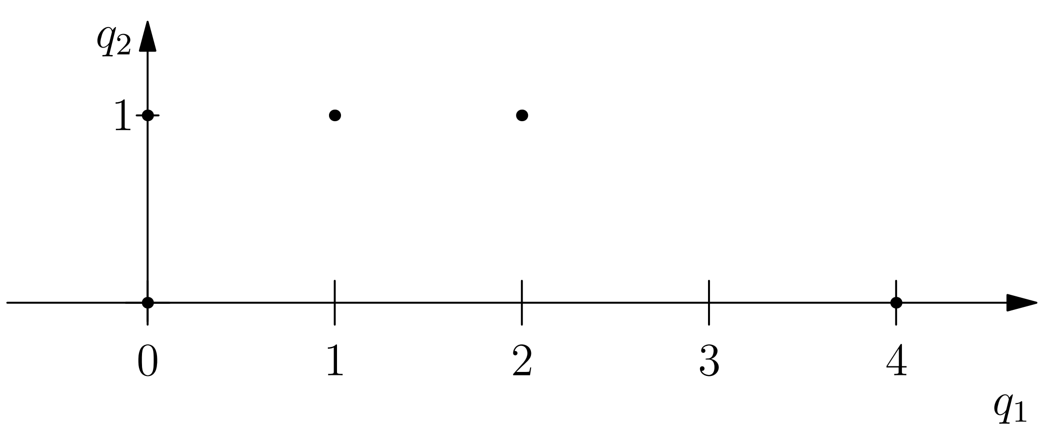

Рис. 3

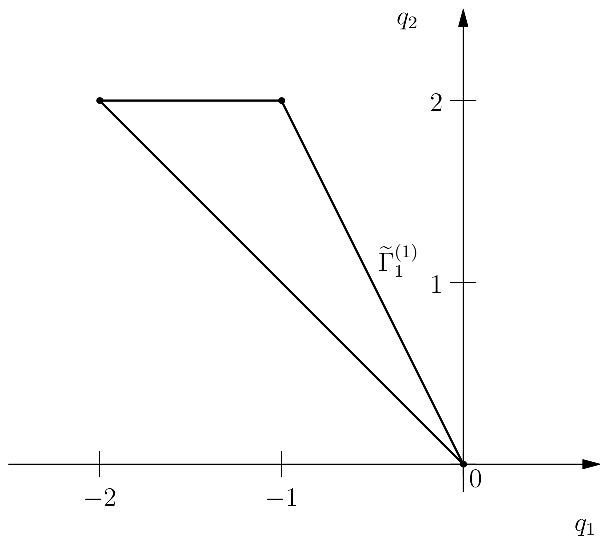

Рис. 4

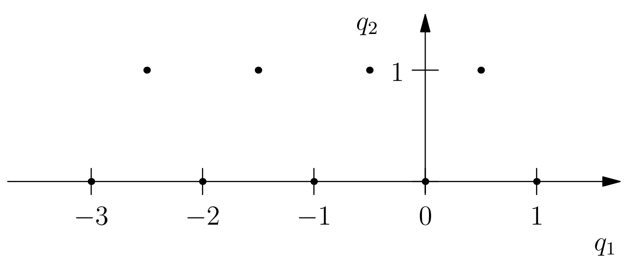

Рис. 5

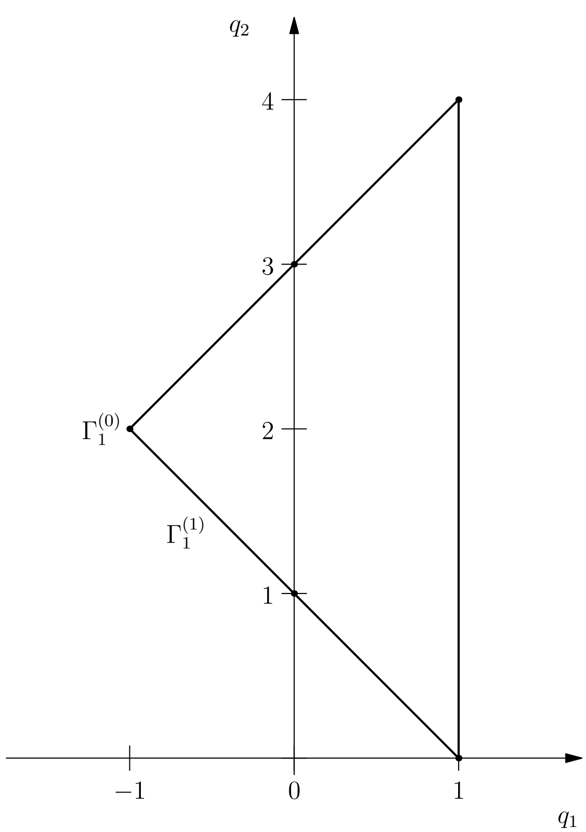

Рис. 6

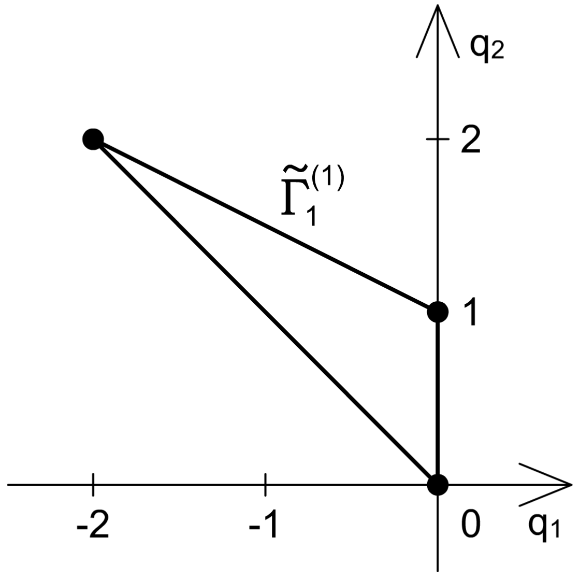

Рис. 7

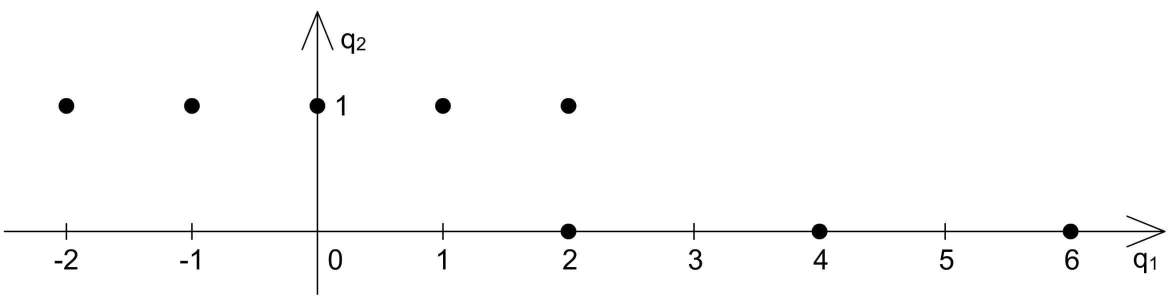

Рис. 8

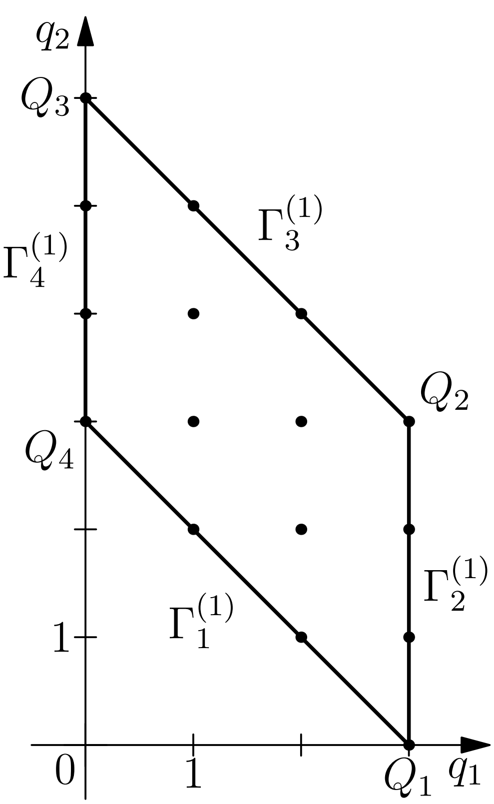

Рис. 9

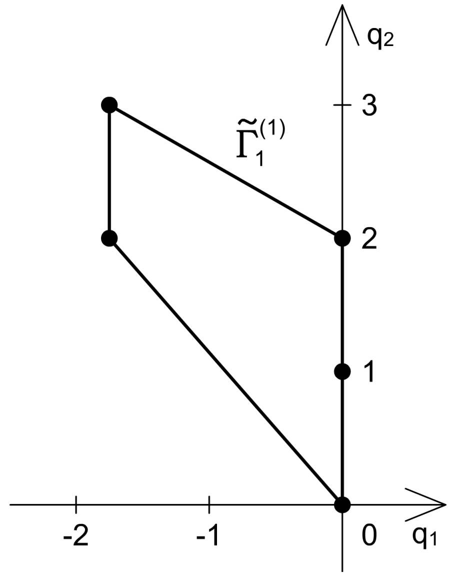

Рис. 10

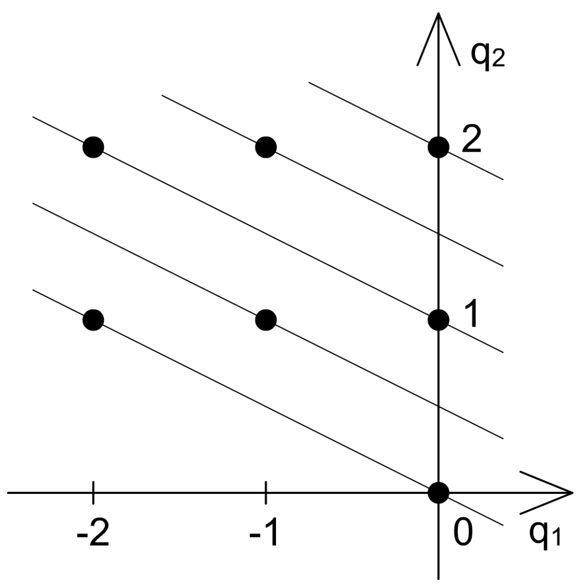

Рис. 11

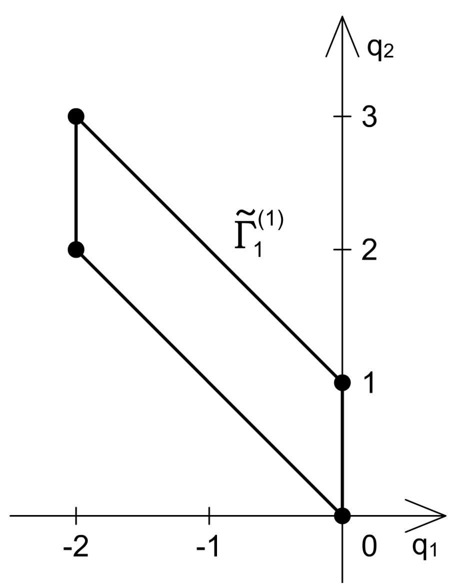

Рис. 12