



Томин П.Ю.

Применение
многомасштабных
алгоритмов для решения
задач многофазной
фильтрации в анизотропных
средах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Томин П.Ю. Применение многомасштабных алгоритмов для решения задач многофазной фильтрации в анизотропных средах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 14. 21 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-14>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

П. Ю. Томин

**Применение многомасштабных
алгоритмов для решения задач
многофазной фильтрации
в анизотропных средах**

Москва 2011

П. Ю. Томин, Применение многомасштабных алгоритмов для решения задач многофазной фильтрации в анизотропных средах

Аннотация. В работе для построения эффективных функций относительных фазовых проницаемостей в анизотропных средах сложной структуры разработан эффективный многомасштабный многосеточный алгоритм решения задач многофазной фильтрации, являющийся комбинацией метода конечных суперэлементов Р. П. Федоренко и метода опорных операторов А. А. Самарского, принадлежащий к классу методов высокого разрешения. Проведено численное моделирование процессов фильтрации, как для случайного распределения проницаемости, так и для среды с произвольной конфигурацией трещин. Показана анизотропия функций относительных фазовых проницаемостей, являющаяся следствием анизотропии абсолютной проницаемости¹.

P. Yu. Tomin, Application of multiscale algorithms for solving problems of multiphase flow in anisotropic media

Abstract. In the paper, an effective multiscale multigrid algorithm of solving multiphase flow problems was developed to construct effective relative permeabilities for anisotropic media of complex structure. The method combines the Fedorenko finite superelement method and the Samarskii support operators method and belongs to the high-resolution methods class. The numerical simulation was carried out both for random distribution of permeability and for media with an arbitrary fractures configuration. The anisotropy of the relative permeabilities is shown as a consequence of the anisotropy of absolute permeability.

Содержание

Введение.....	3
Постановка задачи.....	5
Метод решения.....	7
Метод опорных операторов.....	7
Решение уравнения для давления.....	8
Граничные условия.....	10
Расчет насыщенности.....	11
Результаты расчетов.....	11
Заключение.....	17
Литература.....	17

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00823).

При подготовке работы использовалась вычислительная система МФТИ-60.

Введение

Большое число процессов в природе характеризуются наличием множества характерных масштабов, как по времени, так и по пространству. Наглядным примером, который рассматривается в данной работе, является процесс фильтрации вязких жидкостей в средах с наличием трещин.

Что касается пространственных масштабов, в большинстве случаев объем трещин значительно меньше объема порового пространства, таким образом $m_{\text{тр}} \ll m_{\text{пор}}$, где $m_{\text{тр}}$ — доля общего объема среды, занятая трещинами, а $m_{\text{пор}}$ — доля объема, занятая порами.

Далее, поскольку [1] характерная длина трещин — $l \sim 1 \div 1000$ м, их раскрытие — $h \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ м, характерный размер пор $r \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ м, то имеет место следующее соотношение:

$$r \ll h \ll l.$$

Таким образом, для задач фильтрации в трещиноватых средах справедлива существенная разномасштабность по пространству.

Для ламинарного движения вязкой жидкости в щели с параллельными стенками справедлива формула Буссинеска [2]

$$Q = -\frac{b \cdot h^3}{12\mu} \frac{\Delta p}{\Delta x},$$

здесь Q — расход жидкости, b — ширина щели в сечении, μ — вязкость, p — давление. Отсюда получаем, что для оценки проницаемости трещины можно воспользоваться величиной $\frac{h^2}{12}$. В силу того, что, как показано выше, $h \gg r$,

получаем, что проницаемость системы трещин во много раз больше проницаемости поровых каналов. Как следствие, скорость движения жидкости по трещинам значительно больше скорости движения по порам, что приводит к разным временным масштабам.

Из-за малых поперечных размеров прямой учет трещин при численном моделировании фильтрационных процессов практически невозможен, поэтому обычно используются модели, в основе которых лежит процедура осреднения [3]. Определенный интерес представляет модель *single porosity*, успешно примененная, например, в [4] для учета субсейсмических трещин в расчетах пилотного участка одного из крупнейших месторождений Ближнего Востока. Ключевой особенностью данной модели является построение эффективных относительных фазовых проницаемостей, поскольку именно их величина, умноженная на значение абсолютной проницаемости, определяет скорость переноса фазы. Исследование функций относительных фазовых проницаемостей для трещиноватых сред приводит к решению задач многофазной фильтрации в таких средах и, как следствие, к необходимости разработки алгоритмов решения таких задач с учетом многомасштабности процессов. В данной работе основное внимание уделено вопросу

пространственной разномасштабности, при этом учитывается то обстоятельство, что характерный масштаб изменения поля давления по пространству значительно больше масштаба изменения поля насыщенности.

Как уже отмечалось, с точки зрения численного моделирования прямое рассмотрение таких задач весьма затруднительно. Кроме того, при решении многих инженерных задач, к числу которых относится и задача моделирования разработки нефтегазовых месторождений, точность исходных данных весьма ограничена, что делает прямой расчет избыточным по точности [5]. При этом необходим метод решения, который бы учитывал качественные особенности процессов [6].

В связи с вышесказанным в последнее время в области моделирования подземной гидродинамики проявлен заметный интерес к многомасштабным алгоритмам [7, 8], в том числе применительно к многофазным задачам [9–12]. Следует особо подчеркнуть, что основные принципы данных методов имеют много общего с идеями метода суперэлементов Р. П. Федоренко [13], аналогом которого является Residual Free Bubble Method [14], обсуждаемый в западной литературе. Применению в методе конечных элементов специальных базисных функций, являющихся решением некоторых дифференциальных уравнений, для эллиптических задач посвящена работа [15], задачи конвекции-диффузии рассматриваются в [16]. С точки зрения моделирования трещиноватости необходимо также отметить работу [17], в которой аналитически построены базисные функции для случая, когда локально коэффициенты задачи меняются только в одном направлении.

Однако, рассмотрение сложных неоднородных сред, в том числе трещиноватых, с применением аналитических базисных функций как, например, в указанной выше работе [17], представляется весьма затруднительным. Поэтому в данной работе базисные функции будут определяться численно из решения задачи на исходной подробной сетке.

Ключевым моментом при расчете базисных функций является [7] выбор граничных условий, специальный вид которых может существенно повысить качество решения задачи в целом. Действительно, стандартные для конечных элементов линейные на границе базисные функции не отражают особенности решения в случае, когда разрывы коэффициентов задачи выходят на границу суперэлемента [18]. В этом случае возможно использование граничных условий, полученных из решения одномерных задач на ребрах [19]. Следует отметить, что данный подход очевидным образом обобщается на трехмерный случай [20]. Как показано в [11, 21, 22], использование базисных функций, являющихся решениями локальных задач, может привести к неточным результатам при наличии в среде протяженных высокопроводящих каналов, которыми являются рассматриваемые здесь трещины. Поэтому в данной работе воспользуемся предложенным в [11] методом построения граничных условий из решения полной задачи на подробной сетке в начальный момент времени.

Таким образом используется глобальная информация, что улучшает [11, 21, 22] качество получаемого с помощью построенного базиса решения.

Другой особенностью применения базисных функций, содержащих информацию о мелкомасштабных неоднородностях, является восстановление корректного распределения давления на подробной сетке, которое может быть использовано для построения поля скоростей и решения задачи переноса на этой сетке. Такой подход получил название демасштабирование (downscaling), по аналогии с прямым процессом ремасштабирования (upscaling). Его применение дает, например, возможность напрямую учесть эффекты временной разномасштабности потоков флюидов в среде с наличием трещин, тем самым [23] значительно повысить качество получаемого результата по сравнению, например, с использованием стандартного метода осреднения.

В данной работе при помощи многомасштабного алгоритма рассматриваются двухфазные течения в средах с наличием трещин — зон повышенной проницаемости — с целью исследования функций относительных фазовых проницаемостей в таких средах. Численные эксперименты в данной работе соответствуют лабораторным измерениям двухфазного вытеснения на образцах керна [24]. Таким образом, следуя классификации из [25], приведенной на Рис. 1, ниже мы будем рассматривать случай 2.

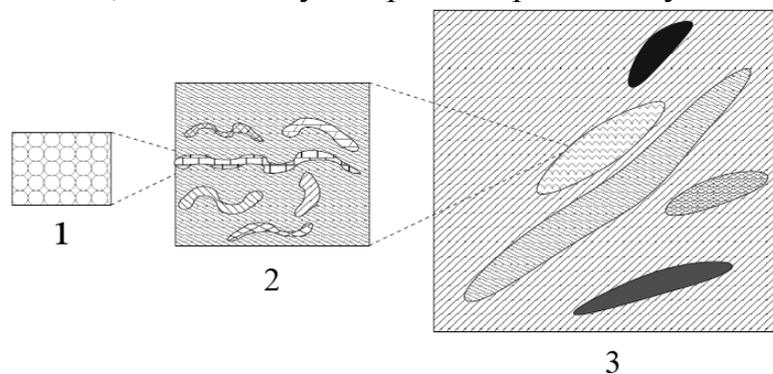


Рис. 1. Различные масштабы пористой среды:
1 — масштаб пор; 2 — масштаб образцов керна; 3 — масштаб месторождения.

Постановка задачи

Рассматривается задача двухфазной фильтрации без учета гравитации, которой можно пренебречь на масштабах образца керна с учетом небольшой разницы плотностей флюидов. Жидкости будем считать несжимаемыми, однако рассматриваемые методы можно обобщить и на сжимаемый случай [26, 27]. Капиллярное давление не учитывается, таким образом, предполагается, что характер вытеснения определяется вязкими силами. Отметим, что предельный случай капиллярного равновесия применительно к образцам с трещиноватостью рассмотрен в работе [28], в которой был проанализирован тензорный характер связи между фазовой и абсолютными проницаемостями.

Пористость считается постоянной. Фазы будем обозначать индексами w (вода) и o (нефть). Обобщенный закон Дарси имеет вид

$$v_i^\alpha = -\frac{k_{ij}^\alpha}{\mu_\alpha} \nabla_j p, \quad \alpha = o, w,$$

где \vec{v}^α — вектор скорости фильтрации фазы α , k_{ij}^α — симметричный тензор фазовой проницаемости, μ_α — вязкость, p — давление.

Уравнения неразрывности для каждой фазы записываются в виде

$$\frac{\partial \rho_\alpha s_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(-\rho_\alpha \vec{v}^\alpha) = 0, \quad \alpha = o, w, \quad (1)$$

здесь s_α — насыщенность фазы (объемная концентрация), ρ_α — плотность, предполагаемая постоянной.

Среду будем считать локально изотропной. Эмпирическая связь между фазовой и абсолютной проницаемостью для таких сред задается соотношением [2]

$$k^\alpha = f^\alpha(s_o, s_w) k,$$

где k — коэффициент абсолютной проницаемости, $f^\alpha(s_o, s_w)$ — безразмерная функция от насыщенности, называемая относительной фазовой проницаемостью. Так как $s_o + s_w = 1$, в качестве аргумента можно взять одну из них, например s_w , которую в дальнейшем будем обозначать как s .

Сложим уравнения (1), предварительно сократив первое на $(-\rho_o)$, а второе на $(-\rho_w)$, с учетом введенных выше обозначений, имеем

$$\operatorname{div} \left(\left(\frac{f^o(s)}{\mu_o} + \frac{f^w(s)}{\mu_w} \right) k \nabla p \right) = 0.$$

Обозначим $\vec{v} = \vec{v}^o + \vec{v}^w = -\lambda(s) k \nabla p$, где

$$\lambda(s) = \frac{f^o(s)}{\mu_o} + \frac{f^w(s)}{\mu_w}.$$

Окончательно получаем систему уравнений

$$\operatorname{div}(\lambda(s) k \nabla p) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(-F_w(s) \vec{v}) = 0, \quad (3)$$

где $F_w(s) = \frac{f^w(s)}{\mu_w \lambda(s)}$.

Таким образом, рассматриваемая система состоит из двух уравнений: эллиптического уравнения (1) для давления и гиперболического уравнения (2) для насыщенности.

В данной работе ограничимся анализом разномасштабности, заключенной в коэффициенте проницаемости k . Необходимо отметить, что имеется ввиду как разномасштабность в значениях этого коэффициента, так и в его пространственном распределении, а именно: коэффициент k может сильно меняться резко по пространству.

Метод решения

Метод опорных операторов

В качестве базового метода решения эллиптических уравнений вида

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0, \quad \vec{w} = -\hat{K} \nabla u, \quad (4)$$

воспользуемся методом опорных операторов [29]. Данный метод позволяет [30] получить консервативную разностную схему со вторым порядком аппроксимации в практически важном случае разрывных коэффициентов, постоянных в каждой ячейке. Это делает его более универсальным, чем, например, метод конечных элементов, используемый в работе [7]. Изложим кратко суть данного метода, следуя [31].

Пусть в области Ω задана сетка, состоящая из четырехугольников, при этом на каждом ребре определено положительное направление. Неизвестные функции u отнесем к узлам сетки, а компоненты тензора проницаемости \hat{K} определим в ячейках. Как уже отмечалось выше, предполагается, что координатные линии сетки совпадают с линиями разрывов компонентов тензора \hat{K} , таким образом \hat{K}_{ij} — постоянные величины в ячейках.

В методе опорных операторов дивергенция и градиент согласованно определяются из соотношения, вытекающего из теоремы Остроградского-Гаусса

$$\int_{\Omega} r \cdot \operatorname{div} \vec{w} dV = - \int_{\Omega} \nabla r \cdot \vec{w} dV + \int_{\partial\Omega} r \cdot w_n ds, \quad (5)$$

здесь $\partial\Omega$ — граница области Ω . Функция r — произвольная. В силу этого можно задать условие $r|_{\partial\Omega} = 0$. После явного определения одного из операторов, называемого опорным, второй находится как сопряженный к нему. В рассматриваемом здесь случае естественно выбрать в качестве опорного взять оператор градиента.

Разностный аналог интеграла $\int_{\omega} \nabla r \cdot \vec{w} dV = - \int_{\omega} \nabla r \cdot \hat{K} \nabla u dV$, $\omega \in \Omega$,

$\cup \omega = \Omega$, является билинейной формой, поэтому может быть представлен в виде

$$g_{\omega}^{ab} \Delta_a r \Delta_b u, \quad \Delta_a r = r(B) - r(A), \quad \Delta_a u = u(B) - u(A),$$

где g_ω^{ab} — матрица билинейной формы G , в дальнейшем индекс ω будем опускать, алгоритм построения g^{ab} будет описан ниже. Здесь положительное направление определяется от точки A к точке B .

Аппроксимация оператора дивергенции получается следующим образом. Интеграл в левой части равенства (5) может быть аппроксимирован выражением

$$\sum_{\xi} r_{\xi} (\operatorname{div} \bar{w})_{h,\xi} V_{\xi},$$

здесь ξ — некоторый узел сетки, V_{ξ} — присоединенная к этому узлу площадь (или объем в трехмерном случае), r_{ξ} — значение сеточной функции в узле ξ (тем самым предполагается кусочно-линейная интерполяция внутри присоединенного объема: $r \in \text{RT0}$ [32]), $(\operatorname{div} \bar{w})_{h,\xi}$ — искомая аппроксимация.

Окончательно имеем

$$\sum_{\xi} r_{\xi} (\operatorname{div} \bar{w})_{h,\xi} V_{\xi} = \sum_{\omega} g^{ab} \Delta_a r \Delta_b u.$$

В результате, приравнивая коэффициенты при r_{ξ} , получим следующую аппроксимацию оператора дивергенции

$$(\operatorname{div} \bar{w})_{h,\xi} = \frac{\sigma_a g^{ab} \Delta_b u}{V_{\xi}},$$

в которой суммирование производится по всем ребрам, выходящим из узла ξ . Величины $\sigma_a = \pm 1$ в зависимости от выбора положительного направления вдоль ребра.

В [30, 31] описан способ вычисления g^{ab} и выбора V_{ξ} , такой что точное решение задачи (4) приближается со вторым порядком в метрике L_2 . Здесь мы будем использовать эти результаты, не переписывая громоздкие формулировки и доказательства из указанных работ. Важно отметить то обстоятельство, что выражение $g^{ab} \Delta_a r \Delta_b u$, аппроксимирующее интеграл вида $\int_{\omega} \nabla r \cdot \hat{K} \nabla u \, dV$, действительно обладает всеми свойствами скалярного произведения. Предположения о свойствах сетки, сформулированные при доказательствах в указанных выше работах, никак не ограничивают применимость описанного метода для рассматриваемого класса задач.

Решение уравнения для давления

Аналогично [7, 18], воспользуемся слабой формулировкой задачи и будем искать решение в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ — пространстве функций, имеющих обобщенные производные первого порядка, интегрируемые

с квадратом. Для простоты записи ограничимся задачей Дирихле с нулевыми граничными условиями:

$$u \in H_0^1(\Omega),$$

$$B(u, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

где $B(\cdot, \cdot)$ — билинейная форма, порожденная некоторым скалярным произведением (\cdot, \cdot) в $L_2(\Omega)$, а именно

$$B(u, v) = (\hat{K} \nabla u, \nabla v).$$

Пространство $H_0^1(\Omega)$ определяется следующим образом

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

В данной работе в качестве B предлагается использовать билинейную форму G , задаваемую в каждой ячейке матрицами g^{ab} . Как показано выше, она обладает всеми требуемыми свойствами.

Исходную сетку будем называть подробной, грубая сетка получается путем неперекрывающегося объединения ячеек подробной, таким образом подробная сетка является подсеткой грубой.

Базисные функции φ_i являются решением эллиптических задач со специальными граничными условиями b_i

$$\operatorname{div}(-\hat{K} \nabla \varphi_i) = 0,$$

$$\varphi_i|_{\partial K} = b_i,$$

где K — ячейка грубой сетки, содержащая d вершин, $\varphi_i, i = 1, \dots, d$ — локальные базисные функции. Речь о выборе граничных условий пойдет ниже.

Пусть $\xi_i, i = 1, \dots, d$ — узлы ячейки K . Внутри области потребуем, чтобы $\varphi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$. Окончательно базисная функция ψ_ξ , относящаяся к некоторому узлу ξ , является объединением набора локальных базисных функций, содержащих данную вершину.

Линейная оболочка базисных функций задает аппроксимирующее пространство V^h . В итоге для поиска u_h получаем следующую формулировку задачи

$$u_h \in V^h,$$

$$B(u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V^h$$

Коэффициенты матрицы системы линейных алгебраических уравнений на коэффициенты разложения имеют вид

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \hat{K} \nabla \psi_j \, dV.$$

Интегрирование по объему можно свести к интегрированию потока по границе, однако, как показано в [33], получаемая в этом случае матрица в общем случае не является симметричной. В работе [7] в ряде случаев отмечается отсутствие положительной определенности матрицы при использовании интегрировании по границе.

Выписанная выше формулировка относится к случаю однофазной фильтрации. Для решения уравнения (2) воспользуемся аналогичными соотношениями, положив $\hat{K} = \lambda(s)k$. Строго говоря, в этом случае необходимо пересчитывать базис каждый раз при изменении поля насыщенности всюду, либо в области фронта насыщенности [10]. Однако, как показано в [11, 21], продвижение фронта вытеснения оказывает слабое влияние на решение, что позволяет использовать построенные на начальный момент базисные функции в течение всего расчета. При этом коэффициенты матрицы для уравнения давления имеют вид

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \lambda(s)k \nabla \psi_j \, dV.$$

Граничные условия

Как уже отмечалось во введении, ключевым моментом при расчете базисных функций является выбор граничных условий. Простейшим вариантом, который учитывает разрывы коэффициентов на границах ячеек грубой сетки, являются граничные условия, полученные из решения одномерных задач на ребрах. Получаемые в данном случае базисные функции обладают важным свойством непрерывности на границах ячеек. Однако, как показано в [7], существует проблема резонанса между размером ячеек H и характерным размером неоднородностей ε , а именно получена следующая оценка сходимости к точному решению

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} = O(H^2 + \varepsilon/H),$$

из которой очевидно, что при $\varepsilon \sim H$ разностное решение содержит значительную ошибку.

Для решения этой проблемы в [7] был предложен метод избыточного решения (oversampling method). Суть метода заключается в том, что задача поиска базисных функций для ячейки решается в области, превосходящей по размеру саму ячейку и включающей дополнительный граничный слой. Недостатком данного метода является тот факт, что базисные функции не являются непрерывными на границах ячеек.

Оба метода, изложенные выше, используют локальную информацию для построения базисных функций. В данной работе предполагается исследование течений в средах при наличии трещин — высокопроводящих каналов, протяженность которых может быть значительной по сравнению с H . В [11, 21, 34] показано, что в таких случаях использование базисных функций, полученных локально, может привести к существенному искажению результата

по сравнению с прямым решением на подробной сетке. В [11] предложен метод, в котором граничные условия строятся из решения полной задачи в начальный момент времени. На примере задачи [35] продемонстрировано, что использование глобальной информации может значительно повысить качество получаемого решения. В данной работе воспользуемся данным подходом, опустив математические выкладки, приведенные, например, в [33]. Отметим то обстоятельство, что, как показано в [11], получаемое решение в начальный момент совпадает с решением на подробной сетке. Кроме того, базисные функции удовлетворяют соотношению $\sum_{i=1}^d \varphi_i = 1$, что позволяет не искать одну из функций, вычислив ее через уже найденные.

Расчет насыщенности

Для решения системы уравнений (2), (3) используется явно-неявная схема IMPES [36], которая обладает меньше численной дисперсией по сравнению с полностью неявной схемой [37] и поэтому лучше подходит для моделирования экспериментов по определению относительных фазовых проницаемостей. Для каждого момента времени из уравнения (2) находится поле давления, при этом поле насыщенности считается фиксированным. Далее, используя базисные функции, вычисляется поле скоростей на подробной сетке, зная которое, пересчитывается изменение насыщенности. Такая схема является условно устойчивой и требует аккуратного выбора шага по времени, достаточное условие устойчивости для рассматриваемой задачи получено в [33].

Для расчета эволюции насыщенности, как и в [38], используется метод конечных объемов [39] с использованием сноса против потока [40].

Результаты расчетов

Рассмотрим решение системы (2), (3) в двумерной области

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Граничные и начальные условия имеют вид:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{y=1} = 0,$$

$$p|_{x=0} = 0, p|_{y=0} = 1,$$

$$s|_{x=1} = 1,$$

$$s|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \neq 1. \end{cases}$$

Вязкости нефти и воды $\mu_o = 2$ и $\mu_w = 1$ соответственно. Функции относительных фазовых проницаемостей для нефти и воды имеют вид

$$f^o(s) = (1-s)^2, f^w(s) = s^2.$$

Исходная подробная сетка равномерная с числом ячеек $N_x = N_y = 50$. В первом примере коэффициент проницаемости в каждой ячейке принимает случайное значение от 0 до 1 включительно (Рис. 2).

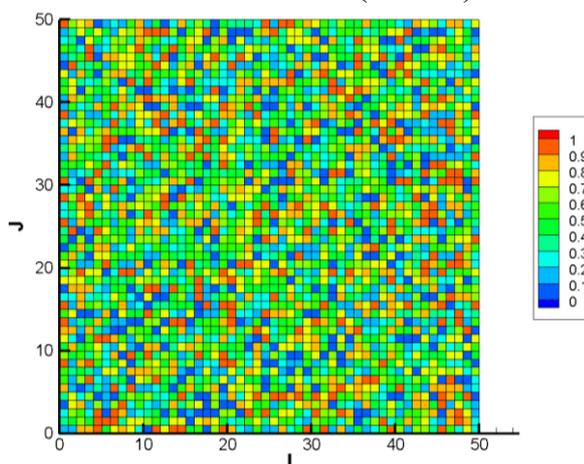


Рис. 2. Распределение коэффициента проницаемости.

Рассматриваются три варианта расчета:

- 1) на исходной сетке;
- 2) с коэффициентами укрупнения сетки $c_x = c_y = 5$;
- 3) с коэффициентами укрупнения сетки $c_x = c_y = 10$.

Таким образом, для вариантов 2 и 3 каждая ячейка грубой сетки содержит 25 и 100 ячеек подробной соответственно.

Отметим, что так как поле давления со временем меняется слабо, то при его расчете в качестве начального приближения берется значение с предыдущего шага. В варианте 1 для расчета давления используется стандартный метод конечных элементов в слабой постановке.

Укрупнение сетки позволяет получить кратное сокращение времени счета, более детальные оценки ускорения можно найти в [8]. Точные цифры времени счета зависят конкретной реализации, например, в данной работе получено 16-кратное ускорение варианта 2 относительно варианта 1, причем время расчета многомасштабным методом включает время на построение базисных функций. При этом качество решения сохраняется и при бóльших коэффициентах укрупнения сетки (Рис. 3, 4, 5).

На Рис. 3 представлены поля давления для всех трех вариантов на момент времени $t = 2.0$.

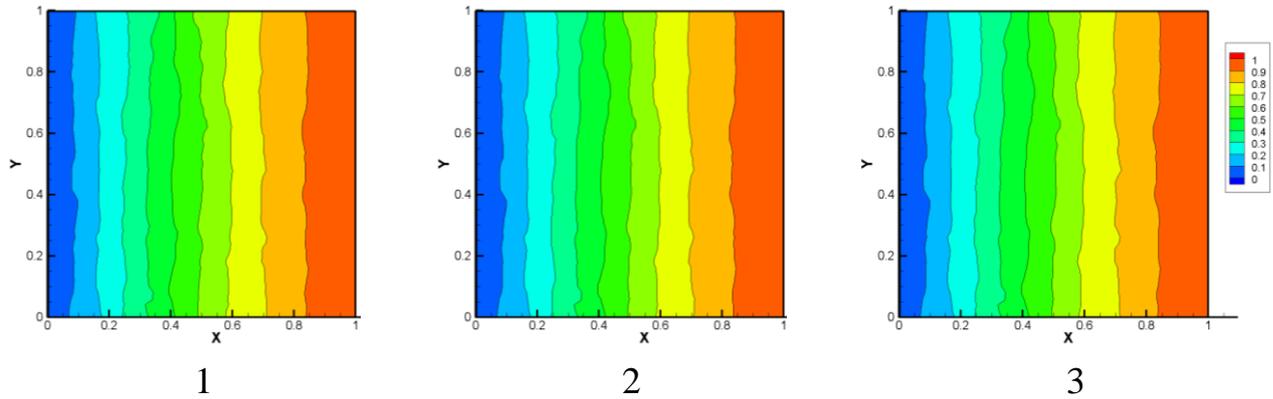


Рис. 3. Поля давления, $t = 2.0$.

На Рис. 4 приведены распределения насыщенности на момент времени $t = 2.0$ для вариантов 1 и 3.

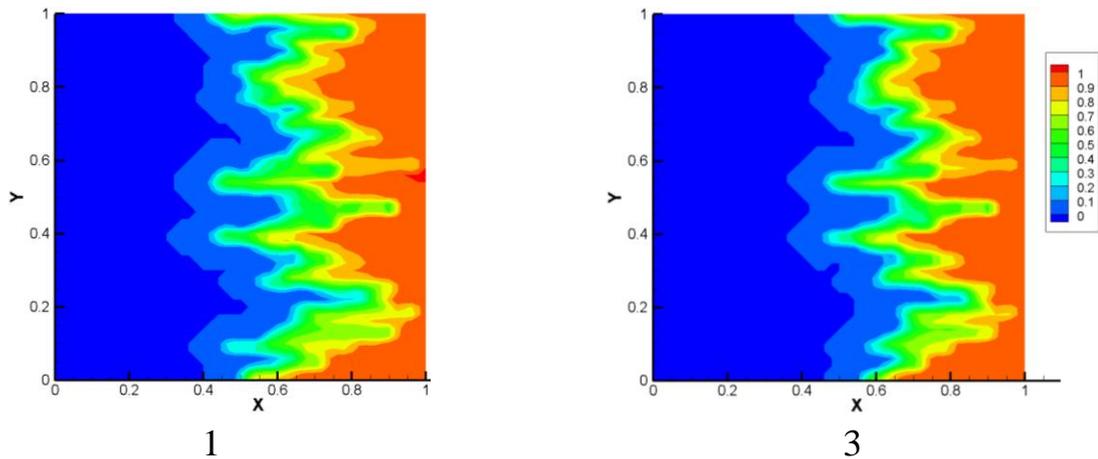


Рис. 4. Распределения насыщенности, $t = 2.0$.

На Рис. 5 представлена зависимость потоков воды и нефти через левую границу области от времени для вариантов 1 и 3.

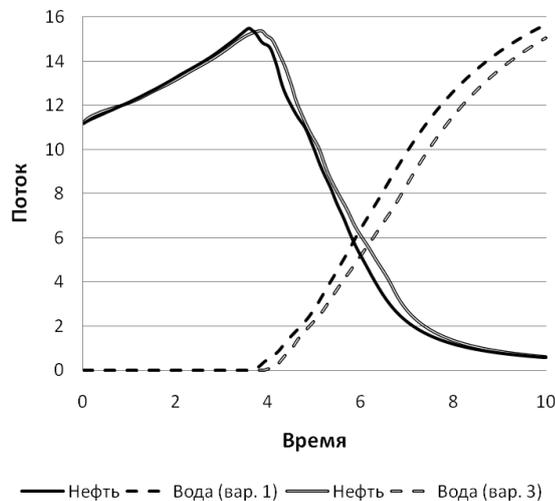


Рис. 5. Потоки фаз через левую границу области.

Методы экспериментальных измерений относительных фазовых проницаемостей можно разделить на два принципиально разных класса [41, 42]: стационарные методы и нестационарные. Первые [43, 44, 45] являются наиболее надежными и универсальными, однако требуют достаточно много времени для проведения полной серии экспериментов. Нестационарные методы [46, 47, 48] требуют гораздо меньше времени на проведение эксперимента, имея при этом ряд ограничений [41]:

- 1) капиллярные силы пренебрежимо малы;
- 2) сжимаемости флюидов и породы пренебрежимо малы;
- 3) однородность среды.

В рассматриваемом здесь случае нарушается требование 3. Как отмечается в [42], в общем случае результаты нестационарных измерений следует рассматривать лишь с качественной стороны.

Целью данного исследования является построение функций относительных фазовых проницаемостей, которые затем можно было бы использовать при полномасштабном моделировании месторождений. Основным критерием в этом случае является равенство потоков, поэтому для определения эффективных относительных фазовых проницаемостей \bar{f}^α будем использовать выражение, аналогичное предложенному в [49], а именно

$$\bar{f}^\alpha(\bar{s}) = \frac{\sum k_i h_i f^\alpha(s_i)}{\bar{k} \sum h_i}, \quad \alpha = o, w.$$

Суммирование производится вдоль границы образца. k_i — значения коэффициента проницаемости в ячейках подробной сетки, h_i — длины ребер ячеек, s_i — насыщенности. Значение коэффициента проницаемости для образца в целом \bar{k} определяется при помощи методов, изложенных в [50]. Величина насыщенности образца \bar{s} вычисляется как среднее арифметическое от насыщенностей в ячейках подробной сетки.

Для рассмотренного выше примера со случайным распределением коэффициента проницаемости, найденные таким способом относительный фазовые проницаемости для двух взаимноперпендикулярных направлений фильтрации представлены на Рис. 6. Значения абсолютной проницаемости в горизонтальном и вертикальном направлениях равны 0.43 и 0.42 соответственно, здесь и далее недиагональным компонентом тензора проницаемости в силу его малости пренебрегаем.

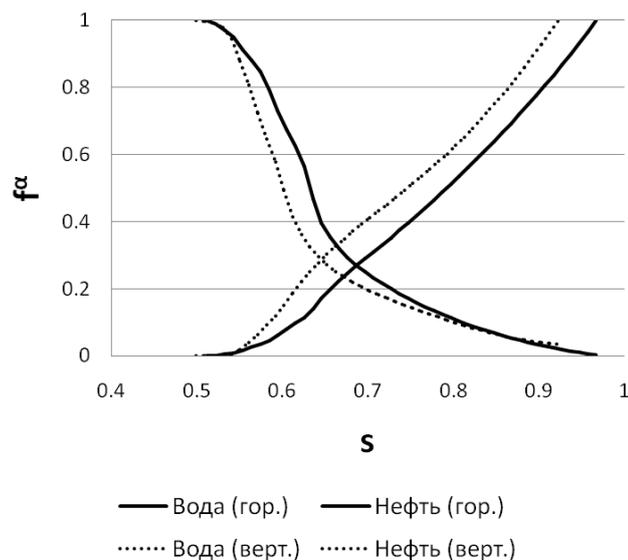


Рис. 6. Функции относительных фазовых проницаемостей для образца со случайным коэффициентом проницаемости.

Из рисунка видно, что даже для такого простого случая, эффективные относительные фазовые проницаемости для образца в целом существенно отличаются от функций, заданных в каждой ячейке подробной сетки, кроме того они являются анизотропными.

Во втором примере для моделирования трещиноватой среды разыгрывается коррелированное поле проницаемости, пример которого представлен на Рис. 7. А именно: на фоне некоторого невысокого значения случайным образом проводятся узкие протяженные каналы более высокой проницаемости — «трещины». Преобладающим направлением для «трещин» является горизонтальная ось, таким образом, среда в целом является существенно анизотропной: значения проницаемости в горизонтальном и вертикальном направлениях составляют 27.5 и 2.9 соответственно.

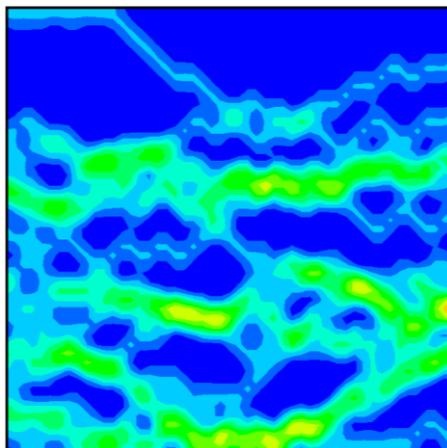


Рис. 7. Пример поля проницаемости для моделирования трещиноватой среды.

Процесс изменения поля насыщенности представлен на Рис. 8. Расчет проводился с коэффициентами укрупнения сетки $c_x = c_y = 10$.

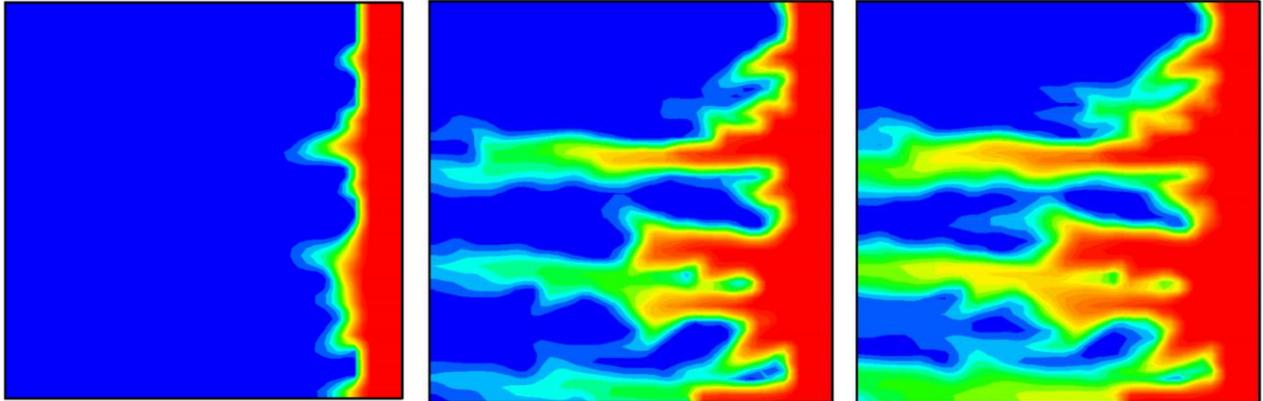


Рис. 8. Эволюция поля насыщенности.

Полученные в результате прямого моделирования с использованием многомасштабного метода относительные фазовые проницаемости представлены на Рис. 9.

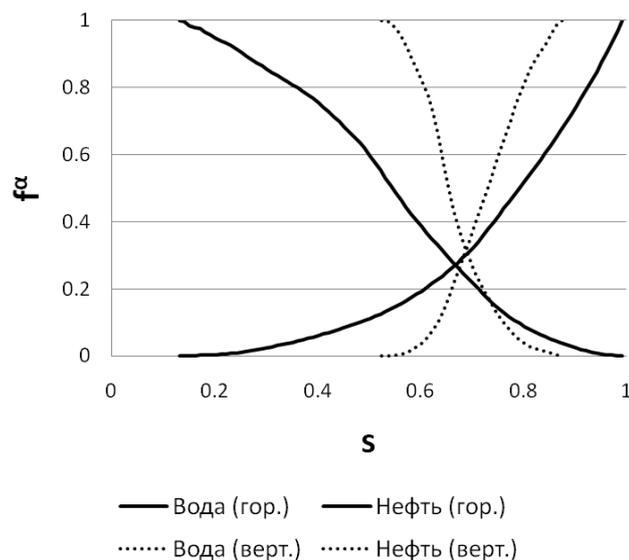


Рис. 9. Функции относительных фазовых проницаемостей для образца с трещиноватостью.

Полученные кривые, как и следовало ожидать, существенно зависят от направления, что необходимо принимать во внимание при моделировании многофазной фильтрации в анизотропных средах, например, с наличием трещин. Данное обстоятельство не всегда учитывается в исследованиях. Например, в уже упоминаемой здесь работе [4] эмпирико-аналитически построены эффективные относительные фазовые проницаемости для учета быстрого заводнения по трещинам, однако никак не обсуждается их тензорный характер, что может привести к определенным ошибкам в результатах. В работе [51] дана количественная оценка влияния тензорного характера ОФП при вытеснении газа водой и продемонстрировано, что данное обстоятельство заметно изменяет характер распространения газа в пласте.

Заключение

Рассмотрена задача фильтрации несжимаемых жидкостей в неоднородной трещиноватой среде. Процессы многофазных течений в средах с наличием трещин характеризуются наличием различных характерных масштабов по времени и пространству. Для исследования таких ситуаций разработан эффективный многомасштабный многосеточный алгоритм для решения задач двухфазной фильтрации, являющийся развитием метода конечных суперэлементов Р. П. Федоренко. Предложена эффективная комбинация этого метода с методом опорных операторов А. А. Самарского. Уравнение эллиптического типа для порового давления решается на укрупненной сетке с использованием разложения по специальному базису, учитывающему особенности среды. Необходимо отметить тот факт, что решение уравнения переноса насыщенности производится на исходной подробной сетке.

Представленный алгоритм обладает рядом практических преимуществ по сравнению с прямым моделированием, например, с использованием стандартного метода конечных элементов: он позволяет получить кратное сокращение времени расчета за счет укрупнения сетки, сохраняя при этом качество решения. А именно: он правильно передает особенности точного решения и, таким образом, принадлежит к классу так называемых методов высокого разрешения. Наконец, отметим, что предложенный метод может быть эффективно распараллелен.

При помощи разработанного метода проведено исследование эффективных функций относительных фазовых проницаемостей для сред со случайным распределением коэффициента проницаемости и с наличием трещин. Показано, что при анизотропии абсолютной проницаемости, получаемые относительные фазовые проницаемости тоже будут анизотропны, что необходимо учитывать при полномасштабном моделировании месторождений.

Литература

1. O. Bour, P. Davy. Clustering and size distributions of fault patterns: theory and measurements // *Geophysical Research Letters*, V. 26, N. 13, P. 2001–2004, 1999.
2. Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. Движение жидкостей и газов в природных пластах // Москва, Недра, 1984.
3. L. Lonergan, R. J. H. Jolly, K. Rawnsley, D. J. Sanderson. *Fractured Reservoirs* // Geological Society, London, 2007.
4. P. van Lingen, J.-M. Daniel, L. Cosentino, M. Sengul. Single Medium Simulation of Reservoirs with Conductive Faults and Fractures // paper SPE 68165, SPE Middle East Oil Show, Bahrain, 2001.
5. Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей

- в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика, Т. XXIV, 1960.
6. T. J. Lassetter, J. R. Waggoner, L. W. Lake. Reservoir Heterogeneities and their Influence on Ultimate Recovery // Reservoir Characterization, Academic Press, P. 545, 1986.
 7. T. Y. Hou, X.-H. Wu. A Multiscale Finite Element Method for Elliptic Problems in Composite Materials and Porous Media // Journal of Computational Physics, V. 134, P. 169–189, 1997.
 8. P. Jenny, S. H. Lee, H. A. Tchelepi. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation // Journal of Computational Physics, V. 187, P. 47–67, 2003.
 9. Z. Chen, T. Y. Hou. A Mixed Multiscale Finite Element Method for Elliptic Problems with Oscillating Coefficients // Mathematics of Computation, V. 72, N. 242, P. 541–576, 2002.
 10. H. A. Tchelepi, P. Jenny, S. H. Lee. An Adaptive Multiphase Multiscale Finite Volume Simulator for Heterogeneous Reservoirs // SPE paper 93395, 19th SPE Reservoir Simulation Symposium, The Woodlands, Texas, USA, 2005.
 11. Y. Efendiev, V. Ginting, T. Hou, R. Ewing. Accurate multiscale finite element methods for two-phase flow simulations // Journal of Computational Physics, 220, P. 155–174, 2006.
 12. S. H. Lee, H. Zhou, H. A. Tchelepi. Adaptive multiscale finite-volume method for nonlinear multiphase transport in heterogeneous formations // Journal of Computational Physics, V. 228, P. 9036–9058, 2009.
 13. Л. Г. Страховская, Р. П. Федоренко. Об одной специальной разностной схеме // Численные методы механики сплошной среды, Т. 7, № 4, С. 149–163, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1976.
 14. T. J. R. Hughes. Multiscale Phenomena: Green's Functions, the Dirichlet-to-Neumann Formulation, Subgrid Scale Models, Bubbles and the Origins of Stabilized Methods // Comput. Methods Appl. Math. Engineering, V. 127, P. 387–401, 1995.
 15. I. Babuska, E. Osborn. Generalized finite element methods: Their performance and their relation to mixed methods // SIAM J. Numer. Anal., V. 20, P. 510–536, 1983.
 16. I. Babuska, W. G. Szymczak, An Error Analysis for the Finite Element Method Applied to Convection-Diffusion Problems // Comput. Methods Appl. Math. Engineering, V. 31, P. 19–42, 1982.
 17. I. Babuska, G. Caloz, J. E. Osborn. Special finite methods for a class of second problems with rough coefficients // SIAM Journal Numerical Analysis, V. 31, N. 4, P. 945–981, 1994.
 18. В. Т. Жуков, Н. Д. Новикова, О. Б. Феодоритова. Метод суперэлементов для расчета слоистых сред // Препринт ИПМ № 41, Москва, 2008.
 19. F. Brezzi. Interacting with the Subgrid World // Numerical Analysis (Dundee), Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, P. 69–82, 2000.

20. А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов, П. Ю. Тomin. О некоторых многомасштабных алгоритмах секторного моделирования в задачах многофазной фильтрации // *Мат. моделирование*, Т. 22, № 11, С. 3–17, 2010.
21. V. Kippe, J. E. Aarnes, K.-A. Lie. A Comparison of Multiscale Methods for Elliptic Problems in Porous Media Flow // *Kluwer Academic Publishers, Netherlands*, 2007.
22. Y. Efendiev, T. Y. Hou. Multiscale finite element methods using limited global information // *Multiscale Finite Element Methods, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences*, V. 4, P. 1–28, 2009.
23. J. E. Aarnes, V. Kippe, K.-A. Lie. Mixed multiscale finite elements and streamline methods for reservoir simulation of large geomodels // *Adv. Water Resour.*, V. 28, N. 3, P. 257–271, 2005.
24. M. M. Honarpour, A. S. Cullick, N. Saad, N. V. Humphreys. Effect of Rock Heterogeneity on Relative Permeability: Implications for Scale-up // paper SPE 29311, SPE Asia Pacific Oil & Gas Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, 20–22 March 1995.
25. Y. Efendiev, T. Y. Hou. *Multiscale Finite Element Methods* // Springer Science+Business Media, New York, USA, 2009.
26. Y. Efendiev, T. Y. Hou, V. Ginting. Multiscale finite element methods for nonlinear problems and their applications // *Comm. Math. Sci.*, V. 2, P. 553–589, 2004.
27. Y. Efendiev, A. Pankov. Numerical homogenization of nonlinear random parabolic operators // *SIAM Multiscale Model. and Simul.*, V. 2, N. 2, P. 237–268, 2004.
28. А. Х. Пергамент, П. Ю. Тomin. Об исследовании функций относительных фазовых проницаемостей для анизотропных сред // *Мат. моделирование*, в печати.
29. А. А. Самарский, А. В. Колдоба, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский. Разностные схемы на нерегулярных сетках // Минск, 1996.
30. A. Kh. Pergament, V. A. Semiletov, M. Yu. Zaslavsky. Multiscale Averaging Algorithms for Flow Modeling in Heterogeneous Reservoir // *Proceedings of ECMOR X, Amsterdam, The Netherlands, P014*, 2006.
31. А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов. Метод опорных операторов для эллиптических и параболических краевых задач с разрывными коэффициентами в анизотропных средах // *Мат. моделирование*, Т. 19, № 5, С. 105–116, 2007.
32. R. A. Raviart, J. M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems // *Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics*, V. 606, P. 292–315, Springer, New York, 1977.

33. П. Ю. Томин. Многомасштабные алгоритмы на основе метода конечных суперэлементов в задачах двухфазной фильтрации // Препринт ИПМ № 45, Москва, 2007.
34. L. Jiang, Y. Efendiev, I. Mishev. Mixed multiscale finite element methods using approximate global information based on partial upscaling // *Computational Geosciences*, V. 14, N. 2, P. 319–341, 2009.
35. M. A. Christie, M. J. Blunt. Tenth SPE Comparative Solution Project: A Comparison of Upscaling Techniques // SPE paper 66599, SPE Reser. Eval. Eng., V. 4, P. 308–317, 2001.
36. K. H. Coats. A Note on IMPES and Some IMPES Based Simulation Models // SPE paper 65092, 2000.
37. J. R. Appleyard, I. M. Cheshire. Reservoir Modelling: fully implicit simulation methods // in “Developments in Petroleum Engineering 1”, Routledge, UK, edited by R. A. Dawe, D. C. Wilson, P. 229–263, 1985.
38. A. Kh. Pergament, V. A. Semiletov, P. Yu. Tomin. Multiscale Asynchronous Algorithms Based on the Superelements Method for Multiphase Flow // Proceedings of ECMOR XI, Bergen, Norway, A35, 2008.
39. M. G. Edwards, C. F. Rogers. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation // *Computational Geosciences*, V. 2, P. 259–290, 1998.
40. Kh. Aziz, A. Settari. Petroleum Reservoir Simulation // Elsevier Applied Science Publishers, London, 1980.
41. M. Honarpour, L. Koederitz, A. H. Harvey. Relative permeability of petroleum reservoirs // C.R.C. Press, Boca Raton, Florida, USA, 1986.
42. M. Honarpour, S. M. Mahmood. Relative Permeability Measurements: An Overview // SPE paper 18565, SPE Technology Today Series, 1986.
43. А. Г. Ковалев, А. М. Кузнецов, В. П. Юрчак и др. Нефть. Метод определения фазовых проницаемостей в лабораторных условиях при стационарной фильтрации // Отраслевой стандарт Миннефтепрома, ОСТ 39-235-89, М.: Миннефтепром, 1989.
44. M. S. Leverett, W. B. Lewis. Steady flow of gas-oil-water mixtures through unconsolidated sands // *Trans. AIME*, V. 142, P. 107, 1941.
45. A. T. Corey, C. H. Rathjens, J. H. Henderson, M. R. J. Wyllie. Three-phase relative permeability // *Trans. AIME*, V. 201, P. 349, 1956.
46. Д. А. Эфрос. Определение относительных проницаемостей и функций распределения при вытеснении нефти водой // Докл. Акад. наук. СССР, Т. 110, В. 5, С. 746–749, 1956.
47. Кундин А., Куранов И.Ф. К вопросу о методике расчетов фазовых проницаемостей по данным опытов по нестационарному вытеснению нефти водой // Труды ВНИИнефть, В. 28, С. 85–95, 1960.
48. E. F. Johnson, D. P. Bossler, V. O. Naumann. Calculation of Relative Permeability from Displacement Experiments // *Petroleum Transaction AIME*, V. 216, P. 370–372, 1959.

49. K. H. Coats, R. L. Nielsen, M. H. Terhune, A. G. Weber. Simulation of three-dimensional two-phase flow in oil and gas reservoirs // SPE J., V. 7, N. 12, P. 377–388, 1967.
50. А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов, П. Ю. Тomin. Ремасштабирование в задачах фильтрации с анизотропными коэффициентами // Вестник ЦКР Роснедра, №4, 2010.
51. В. М. Максимов, М. Н. Дмитриев, Ю. С. Антoневич. Эффекты тензорного характера относительных фазовых проницаемостей при взаимном вытеснении газа водой в анизотропных пластах // Газовая промышленность, №12 (639), С. 10–12, 2009.