



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Брюно А.Д., Батхин А.Б.

Разрешение алгебраической
сингулярности алгоритмами
степенной геометрии

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Брюно А.Д., Батхин А.Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 10. 30 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-10>

Публикации по материалам препринта

Batkhin A.B. Application of the method of asymptotic solution to one multiparameter problem: 14th International Workshop, CASC 2012, Maribor, Slovenia, September 3-6, 2012. Proceedings // Vol. 7442 / ed. by V.P. Gerdt [et al.]. Berlin Heidelberg : Springer, 2012. Pp. 22-33. (Lecture Notes in Computer Science). ISBN 0302-9743.

DOI: [10.1007/978-3-642-32973-9_3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-32973-9_3)

URL: http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-32973-9_3

Брюно А.Д., Батхин А.Б. Асимптотическое решение алгебраического уравнения // Докл. Акад. Наук. 2011. Т. 440, № 3. С. 295-300.

Bruno A.D., Batkhin A.B. Asymptotic solution of an algebraic equation // Doklady Mathematics. 2011. Oct. Vol. 84, no. 2. Pp. 634-639. ISSN 1064-5624.

DOI: [10.1134/S1064562411060160](https://doi.org/10.1134/S1064562411060160)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS1064562411060160>

Брюно А.Д., Батхин А.Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной

геометрии // Программирование. 2012. № 2. С. 12-30.

Bruno A.D., Batkhin A.B. Resolution of an algebraic singularity by Power Geometry algorithms // Programming and Computer Software. 2012. Mar. Vol. 38, no. 2. Pp. 57-72. ISSN 0361-7688.

DOI: [10.1134/S036176881202003X](https://doi.org/10.1134/S036176881202003X)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS036176881202003X>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, А. Б. Батхин

РАЗРЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ
СИНГУЛЯРНОСТИ
АЛГОРИТМАМИ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Москва, 2011 г.

УДК 512.77+531.36

А. Д. Брюно, А. Б. Батхин. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

В § 1 рассматривается многочлен от трех переменных вблизи его особой точки, в которой он сам и его частные производные равны нулю. Предлагается метод вычисления асимптотических разложений по параметрам для всех ветвей множества нулей этого многочлена вблизи указанной точки. При этом различаются три типа разложений. Метод вычисления основан на пространственной степенной геометрии. В § 2 предлагается реализация этого метода на примере некоторого многочлена шестой степени от трех переменных вблизи бесконечности и вблизи его вырожденной особой точки.

A. D. Bruno, A. B. Batkhin. Resolution of an algebraic singularity by Power Geometry algorithms. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2011.

In § 1, we consider a polynomial in three variables near singular point, where the polynomial and its partial derivatives vanish. We propose a method of computation of asymptotic expansions for all branches of the set of zeroes of the polynomial. We distinguish three types of expansions. The method of computation is based on the spatial Power Geometry. In § 2, we show an implementation of the method on a polynomial in three variables of the degree six, and we compute asymptotic expansions at infinity and at degenerate singular point of the polynomial.

© ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

E-mails: abruno@keldysh.ru, batkhin@gmail.com

сайт: www.keldysh.ru

§ 1. Асимптотическое решение алгебраического уравнения

1.1. Постановка задачи. Пусть $g(\mathbf{Q})$ — многочлен от 3-х переменных (комплексных или вещественных), т. е. $\mathbf{Q} = (x, y, z)$.

Определение. Точка \mathbf{Q}^0 называется *особой точкой порядка k* многочлена $g(\mathbf{Q})$, если в этой точке обращаются в ноль сам многочлен g и все его частные производные до порядка k включительно, но отлична от нуля хотя бы одна производная порядка $k + 1$. Если $g(\mathbf{Q}^0) = 0$, но в точке \mathbf{Q}^0 хотя бы одна частная производная многочлена $g(\mathbf{Q})$ не равна нулю, то \mathbf{Q}^0 — *простая точка* многочлена g или множества $\mathcal{G} = \{\mathbf{Q} : g(\mathbf{Q}) = 0\}$.

Пусть $g(\mathbf{Q}^0) = 0$, наша задача — исследовать множество \mathcal{G} вблизи точки \mathbf{Q}^0 . Если \mathbf{Q}^0 — простая точка, то по теореме Коши о неявной функции вблизи этой точки на множестве \mathcal{G} одна из локальных координат выражается в виде степенного ряда от других локальных координат, что и является локальным описанием множества \mathcal{G} . Содержательной такая задача является вблизи особой точки \mathbf{Q}^0 . Ниже уточняется постановка задачи и описываются способы ее решения.

Задача 1. Вблизи особой точки $\mathbf{Q}^0 = 0$ для всех ветвей решений уравнения $g(\mathbf{Q}) = 0$ найти разложения одного из следующих трех типов:

Тип 1:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v^k, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v^k, \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} d_k v^k,$$

где v — локальный параметр, b_k, c_k, d_k — либо вещественные, либо комплексные постоянные коэффициенты.

Тип 2:

$$x = \sum b_{pq} u^p v^q, \quad y = \sum c_{pq} u^p v^q, \quad z = \sum d_{pq} u^p v^q,$$

где u и v — локальные координаты, коэффициенты b_{pq}, c_{pq}, d_{pq} постоянны, целочисленные показатели (p, q) лежат в некотором секторе раствора меньше π .

Тип 3:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(u) v^k, \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(u) v^k, \quad z = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(u) v^k,$$

где $\beta_k(u), \gamma_k(u), \delta_k(u)$ либо рациональные функции от u , либо рациональные функции от u и $\sqrt{\psi(u)}$, где $\psi(u)$ — многочлен. Здесь u — глобальная координата, а v — локальная.

Задача 2. Для всех кривых особых точек множества \mathcal{G} , примыкающих к точке \mathbf{Q}^0 , найти разложения типа 1.

1.2. Объекты и алгоритмы степенной геометрии (см. [1, гл. I, II]). Пусть задана конечная сумма (например, многочлен)

$$g(\mathbf{Q}) = \sum g_R \mathbf{Q}^R \text{ по } R \in \mathbf{S}, \quad (1.1)$$

где $\mathbf{Q} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{Q}^R = x^{r_1} y^{r_2} z^{r_3}$, $g_R = \text{const} \in \mathbb{R}$. Каждому слагаемому суммы (1.1) ставится в соответствие его векторный показатель степени R , а всей сумме (1.1) — множество \mathbf{S} всех векторных показателей ее слагаемых, которое называется *носителем* суммы (1.1) или многочлена $g(\mathbf{Q})$ и обозначается $\mathbf{S}(g)$. Выпуклая оболочка носителя $\mathbf{S}(g)$ называется *многогранник Ньютона* суммы $g(\mathbf{Q})$ и обозначается $\Gamma(g)$. Граница $\partial\Gamma$ многогранника $\Gamma(g)$ состоит из *обобщенных граней* $\Gamma_j^{(d)}$ разных размерностей $d = 0, 1, 2$. Здесь j — номер грани. Каждой обобщенной грани $\Gamma_j^{(d)}$ ставится в соответствие *укороченная сумма*

$$\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q}) = \sum g_R \mathbf{Q}^R \text{ по } R \in \Gamma_j^{(d)} \cap \mathbf{S}(g).$$

Обобщенная грань $\Gamma_j^{(d)}$ имеет $3 - d$ линейно независимых нормальных векторов $N_k = (n_{1k}, n_{2k}, n_{3k})$, направленных наружу многогранника $\Gamma(g)$. Если все точки R носителя $\mathbf{S}(g)$ рациональны, то все нормальные векторы N_k можно взять целочисленными. Каждая укороченная сумма $\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q})$ является квазиоднородной, и число ее разных квазиоднородностей равно $3 - d$.

Пусть \mathbb{R}_*^3 трехмерное вещественное пространство, двойственное пространству \mathbb{R}^3 , и $S = (s_1, s_2, s_3)$ — точки этого пространства. Тогда для точек $R \in \mathbb{R}^3$ и $S \in \mathbb{R}_*^3$ определено скалярное произведение

$$\langle R, S \rangle = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3. \quad (1.2)$$

В частности, внешняя нормаль N_k к обобщенной грани $\Gamma_k^{(d)}$ является точкой пространства \mathbb{R}_*^3 . Для нее скалярное произведение $\langle R, N_k \rangle$ на носителе, т. е. по $R \in \mathbf{S}(g)$, достигает максимума $c_k = \langle R, N_k \rangle$ на точках $R \in \Gamma_k^{(d)} \cap \mathbf{S}$, т. е. принадлежащих обобщенной грани $\Gamma_k^{(d)}$. Более того, множество всех тех точек $S \in \mathbb{R}_*^3$, для которых скалярное произведение (1.2) достигает максимума по всем точкам $R \in \mathbf{S}(g)$ именно на точках $R \in \Gamma_k^{(d)}$, называется *нормальным конусом* обобщенной грани $\Gamma_k^{(d)}$ и обозначается $\mathbf{U}_k^{(d)}$.

Пусть двумерные грани $\Gamma_j^{(2)}$, $j = j_1, \dots, j_m$, примыкают к обобщенной грани $\Gamma_k^{(d)}$, т. е. $\Gamma_k^{(d)} = \Gamma_{j_1}^{(2)} \cap \dots \cap \Gamma_{j_m}^{(2)}$. Тогда

$$\mathbf{U}_k^{(d)} = \left\{ S = \lambda_1 N_{j_1} + \dots + \lambda_m N_{j_m} \right\}, \quad (1.3)$$

где $\lambda_j > 0$, N_j — внешние нормали к граням $\Gamma_j^{(2)}$. То есть нормальный конус обобщенной грани является выпуклой конической оболочкой внешних нормалей двумерных граней, примыкающих к ней.

Теорема 1. Если при $t \rightarrow \infty$ кривая

$$x = bt^{s_1}(1 + o(1)), \quad y = ct^{s_2}(1 + o(1)), \quad z = dt^{s_3}(1 + o(1)), \quad (1.4)$$

где b, c, d и s_i — постоянные, лежит в множестве \mathcal{G} , и вектор $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{U}_j^{(d)}$, то первое приближение

$$x = bt^{s_1}, \quad y = ct^{s_2}, \quad z = dt^{s_3}$$

кривой (1.4) удовлетворяет укороченному уравнению $\hat{f}_j^{(d)}(\mathbf{Q}) = 0$.

Для вершины $\Gamma_j^{(0)}$ укороченная сумма $\hat{g}_j^{(0)}$ состоит из одного слагаемого. Такие укорочения нам не интересны и в дальнейшем не рассматриваются. Будем рассматривать лишь укорочения, т. е. укороченные суммы, соответствующие ребрам $\Gamma_j^{(1)}$ и граням $\Gamma_j^{(2)}$.

Введем степенные преобразования

$$\ln \mathbf{Q} = B \ln \mathbf{Q}_1, \quad (1.5)$$

где $\ln \mathbf{Q} = (\ln x, \ln y, \ln z)^T$, $\ln \mathbf{Q}_1 = (\ln x_1, \ln y_1, \ln z_1)^T$, B — невырожденная квадратная 3×3 матрица (b_{ij}) с рациональными элементами b_{ij} (зачастую они будут целыми). При степенном преобразовании (1.5) моном \mathbf{Q}^R переходит в моном $\mathbf{Q}_1^{R_1}$, где

$$R_1^T = B^T R^T.$$

Действительно, справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{Q}^R = \exp \langle R, \ln \mathbf{Q} \rangle = \exp \langle R, B \ln \mathbf{Q}_1 \rangle = \exp \langle B^T R^T, \ln \mathbf{Q}_1 \rangle = \mathbf{Q}_1^{B^T R^T}.$$

Степенное преобразование (1.5) в двойственном пространстве \mathbb{R}_*^3 индуцирует линейное преобразование

$$\tilde{S}^T = B^{-1} S^T. \quad (1.6)$$

Матрица B называется *унимодулярной*, если все ее элементы целые и $\det B = \pm 1$. Очевидно, для унимодулярной матрицы B обратная матрица B^{-1} также унимодулярна.

Теорема 2. Для грани $\Gamma_j^{(d)}$ существует степенное преобразование (1.5) с унимодулярной матрицей B , которое переводит укороченную сумму $\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q})$ в сумму от d координат, т. е.

$$\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}_1^R h(\mathbf{Q}_1),$$

где $h(\mathbf{Q}_1) = h(x_1)$, если $d = 1$, и $h(\mathbf{Q}_1) = h(x_1, y_1)$, если $d = 2$. Здесь $R = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$. При этом дополнительные координаты y_1, z_1 при $d = 1$ и z_1 при $d = 2$ являются локальными, и для многочлена $\hat{g}_j^{(d)}(\mathbf{Q})$ сумма $h(\mathbf{Q}_1)$ также будет многочленом.

Умножению многочлена $g(\mathbf{Q})$ на \mathbf{Q}^P соответствует параллельный перенос носителя $\mathbf{S}(g)$ и многогранника $\Gamma(g)$ на вектор P . Поэтому если после степенного преобразования (1.5), примененного к многочлену $g(\mathbf{Q})$, получаем конечную сумму $h(\mathbf{Q}_1)$, содержащую отрицательные степени координат x_1, y_1 или z_1 , то существует такой вектор P , что произведение $\mathbf{Q}_1^P h(\mathbf{Q}_1)$ является многочленом, т. е. все показатели степени его мономов неотрицательны.

Назовем *конусом задачи* \mathbf{K} множество таких векторов $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}_*^3$, что кривые вида (1.4) заметают ту часть пространства (x, y, z) , которую надо исследовать. Так, задаче 1 соответствует конус задачи $\mathbf{K} = \{S = (s_1, s_2, s_3) : S < 0\}$, ибо $x, y, z \rightarrow \infty$. Если $x \rightarrow \infty$, то $s_1 > 0$ в конусе задачи \mathbf{K} .

1.3. Решение задачи 1. Пусть известна особая точка \mathbf{Q}^0 или кривая \mathcal{F} , состоящая из особых точек, или поверхность \mathcal{S} , состоящая из особых точек, вблизи которой мы хотим исследовать строение нашего множества $\mathcal{G} = \{\mathbf{Q} : g(\mathbf{Q}) = 0\}$. Тогда надо выполнить следующую последовательность шагов вычислений.

1. Делаем замену координат $\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (x, y, z) \rightarrow \mathbf{Q}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, y_1, z_1)$, переводящую множество особенностей в координатное подпространство. То есть особая точка переводится в начало координат, особая кривая — в координатную ось, а особая поверхность — в координатную плоскость. Предпочтительны замены вида $x = \xi(\mathbf{Q}_1)$, $y = \eta(\mathbf{Q}_1)$, $z = \zeta(\mathbf{Q}_1)$, где ξ, η, ζ — многочлены. Теперь получаем задачу: исследовать корни многочлена $\tilde{g}(\mathbf{Q}_1) \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{Q})$ вблизи координатного подпространства $\mathbf{Q}_1 = 0$ или $x_1 = y_1 = 0$ или $x_1 = 0$. При этом в каждом из этих трех случаев в \mathbb{R}_*^3 будет свой конус задачи \mathbf{K} : $S < 0$ или $s_1, s_2 < 0$ или $s_1 < 0$, соответственно.
2. Записываем многочлен g в координатах \mathbf{Q}_1 , т. е. $g_1(\mathbf{Q}_1) = g(\mathbf{Q})$, вычисляем его носитель $\mathbf{S}(g_1)$, многогранник $\Gamma(g_1)$, его двумерные грани $\Gamma_j^{(2)}$ и их внешние нормали N_j . Согласно формуле (1.3) по нормальям N_j вычисляем нормальные конусы $\mathbf{U}_k^{(1)}$ ребер $\Gamma_k^{(1)}$.
3. Отбираем все те ребра $\Gamma_k^{(1)}$ и грани $\Gamma_j^{(2)}$, нормальные конусы которых $\mathbf{U}_k^{(1)}$ и $\mathbf{U}_j^{(2)}$ пересекаются с конусом задачи \mathbf{K} . Зачастую, для этого достаточно отобрать все грани $\Gamma_j^{(2)}$, у которых внешняя нормаль N_j пересекается с конусом задачи \mathbf{K} , и добавить все ребра $\Gamma_k^{(1)}$ этих граней.
4. Для каждого отобранного ребра $\Gamma_k^{(1)}$ или грани $\Gamma_j^{(2)}$ с нормальным конусом $\mathbf{U}_k^{(1)}$ или $\mathbf{U}_j^{(2)}$ находим корни соответствующего укороченного многочлена $\hat{g}_k^{(1)}(\mathbf{Q}_1)$ или $\hat{g}_j^{(2)}(\mathbf{Q}_1)$. Здесь возможны два случая.

Случай а). Если множество корней имеет вид

$$x_1 = \psi_1(z_1), \quad y_1 = \psi_2(z_1), \quad (1.7)$$

или

$$x_1 = \psi_1(y_1, z_1), \quad (1.8)$$

где ψ_i — многочлены, то делаем замену координат

$$x_2 = x_1 - \psi_1(z_1), \quad y_2 = y_1 - \psi_2(z_1), \quad z_2 = z_1$$

или

$$x_2 = x_1 - \psi_1(y_1, z_1), \quad y_2 = y_1, \quad z_2 = z_1$$

и получаем в координатах $\mathbf{Q}_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_2, y_2, z_2)$ задачу исследования окрестности оси $x_2 = y_2 = 0$ или координатной плоскости $x_2 = 0$ с конусами задачи

$$\mathbf{K} = \{S = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 + \lambda_1(-1, 0, 0)\} \quad (1.9)$$

или

$$\mathbf{K} = \{S = \mu_1 N_1 + \lambda_1(-1, 0, 0) + \lambda_2(0, -1, 0)\}, \quad (1.10)$$

где $\lambda_i > 0$, $\mu_i \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, а N_1 и N_2 — внешние нормали к граням, примыкающим к рассматриваемому ребру для (1.9) или N_1 — внешняя нормаль к выбранной грани для (1.10).

Случай б). Множество корней укороченного уравнения $\hat{g}_j^{(1)}(\mathbf{Q}_1)$ или $\hat{g}_j^{(2)}(\mathbf{Q}_1)$ не имеет вид (1.7) или (1.8). Тогда в укороченном многочлене делаем степенное преобразование от \mathbf{Q}_1 к \mathbf{Q}_2 , описанное теоремой 2, и получаем укороченное уравнение в виде

$$h(x_2) = 0, \quad \text{если } d = 1, \quad (1.11)$$

или

$$h(x_2, y_2) = 0, \quad \text{если } d = 2, \quad (1.12)$$

а дополнительные координаты y_2 , z_2 или z_2 , соответственно, будут локальными, т. е. малыми. Если x_2^0 — простой корень уравнения (1.11), то справедлив аналог теоремы Коши о неявной функции, и решения полного уравнения $g_2(\mathbf{Q}_2) = 0$ разлагаются в ряд вида

$$x_2 - x_2^0 = \sum b_{pq} y_2^p z_2^q,$$

где целочисленные показатели (p, q) лежат в некотором секторе плоскости p, q с раствором меньше π . Возвращаясь к исходным координатам, получаем разложение решений типа 2.

Если x_2^0 — кратный корень уравнения (1.11), то делаем замену, как в случае а), строим новый многогранник Ньютона и т. д.

Пусть решение уравнения (1.12) имеет вид

$$x_2 = \psi_2(y_2), \quad (1.13)$$

где ψ_2 — многочлен. Если на этой кривой

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \stackrel{\text{def}}{=} a(y_2) \neq 0, \quad (1.14)$$

то согласно теореме 1.1 из гл. II книги [1] решения полного уравнения разлагаются в ряд

$$x_2 = \psi_2(y_2) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(y_2) z_2^k,$$

где $b_k(y_2)$ — рациональные функции. Возвращаясь к исходным переменным, получаем разложение решений типа 3.

Если на кривой (1.13) условие (1.14) не выполнено, то полагаем

$$x_3 = x_2 - \psi(y_2), \quad y_3 = y_2, \quad z_3 = z_2,$$

вычисляем многочлен в новых координатах $g_3(\mathbf{Q}_3) \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{Q})$, строим его многогранник Ньютона (как в случае а).

Если решения уравнения (1.12) не имеют вид (1.13), то поступаем следующим образом. Разлагаем $h(x_2, y_2)$ на неприводимые множители. Пусть $\tilde{h}(x_2, y_2)$ — такой множитель и ρ — род его кривой.

Если $\rho = 0$, то существует бирациональная униформизация этой кривой $x_2 = \Xi(y_3), y_2 = \mathbf{H}(y_3)$ [2]. Делаем замену $x_2 = \Xi(y_3) + x_3, y_2 = \mathbf{H}(y_3)$. Тогда \tilde{h} делится на x_3 . Перейдем к переменным $x_3, y_3, z_3 = z_2$ в полном многочлене и получим $g_3(\mathbf{Q}_3)$. Если $\tilde{h}(x_2, y_2)$ — простой множитель в $h(x_2, y_2)$, то согласно теореме 1.1 гл. II [1] в полном многочлене $g_3(\mathbf{Q}_3)$ решения разлагаются в ряд вида

$$x_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(y_3) z_3^k, \quad (1.15)$$

где $\alpha_k(y_3)$ — рациональные функции от y_3 . В исходных координатах ему соответствует разложение типа 3. Если $\tilde{h}(x_2, y_2)$ — кратный множитель в $h(x_2, y_2)$, то для $g_3(\mathbf{Q}_3)$ строим многогранник Ньютона, конус задачи $\mathbf{K}_3 = \{S : s_2, s_3 < 0\}$ и продолжаем процедуру.

Если $\rho = 1$, то существует бирациональная замена $x_2, y_2 \rightarrow x_3, y_3$, приводящая $\tilde{h}(x_2, y_2)$ к нормальной форме

$$x_3^2 - \psi(y_3), \quad (1.16)$$

где ψ — многочлен степени 3 или 4. Если $\rho > 1$, то различают гиперэллиптические и негиперэллиптические кривые. Гиперэллиптическая кривая бирационально эквивалентна $x_2, y_2 \rightarrow x_3, y_3$ нормальной форме (1.16), где $\psi(y_3)$ — многочлен степени $2\rho+1$ или $2\rho+2$ [2, гл. VI, § 7]. Если множитель \tilde{h} в h прост, то это приводит к разложению решений уравнения $g_3(\mathbf{Q}_3) = 0$ в ряд (1.15), где α_k — рациональные функции от y_3 и $\sqrt{\psi(y_3)}$. В исходных координатах получаем разложение третьего типа. Если \tilde{h} — кратный множитель в h , то описанная процедура не продолжается.

Может случиться, что множество корней укороченного уравнения содержит компоненты, относящиеся к разным случаям а) и б). Тогда для каждой компоненты поступаем согласно сказанному выше, и процедура ветвится.

5. Нули (x_2^0, y_2^0) суммы $h(x_2, y_2)$ или $h(x_2)$ разделяем на семейства простых точек и семейства особых точек. Простые точки после обратных преобразований $\mathbf{Q}_2 \rightarrow \mathbf{Q}_1 \rightarrow \mathbf{Q}$ дадут приближение поверхности $g(\mathbf{Q}) = 0$. Особые точки надо снова подвергнуть локальному анализу. Для этого надо снова выполнить шаги 1–5 и так далее.

На каждом цикле из этих шагов будет происходить упрощение особенности, и через конечное число циклов особенность удастся разрешить.

Замечания. а) Если укорочение $\hat{g}_j^{(2)}(\mathbf{Q}_1)$ является степенью некоторой суммы $\varphi(\mathbf{Q}_1)$, то вместо шагов 3 и 4 лучше ввести новую переменную $x_2 = \varphi(\mathbf{Q}_1)$, а y_1 и z_1 не менять. Аналогично, если укорочение $\hat{g}_k^{(1)}(\mathbf{Q}_1)$, соответствующее ребру $\Gamma_k^{(1)}$ грани $\Gamma_j^{(2)}$, является степенью некоторой суммы $\psi(\mathbf{Q}_1)$, то вместо шагов 3 и 4 лучше ввести новую переменную $x_2 = \psi(\mathbf{Q}_1)$, а y_1 и z_1 не менять.

- б) Если укороченный многочлен $\hat{g}_j^{(2)}(\mathbf{Q}_1)$ факторизуется, то аналогично факторизуется и многочлен $h(x_1, y_1)$, полученный с помощью степенного преобразования теоремы 2. В этом случае решение уравнения $h(x_1, y_1) = 0$ упрощается.

- в) Для асимптотического анализа множества $\{\mathbf{Q} : g(\mathbf{Q}) = 0\}$ при $\mathbf{Q} \rightarrow \infty$ делаются шаги 2 и т. д. Только в этом случае отбираются все те грани $\Gamma_j^{(2)}$ многогранника $\Gamma(g)$, у которых положительны внешние нормали: $N_j > 0$, ибо здесь конус задачи $\mathbf{K} = \{S > 0\}$.

- г) Укорочение $\hat{g}_k^{(1)}$, соответствующее ребру $\Gamma_k^{(1)}$, содержащему только две точки носителя, не имеет кратных корней. Простые корни многочлена $\hat{g}_k^{(1)}$, соответствующего ребру $\Gamma_k^{(1)}$, можно не рассматривать, ибо они отлавливаются по семействам корней укороченных многочленов, соответствующих граням, примыкающим к ребру $\Gamma_k^{(1)}$.
- д) Окончание описанной процедуры вычисления разложения особых точек или кратных корней соответствует «сквозной дыре» в многограннике, которой соответствует грань параллельная координатной оси с внешним нормальным вектором вида $N = (-n, -m, 0)$, где n и m — натуральные числа.
- е) Отбор нормалей N_j , попадающих в конус задачи \mathbf{K} , удобно выполнять, записав формулы (1.9) или (1.10) в координатной форме

$$s_1 = \mu_1 n_{11} + \mu_2 n_{21} - \lambda_1, \quad s_2 = \mu_1 n_{12} + \mu_2 n_{22}, \quad s_3 = \mu_1 n_{13} + \mu_2 n_{23},$$

или

$$s_1 = \mu_1 n_{11} - \lambda_1, \quad s_2 = \mu_1 n_{12} - \lambda_2, \quad s_3 = \mu_1 n_{13},$$

а затем решить получившуюся систему линейных уравнений относительно переменных μ_i и λ_i . Если свойство д) не выполнено, то указанные выше системы всегда будут совместны. Здесь $N_1 = (n_{11}, n_{12}, n_{13})$, $N_2 = (n_{21}, n_{22}, n_{23})$.

- ж) При вычислении бесконечного разложения можно остановиться либо на простом решении со свойством (1.14), либо на том цикле, где у грани имеется фиксированное ребро, а точка, противоположная этому ребру, находится уже достаточно далеко («стабилизация» разложения).
- з) Для решения задачи 2 надо на каждом шаге отбирать кратные решения уравнения (1.11) и особые точки уравнения (1.12). Тогда получаются разложения типа 1, но для них аналогом теоремы о неявной функции служит «стабилизация» предыдущего замечания.

Теорема 3. *Если в процедуре, состоящей из повторения последовательности описанных выше шагов (1)–(5), на каждом шаге находят все указанные грани и ребра и все корни соответствующих укороченных уравнений, и при этом все встречающиеся кривые корней двумерных укороченных уравнений, имеющие положительный род эллиптически или гиперэллиптически и просты, то получим локальное описание всех компонент множества $g(\mathbf{Q}) = 0$, примыкающих к исходной точке \mathbf{Q}^0 , в виде разложений типов 1–3.*

На самом деле, описанная процедура довольно громоздка, и ее лучше выполнять с помощью какой-либо системы компьютерной алгебры, разработав соответствующее математическое обеспечение. Авторы сделали это.

§ 2. Пример разрешения алгебраической сингулярности

2.1. Формулировка задачи. Рассмотрим в качестве примера разложения ветвей множества \mathcal{G} многочлена $g(\mathbf{Q})$, который изучался в работах [3, 4] в связи с исследованием устойчивости одной гироскопической задачи. Этот многочлен имеет вид

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{Q}) = & 512z^6 - 4352z^5y - 768z^5x + 14848z^4y^2 + 5376z^4yx + \\
& + 512z^4x^2 - 25408z^3y^3 - 14656z^3y^2x - 2752z^3yx^2 - 192z^3x^3 + \\
& + 21800z^2y^4 + 19168z^2y^3x + 5360z^2y^2x^2 + 736z^2yx^3 + \\
& + 40z^2x^4 - 7500zy^5 - 11700zy^4x - 4376zy^3x^2 - \\
& - 904zy^2x^3 - 92zyx^4 - 4zx^5 + 2500y^5x + 1200y^4x^2 + \\
& + 344y^3x^3 + 48y^2x^4 + 4yx^5 - \\
& - 256z^5 + 2880z^4y + 1344z^4x - 14976z^3y^2 - 6720z^3yx - \\
& - 1344z^3x^2 + 37928z^2y^3 + 13816z^2y^2x + 5144z^2yx^2 + 456z^2x^3 - \quad (2.1) \\
& - 45120zy^4 - 14464zy^3x - 6784zy^2x^2 - 1152zyx^3 - 64zx^4 + \\
& + 20250y^5 + 6490y^4x + 3156y^3x^2 + 740y^2x^3 + 82yx^4 + 2x^5 + \\
& + 1872z^4 + 2016z^3y - 5088z^3x - 35496z^2y^2 + 15888z^2yx + \\
& + 2200z^2x^2 + 67608zy^3 - 12936zy^2x - 5176zyx^2 - 344zx^3 - \\
& - 37827y^4 + 828y^3x + 2782y^2x^2 + 412yx^3 + 13x^4 - \\
& - 13824z^3 + 62208z^2y + 6912z^2x - 93312zy^2 - 20736zyx - \\
& - 1152zx^2 + 46656y^3 + 15552y^2x + 1728yx^2 + 64x^3.
\end{aligned}$$

Анализ глобальной структуры множества \mathcal{G} выполнен в п. 4.4 и 4.10 работы [3]. Здесь лишь напомним его результаты.

Множество \mathcal{G} имеет четыре особые точки второго порядка с координатами

$$Q_0 = 0, \quad Q_1 = (-2, 2, 2), \quad Q_2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, 6\right), \quad Q_3 = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2\right). \quad (2.2)$$

Каждая из них является точкой пересечения пары семейств особых точек первого порядка. Эти семейства представляют собой две параболы \mathcal{P}_1 (проходит через точки Q_0 и Q_1), \mathcal{P}_2 (проходит через точки Q_2 и Q_3) и криволинейный четырехугольник \mathcal{F} , проходящий через все особые точки второго порядка. Параметрические представления этих семейств имеют вид

$$\mathcal{P}_1 : \begin{cases} x = -2t^2, \\ y = -2t^2 - 4t, \\ z = -4t^2 - 6t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = 3v + v^2/2, \\ y = 2 + v + v^2/2, \\ z = 3 + 2v + v^2, \end{cases} \quad v \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x = 2 \sin^4 \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1) - 3 \sin^3 2\varphi, \\ y = 2 + 6 \cos^4 \varphi - 8 \cos^6 \varphi - \sin^3 2\varphi, \\ z = 2 + 6 \cos^2 \varphi - 8 \cos^6 \varphi - 2 \sin^3 2\varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi < \pi. \quad (2.5)$$

Простые точки множества \mathcal{G} лежат на линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$, параметрическое представление которой имеет вид

$$\begin{aligned} x &= -3(u+1) \sin 2\varphi + 2u \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi, \\ y &= -(u+1) \sin 2\varphi + 2u \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi + 2, \\ z &= -2(u+1) \sin 2\varphi + u(1 + 2 \cos^2 \varphi) + \sin^2 2\varphi + 3, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi < \pi, \\ u \in \mathbb{R}. \end{array} \quad (2.6)$$

Локальный анализ множества \mathcal{G} вблизи парабол $\mathcal{P}_{1,2}$ и кривой \mathcal{F} дан в пп. 4.6 и 4.7 работы [3], а вблизи бесконечности и вблизи особой точки Q_0 проведен лишь частично.

2.2. Асимптотический анализ вблизи бесконечности. Многогранник Ньютона $\Gamma(g)$ многочлена (2.1) показан на рис. 1 со стороны больших показателей степеней. Он имеет только одну двумерную грань с положительной внешней нормалью. Это пятиугольная грань $\Gamma_{01}^{(2)}$ с нормалью $N_{01} = (1,1,1)$. Ей соответствует укороченный многочлен

$$\hat{g}_{01}^{(2)}(\mathbf{Q}) = 4 (2z^2 - zx + xy - 3zy) (x^2 + 6xy + 25y^2 - 4zx - 28zy + 8z^2)^2. \quad (2.7)$$

Укорочения, соответствующие ребрам грани $\Gamma_{01}^{(2)}$, не имеют кратных корней.

Нуль первой формы в (2.7) определяет коническую поверхность \mathcal{C}_0 с центром в начале координат. Эта поверхность аппроксимирует в первом приближении поведение на бесконечности двумерной компоненты множества \mathcal{G} . Для того, чтобы убедиться в этом, выделим в параметризации (2.6) линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ старшие члены относительно параметра u

$$\begin{aligned} x &= 2u \sin \varphi (\sin \varphi - 3 \cos \varphi), \\ y &= 2u \cos \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi), \\ z &= u(2 \cos^2 \varphi - 2 \sin 2\varphi + 1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

и подставим в первую квадратичную форму, которая после упрощения будет тождественно равна нулю.

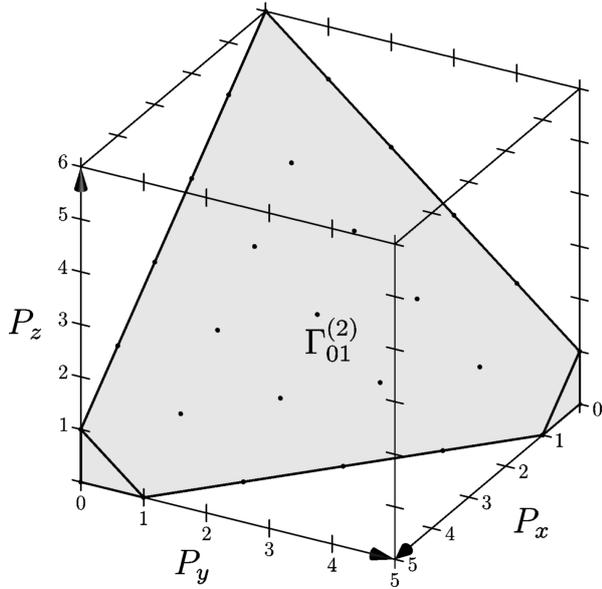


Рис. 1. Носитель и многогранник Ньютона многочлена $g(\mathbf{Q})$. Показаны грани с положительными внешними нормальями.

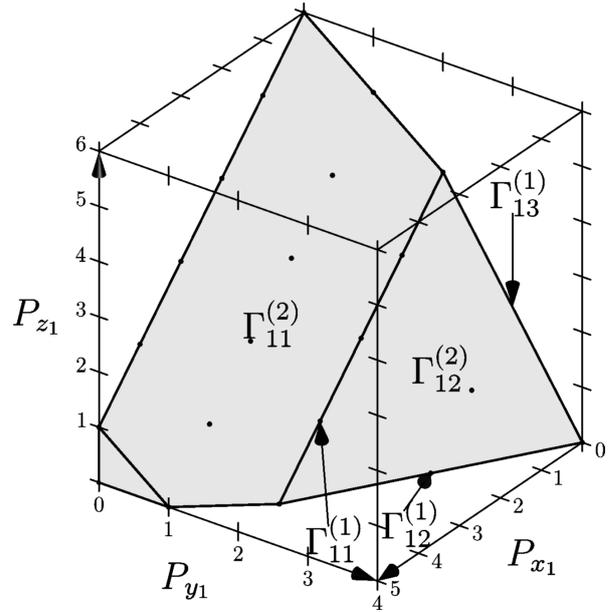


Рис. 2. Многогранник Ньютона многочлена $g_1(\mathbf{Q}_1)$ после подстановки (2.10). Показаны грани $\Gamma_{11}^{(2)}$, $\Gamma_{12}^{(2)}$ и ребро $\Gamma_{11}^{(1)}$.

Введем параметризацию x, v конической поверхности \mathcal{C}_0 :

$$y = x \frac{2v^2 - v}{3v - 1}, \quad z = xv, \quad (2.9)$$

тогда соответствие между параметризациями (2.8) и (2.9) задается следующими соотношениями:

$$x = 2u \sin \varphi (\sin \varphi - 3 \cos \varphi), \quad v = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{ctg} \varphi).$$

Корни второй квадратичной формы в (2.7) образуют действительную прямую $\mathcal{B} = \{x = y, z = 2y\}$ с направляющим вектором $\tau_{\mathcal{B}} = (1, 1, 2)$, лежащим на пересечении двух комплексных плоскостей, на которых эта квадратичная форма аннулируется. Эта прямая \mathcal{B} задает в первом приближении асимптотическое направление ветвей множества \mathcal{G} . Для того, чтобы найти параметрическое разложение этих ветвей, используем процедуру, описанную в п. 1.3 § 1. Новые переменные k -го цикла будут иметь индекс k , этот индекс будет первым индексом и в обозначениях других объектов: граней, их нормалей, соответствующих укороченных многочленов, нормальных конусов и конусов задачи.

Найдем следующее приближение разложения множества \mathcal{G} вблизи этой прямой \mathcal{B} . Для этого выполним переход к локальным координатам вдоль

прямой \mathcal{B} :

$$x = x_1 + y_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1 + 2y_1. \quad (2.10)$$

В этой замене y_1 будет параметром прямой, а x_1 и z_1 — локальными координатами. Многогранник Ньютона $\Gamma(g_1(\mathbf{Q}_1))$ преобразованного многочлена $g(\mathbf{Q})$ показан на рис. 2 в переменных $\mathbf{Q}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. Конус задачи согласно формуле (1.10) есть $\mathbf{K}_1 = \{S = \mu_1 N_{01} + \lambda_1(-1, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, -1)\}$, где $\mu_1 \geq 0$, $\lambda_{1,2} > 0$. В координатном представлении компоненты вектора S из конуса задачи \mathbf{K}_1 запишутся в виде $s_1 = \mu_1 - \lambda_1$, $s_2 = \mu_1$, $s_3 = \mu_1 - \lambda_2$. Следуя замечанию е) п. 1.3 получим систему неравенств

$$\mu_1 = s_2 \geq 0, \quad \lambda_1 = s_2 - s_1 > 0, \quad \lambda_2 = s_2 - s_3 > 0, \quad (2.11)$$

эффективно выделяющую векторы из \mathbf{K}_1 . У многогранника $\Gamma(g(\mathbf{Q}_1))$ внешние нормали к граням суть

$$\begin{aligned} N_{11} &= (1, 1, 1), \quad N_{12} = (1, 2, 1), \quad N_{13} = (0, -1, 0), \quad N_{14} = -(1, 1, 1), \\ N_{15} &= (-1, 0, 0), \quad N_{16} = (1, 0, 0), \quad N_{17} = (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Согласно (2.11) в конус задачи \mathbf{K}_1 попадает только нормаль N_{12} . Ей соответствует грань $\Gamma_{12}^{(2)}$ (см. рис. 2) и укороченный многочлен

$$\begin{aligned} \hat{g}_{12}^{(2)} &= 4y_1^2(64z_1^4 - 64z_1^3x_1 + 32z_1^2x_1^2 - 8z_1x_1^3 + x_1^4 + \\ &\quad + 64z_1y_1x_1 - 16y_1x_1^2 + 64y_1^2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

а трем ребрам $\Gamma_{11}^{(1)}$, $\Gamma_{12}^{(1)}$, $\Gamma_{13}^{(1)}$ грани $\Gamma_{12}^{(2)}$ соответствуют укороченные многочлены

$$\hat{g}_{11}^{(1)} = 4y_1^2(x_1^2 - 4x_1z_1 + 8z_1^2)^2, \quad (2.13)$$

$$\hat{g}_{12}^{(1)} = 4y_1^2(x_1^4 - 16y_1x_1^2 + 64y_1^2) = 4y_1^2(x_1^2 - 8y_1)^2, \quad (2.14)$$

$$\hat{g}_{13}^{(1)} = 4y_1^2(64z_1^4 + 64y_1^2). \quad (2.15)$$

У многочлена в скобках в (2.13) дискриминант отрицательный, т.е. он не имеет ненулевых вещественных корней. У многочлена в скобках в (2.15) также нет ненулевых вещественных корней (ибо он является суммой квадратов). Корни многочлена (2.14) суть $y_1 = x_1^2/2$, $z_1 = 0$, которые относятся к случаю а) шага 4 п. 1.3, и будут исследованы несколько позже как случай (2.17).

Дискриминант второго множителя многочлена (2.12) относительно переменной y_1 равен $-4z_1^2(x_1 - 2z_1)^2$. Поскольку многочлен (2.12) четной степени по y_1 , то его вещественные корни возможны лишь в двух случаях:

$$\text{либо при } x_1 - 2z_1 = 0, \text{ тогда } y_1 = -z_1^2/2, \quad (2.16)$$

$$\text{либо при } z_1 = 0, \text{ тогда } y_1 = x_1^2/8 \text{ — это корень многочлена (2.14).} \quad (2.17)$$

Если рассмотреть дискриминанты многочлена (2.12) относительно других переменных, то из условия равенства дискриминанта нулю получим либо указанные выше следствия, либо отсутствие вещественных решений. Рассмотрим каждый из случаев (2.16) и (2.17) отдельно.

В случае (2.16) сделаем замену

$$x_1 = x_2 + 2z_2, \quad y_1 = y_2 - z_2^2/2, \quad z_1 = z_2, \quad (2.18)$$

т. е. локальными переменными теперь будут x_2 и y_2 . Многогранник Ньютона многочлена $g_2(\mathbf{Q}_2)$ показан на рис. 3 в переменных $\mathbf{Q}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Новый конус задачи есть

$$\mathbf{K}_2 = \{S = \mu_1 N_{12} + \lambda_1(-1, 0, 0) + \lambda_2(0, -1, 0)\}, \quad (2.19)$$

где $\mu_1 \geq 0$, $\lambda_{1,2} > 0$. Тогда компоненты вектора S , попадающего в конус задачи (2.19), должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$s_3 = \mu_1 \geq 0, \quad s_3 - s_1 = \lambda_1 > 0, \quad 2s_3 - s_2 = \lambda_2 > 0. \quad (2.20)$$

Грани многогранника Ньютона $\Gamma(g_2(\mathbf{Q}_2))$ имеют следующие внешние нормали:

$$\begin{aligned} N_{21} &= (1, 2, 1), \quad N_{22} = (0, 1, 1), \quad N_{23} = (0, -1, 0), \quad N_{24} = -(1, 1, 1), \\ N_{25} &= (-1, 0, 0), \quad N_{26} = (1, 0, 0), \quad N_{27} = (0, 0, -1), \quad N_{28} = (2, 2, 1). \end{aligned}$$

Согласно (2.20) в конус задачи (2.19) попадает только нормаль N_{22} , а соответствующий грани $\Gamma_{22}^{(2)}$ укороченный многочлен есть $\hat{g}_{22}^{(2)} = 16z_2^6 x_2^2 + 64z_2^4 (2z_2 + y_2)^2$. Все его корни лежат на прямой $x_2 = 0$, $2z_2 + y_2 = 0$ и являются корнями укорочения $\hat{g}_{21}^{(1)}$, соответствующего ребру $\Gamma_{21}^{(1)}$ грани $\Gamma_{22}^{(2)}$, что и определяет следующую замену переменных

$$x_2 = x_3, \quad y_2 = y_3 - 2z_3, \quad z_2 = z_3. \quad (2.21)$$

Укорочения, соответствующие другим ребрам грани $\Gamma_{22}^{(2)}$ не содержательны согласно замечанию г) п. 1.3. Ребро $\Gamma_{21}^{(1)}$ является общим для граней $\Gamma_{22}^{(2)}$ и $\Gamma_{25}^{(2)}$, следовательно, новый конус задачи есть

$$\mathbf{K}_3 = \{S = \mu_1 N_{22} + \mu_2 N_{25} + \lambda_1(0, -1, 0)\}, \quad (2.22)$$

где $\mu_{1,2} \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$. В него попадут только те векторы S , компоненты которых удовлетворяют неравенствам

$$s_3 = \mu_1 \geq 0, \quad s_1 = -\mu_2 \leq 0, \quad s_3 - s_1 = \mu_1 + \mu_2 > 0, \quad s_3 - s_2 = \lambda_1 > 0. \quad (2.23)$$

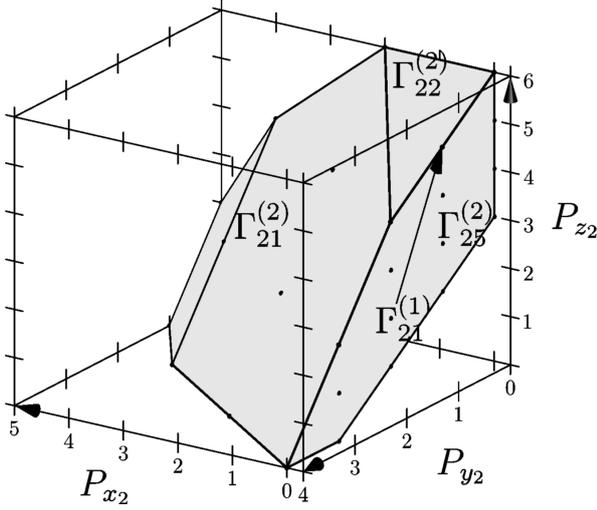


Рис. 3. Многогранник Ньютона многочлена $g_2(\mathbf{Q}_2)$. Показаны грани $\Gamma_{21}^{(2)}$, $\Gamma_{22}^{(2)}$, $\Gamma_{25}^{(2)}$ и ребро $\Gamma_{21}^{(1)}$.

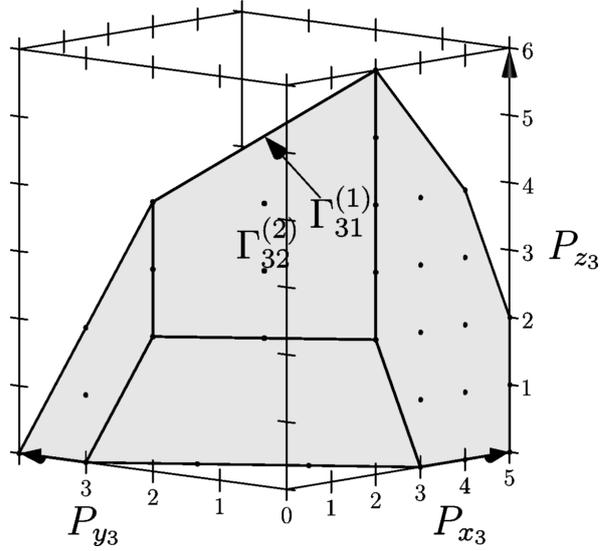


Рис. 4. Многогранник Ньютона многочлена $g_3(\mathbf{Q}_3)$. Показаны грань $\Gamma_{32}^{(2)}$ и ребро $\Gamma_{31}^{(1)}$.

Многогранник Ньютона $\Gamma(g_3(\mathbf{Q}_3))$ имеет следующие внешние нормали к граням:

$$\begin{aligned} N_{31} &= (1, 2, 1), \quad N_{32} = (-1, -1, 0), \quad N_{33} = (0, -1, 0), \quad N_{34} = -(2, 2, 1), \\ N_{35} &= (-1, 0, 0), \quad N_{36} = (1, 0, 0), \quad N_{37} = (0, 0, -1), \quad N_{28} = (2, 2, 1). \end{aligned}$$

Согласно (2.23) в конус задачи (2.22) попадает только нормаль N_{32} . Поскольку эта грань $\Gamma_{32}^{(2)}$ оказывается параллельной оси OZ (см. рис. 4), то получили «дыру» в многограннике, т. е. согласно замечанию д) п. 1.3 разложение окончено.

Укороченный многочлен, соответствующий грани $\Gamma_{32}^{(2)}$,

$$\hat{g}_{32}^{(2)} = 16 z_3^2 (z_3 + 2)^2 (x_3^2 (z_3 + 1)^2 + 4y_3 (y_3 - x_3)) \quad (2.24)$$

обращается в нуль только при $x_3 = y_3 = 0$ для произвольных значений z_3 , выполняющего здесь роль глобального параметра. Выполним степенное преобразование $y_3 = wx_3$, тогда третий множитель многочлена (2.24) после факторизации примет вид $(z_3 + 1)^2 + 4w(w - 1)$. Равенство его нулю возможно лишь при $0 \leq w \leq 1$, а тогда переменная z_3 принимает значения из интервала $[-2, 0]$, т. е. при z_3 вблизи $\pm\infty$ вещественный корень $x_3 = y_3 = 0$ является изолированным.

Собирая вместе подстановки (2.10), (2.18), (2.21) получаем итоговое разложение

$$x = -z_3^2/2, \quad y = -2z_3 - z_3^2/2, \quad z = -3z_3 - z_3^2, \quad (2.25)$$

которое определяет семейство \mathcal{P}_1 , ибо параметризация (2.25) переходит в (2.3) при $z_3 = 2t$.

В случае (2.17) выполним замену

$$x_1 = x_4, \quad y_1 = y_4 + x_4^2/8, \quad z_1 = z_4. \quad (2.26)$$

У ребра $\Gamma_{12}^{(1)}$, соответствующего многочлену (2.14), примыкающие грани имеют нормали $N_{12} = (1, 2, 1)$ и $N_{17} = (0, 0, -1)$. Новый конус задачи есть

$$\mathbf{K}_4 = \{S = \mu_1 N_{12} + \mu_2 N_{17} + \lambda_1 (0, -1, 0)\}, \quad (2.27)$$

где $\mu_{1,2} \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$. В конус задачи попадут только те векторы S , компоненты которых удовлетворяют следующей системе неравенств

$$s_1 = \mu_1 \geq 0, \quad s_1 - s_3 = \mu_2 \geq 0, \quad 2s_1 - s_3 = \mu_1 + \mu_2 > 0, \quad \lambda_1 = 2s_1 - s_2 > 0. \quad (2.28)$$

Многогранник Ньютона $\Gamma(g_4(\mathbf{Q}_4))$ показан на рис. 5.

Внешние нормали его граней суть

$$\begin{aligned} N_{41} &= (1, 2, 1), \quad N_{42} = (1, 1, 0), \quad N_{43} = (0, -1, 0), \quad N_{44} = -(1, 1, 1), \\ N_{45} &= (-1, 0, 0), \quad N_{46} = (1, 2, 2), \quad N_{47} = (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Согласно (2.28) в конус задачи (2.27) попадает только нормаль N_{42} . Укорочение исходного многочлена, соответствующее грани $\Gamma_{42}^{(2)}$, есть $\hat{g}_{42}^{(2)} = 2x_4^4(z_4^2 x_4^2 + 2z_4 y_4 x_4 + 2y_4^2 - 2y_4 x_4 + x_4^2)$. Множитель в скобках записывается в виде суммы двух квадратов: $(z_4 x_4 + y_4)^2 + (y_4 - x_4)^2$, которая обнуляется только при условии $z_4 = -1$, $x_4 = y_4$, что определяет замену переменных

$$x_4 = x_5 + y_5, \quad y_4 = y_5, \quad z_4 = -1 + z_5. \quad (2.29)$$

Новый конус задачи есть

$$\mathbf{K}_5 = \{S = \mu_1 N_{42} + \lambda_1 (-1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 0, -1)\}, \quad (2.30)$$

где $\mu_1 \geq 0$, $\lambda_{1,2} > 0$. Подходящие векторы S должны удовлетворять системе неравенств $s_2 = \mu_1 \geq 0$, $s_2 - s_1 = \lambda_1 > 0$, $s_3 = -\lambda_2 < 0$. У нового многогранника Ньютона $\Gamma(g_5(\mathbf{Q}_5))$ (см. рис. 6) нормали к граням суть

$$\begin{aligned} N_{51} &= (1, 1, 0), \quad N_{52} = (0, 1, -1), \quad N_{53} = (0, -1, 0), \quad N_{54} = (1, 1, 1), \\ N_{55} &= (-1, 0, 0), \quad N_{56} = (1, 1, 2), \quad N_{57} = (0, 0, -1), \end{aligned}$$

но в конус задачи (2.30) попадает только нормаль N_{52} . Укорочение многочлена $g_5(\mathbf{Q}_5)$, соответствующее этой грани, есть многочлен $\hat{g}_{52}^{(2)} = y_5^2(z_5 y_5(z_5 y_5 -$

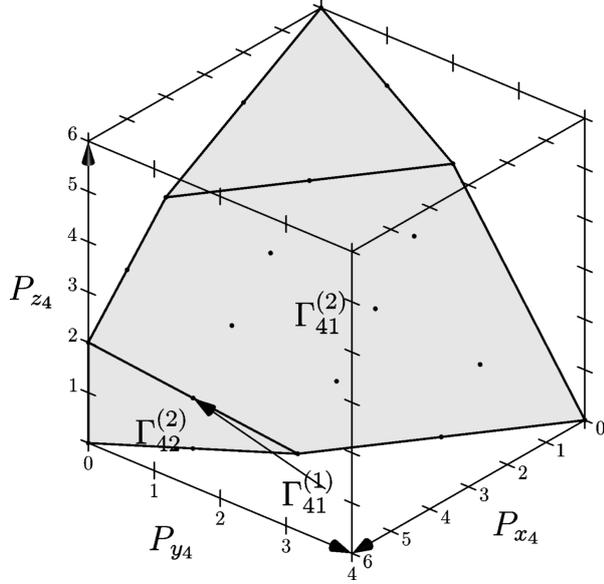


Рис. 5. Многогранник Ньютона многочлена $g_4(\mathbf{Q}_4)$ после подстановки (2.26).

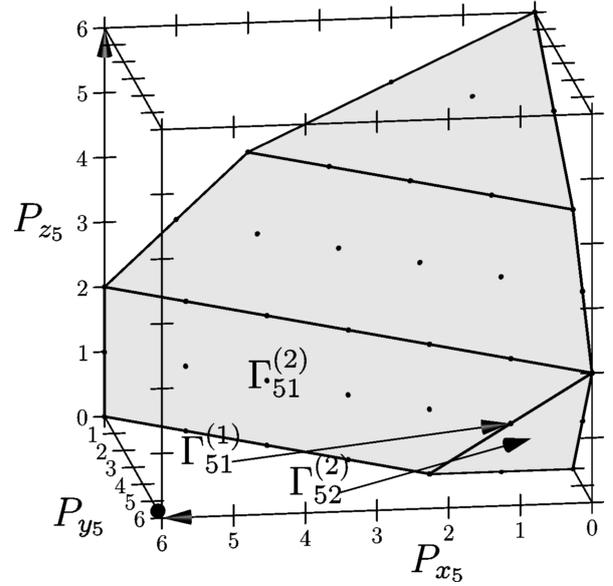


Рис. 6. Многогранник Ньютона многочлена $g_5(\mathbf{Q}_5)$ после подстановки (2.29).

$2x_5 - 7) + (2x_5 + 7)^2$), который обнуляется при $x_5 = -7/2$, $z_5 = 0$. После замены

$$x_5 = x_6 - 7/2, \quad y_5 = y_6, \quad z_5 = z_6 \quad (2.31)$$

получаем грань $\Gamma_{61}^{(2)}$ с нормальным вектором $N_{61} = (-1, 0, -1)$ (см. рис. 7), параллельную оси OY , т.е. дыру в многограннике. Согласно замечанию д) п. 1.3 разложение окончено. Укороченный многочлен, соответствующий этой грани есть

$$\hat{g}_{62}^{(2)} = \frac{1}{32}(2y_6+1)^2(2y_6-7)^2(4z_6^2y_6^2-8z_6y_6x_6+4z_6y_6-20z_6x_6+8x_4^2+9z_6^2). \quad (2.32)$$

Выполним степенное преобразование $x_6 = wz_6$, тогда последний множитель многочлена (2.32) после факторизации примет вид $4y_6^2 - 8wy_6 + 4y_6 + 8w^2 - 20w + 9$. Его дискриминант относительно переменной y_6 записывается в виде $64(2 - (w - 2)^2)$ и, следовательно, уравнение $\hat{g}_{62}^{(2)} = 0$ имеет вещественные корни лишь при $2 - \sqrt{2} \leq w \leq 2 + \sqrt{2}$, когда переменная y_6 принимает значения на интервале $[3/2 - \sqrt{2}, 3/2 + \sqrt{2}]$, т.е. при y_6 вблизи $\pm\infty$ решение $x_6 = y_6 = 0$ является изолированным.

Собирая замены (2.10), (2.26), (2.29) и (2.29), получаем разложение второго семейства \mathcal{P}_2 :

$$x = \frac{-63 + 36y_5 + 4y_5^2}{32}, \quad y = \frac{49 + 4y_5 + 4y_5^2}{32}, \quad z = \frac{33 + 4y_5 + 4y_5^2}{16}, \quad (2.33)$$

ибо параметризация (2.33) переходит в (2.4) при $y_5 = 2v + 3/2$.

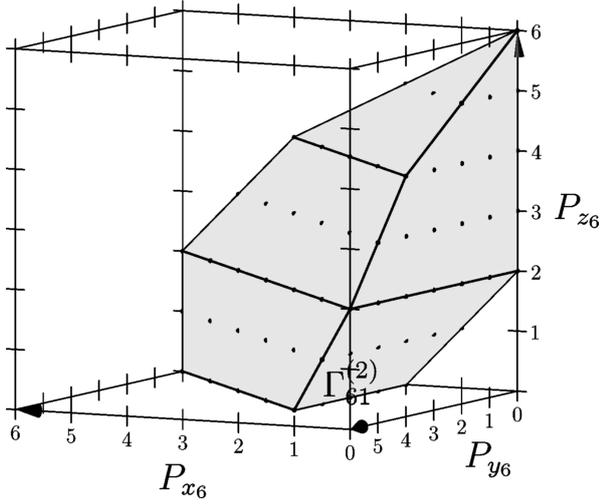


Рис. 7. Многогранник Ньютона многочлена $g_6(\mathbf{Q}_6)$ после подстановки (2.31).

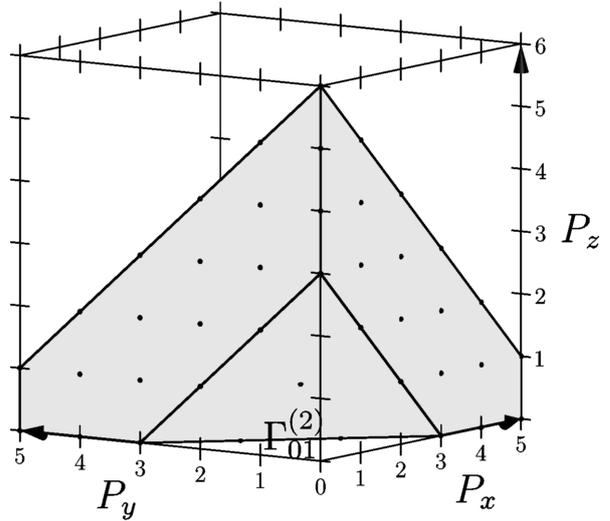


Рис. 8. Многогранник Ньютона для многочлена $g(\mathbf{Q})$. Показаны грани с отрицательными внешними нормальными.

Итак, асимптотическое представление множества \mathcal{G} в бесконечности состоит только из асимптотик линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ и парабол \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 .

2.3. Строение множества \mathcal{G} вблизи особых точек второго порядка.

Через каждую особую точку второго порядка (2.2) проходит семейство \mathcal{F} и одна из ветвей семейств $\mathcal{P}_{1,2}$, т. е. локально множество \mathcal{G} вблизи каждой из этих точек устроено одинаково, и достаточно провести его локальный анализ вблизи одной из этих четырех точек, например, вблизи точки $Q_0 = 0$.

Носитель многочлена (2.1) и его многогранник Ньютона $\Gamma(g)$ показаны на рис. 8 со стороны малых показателей степени. Укорочение многочлена $g(\mathbf{Q})$, соответствующее грани $\Gamma_{01}^{(2)}$ с нормальным вектором $N_{01} = -(1,1,1)$, имеет вид $\hat{g}_0^{(2)} = 64(x + 9y - 6z)^3$. Следовательно, согласно замечанию а) п. 1.3, выполним замену переменных

$$x = 6z_1 - 9y_1 + x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1. \quad (2.34)$$

Получаем конус задачи $\mathbf{K}_1 = \{S : s_1 < s_2 = s_3 < 0\}$. В новом многограннике Ньютона нормали к граням суть

$$\begin{aligned} N_{11} &= -(4,3,3), \quad N_{12} = (1,1,1), \quad N_{13} = (1,0,0), \\ N_{14} &= (0,-1,0), \quad N_{15} = (0,0,-1), \quad N_{16} = (-1,0,0). \end{aligned}$$

Следовательно, имеется лишь одна грань $\Gamma_{11}^{(2)}$ с нормальным вектором $N_{11} = (-4, -3, -3) \in \mathbf{K}_1$, которой соответствует укорочение $\hat{g}_{11}^{(2)} = 64x_1^3 - 432(3y_1 -$

$2z_1)^4$. Грань $\Gamma_{11}^{(2)}$ является треугольником, два ее ребра содержат лишь по две точки носителя. Эти ребра не рассматриваем по замечанию г) п. 1.3. Третьему ребру $\Gamma_{11}^{(1)}$ соответствует факторизуемое укорочение $\hat{g}_{11}^{(1)} = -432(3y_1 - 2z_1)^4$. К этому ребру примыкает грань $\Gamma_{16}^{(2)}$ с нормалью $N_{16} = (-1, 0, 0)$. Поэтому делаем замену

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = 3y_2/2 + z_2. \quad (2.35)$$

Получаем конус задачи $\mathbf{K}_2 = \{S = \mu_1 N_{11} + \mu_2 N_{16} + \lambda_1(0, 0, -1)\}$, где $\mu_{1,2} \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$. Подходящие векторы S удовлетворяют системе неравенств: $s_2 = -3\mu_1 \leq 0$, $4s_2/3 - s_1 = \mu_2 \geq 0$, $s_2 - s_3 = \lambda_1 > 0$, $s_2 - s_1 = \mu_1 + \mu_2 > 0$. Внешние нормали к граням нового многогранника Ньютона (см. рис. 9) суть

$$\begin{aligned} N_{21} &= -(4, 2, 3), \quad N_{22} = -(2, 0, 1), \quad N_{23} = (1, 0, 0), \quad N_{24} = (0, -1, 0), \\ N_{25} &= (0, 0, -1), \quad N_{26} = (-1, 0, 0), \quad N_{27} = (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Из них только две N_{21} и N_{22} лежат в конусе задачи \mathbf{K}_2 . Согласно замечанию д) п. 1.3 грани $\Gamma_{22}^{(2)}$ соответствует «дыра» в многограннике, т. е. на ней процедура разложения заканчивается. Этой грани соответствует прямая $\mathcal{C}_1 = \{x_2 = z_2 = 0\}$, принадлежащая линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$. Грани $\Gamma_{22}^{(2)}$ соответствует многочлен $\hat{g}_{22}^{(2)} = -2y_2^3(y_2 - 2)(x_2 y_2 + 8z_2^2)$. При малых y_2 он имеет кратный нуль $y_2 = 0$, который соответствует точке Q_0 . Нуль последнего множителя многочлена $\hat{g}_{22}^{(2)}$ соответствует части поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$, примыкающей к прямой \mathcal{C}_1 .

Грани $\Gamma_{21}^{(2)}$ с нормалью $N_{21} = -(4, 2, 3)$ соответствует укорочение

$$\hat{g}_{21}^{(2)} = 32 z_2^2 y_2^3 - 6912 z_2^4 - 1152 z_2^2 y_2 x_2 + 4 x_2 (4 x_2 - y_2^2)^2. \quad (2.36)$$

Грань $\Gamma_{21}^{(2)}$ является четырехугольником. Три ее ребра содержат только по две точки носителя, и по замечанию г) п. 1.3 их не рассматриваем. Четвертое ребро $\Gamma_{21}^{(1)}$ содержит три точки носителя, и соответствующий укороченный многочлен $4 x_2 (4 x_2 - y_2^2)^2$ содержит квадратный множитель. Поэтому согласно общей процедуре здесь можно сделать замену $x_2 = x_3 + y_3^2/4$, $y_2 = y_3$, $z_2 = z_3$ и т. д. Тогда получится разложение параболы \mathcal{P}_1 вблизи точки Q_0 в виде бесконечного степенного ряда. Чтобы получить конечное разложение этой параболы, выполним степенное преобразование

$$x_2 = x_3^2, \quad y_2 = y_3, \quad z_2 = z_3, \quad (2.37)$$

которое преобразует многогранник Ньютона так, что выбранная грань $\Gamma_{21}^{(2)}$ с нормалью N_{21} перейдет в грань $\Gamma_{31}^{(2)}$ с нормалью $N_{31} = (-2, -2, -3)$, а

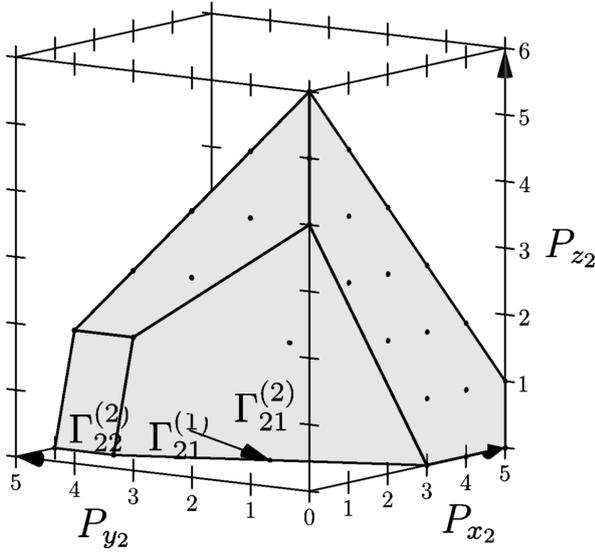


Рис. 9. Многогранник Ньютона для многочлена $g_2(\mathbf{Q}_2)$ после преобразования (2.35). Показаны грани с отрицательными внешними нормальными.

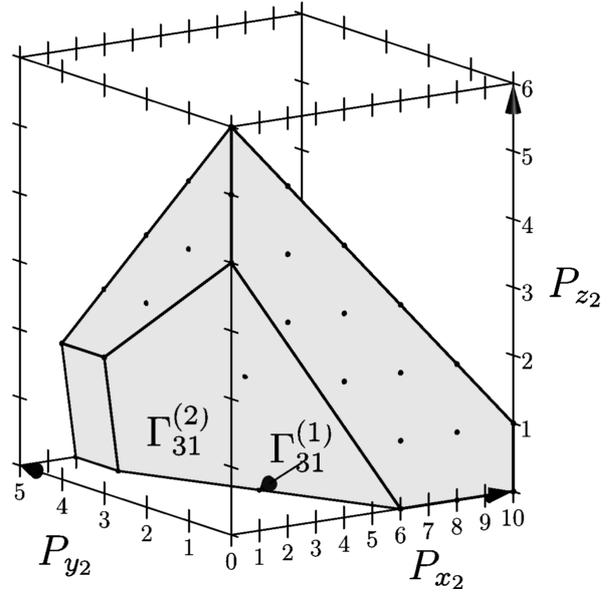


Рис. 10. Многогранник Ньютона для многочлена $g_3(\mathbf{Q}_3)$. Показаны грань $\Gamma_{31}^{(2)}$ и ребро $\Gamma_{31}^{(1)}$.

соответствующий этой грани укороченный многочлен $\hat{g}_{31}^{(2)}$ примет вид

$$\hat{g}_{31}^{(2)} = 32 z_3^2 y_3^3 - 6912 z_3^4 - 1152 z_3^2 y_3 x_3^2 + 4 x_3^2 (2 x_3 + y_3)^2 (2 x_3 - y_3)^2. \quad (2.38)$$

Дискриминант многочлена (2.38) относительно переменной z_3 равен с точностью до положительного постоянного множителя

$$-x_3^2 (2 x_3 - y_3)^2 (2 x_3 + y_3)^2 (12 x_3^2 + y_3^2)^6,$$

т. е. уравнение $\hat{g}_{31}^{(2)} = 0$ имеет нетривиальные (ненулевые) вещественные корни только в одном из двух случаев:

$$\text{либо при } 2x_3 + y_3 = 0, \quad (2.39)$$

$$\text{либо при } 2x_3 - y_3 = 0, \quad (2.40)$$

причем в каждом из этих случаев имеется корень $z_3 = 0$ кратности 2 и вещественный корень уравнения $8x_3^3 \mp 27z_3^2$, соответственно. Оба эти случая приводят к рассмотрению вещественных корней укороченного многочлена $\hat{g}_{31}^{(1)} = 4 x_3^2 (2 x_3 + y_3)^2 (2 x_3 - y_3)^2$, соответствующего ребру $\Gamma_{31}^{(1)}$ (см. рис. 10).

Рассмотрим случай (2.39). После замены переменных

$$x_3 = x_4, \quad y_3 = y_4 - 2x_4, \quad z_3 = z_4, \quad (2.41)$$

получаем многогранник Ньютона многочлена $g_4(\mathbf{Q}_4)$ в новых переменных \mathbf{Q}_4 , показанный на рис. 11, внешние нормали к граням которого суть

$$\begin{aligned} N_{41} &= -(2,2,3), & N_{42} &= -(2,3,4), & N_{43} &= (1,1,1), & N_{44} &= (0, -1,0), \\ N_{45} &= (1,2,2), & N_{46} &= (-1,0,0), & N_{47} &= (-1,0, -1). \end{aligned}$$

Ребро $\Gamma_{31}^{(1)}$ является общим для граней $\Gamma_{31}^{(2)}$ и $\Gamma_{32}^{(2)}$ с нормальными $N_{31} = -(2,2,3)$ и $N_{32} = (0,0, -1)$, соответственно, тогда конус задачи есть

$$\mathbf{K}_4 = \{S = \mu_1 N_{31} + \mu_2 N_{32} + \lambda_1(0, -1,0)\}, \quad (2.42)$$

где $\mu_{1,2} \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$. В конус (2.42) попадут только те нормали, компоненты которых удовлетворяют системе неравенств $\mu_1 = -s_1/2 \geq 0$, $\mu_2 = 3s_1/2 - s_3 \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 = s_1 - s_3 > 0$, $\lambda_1 = s_1 - s_2 > 0$. Подходящей является только нормаль N_{42} , а укороченный многочлен, соответствующий грани $\Gamma_{42}^{(2)}$, есть

$$\hat{g}_{42}^{(2)} = 64x_4^3(2(4z_4 + x_4^2)^2 + x_4y_4^2). \quad (2.43)$$

Укорочения, соответствующие трем ребрам $\Gamma_{41}^{(1)}$, $\Gamma_{42}^{(1)}$, $\Gamma_{43}^{(1)}$ грани $\Gamma_{42}^{(2)}$ будут равны, соответственно

$$\hat{g}_{41}^{(1)} = 128x_4^3(4z_4 + x_4^2)^2, \quad (2.44)$$

$$\hat{g}_{42}^{(1)} = 64x_4^4(2x_4^3 + y_4^2), \quad \hat{g}_{43}^{(1)} = 64x_4^3(32z_4^2 + x_4y_4^2). \quad (2.45)$$

Многочлены (2.45) не рассматриваем по замечанию г) п. 1.3. Многочлены (2.43) и (2.44) имеют вещественные корни $y_4 = 0$, $z_4 = -x_4^2/4$, которые определяют замену

$$x_4 = x_5, \quad y_4 = y_5, \quad z_4 = z_5 - x_5^2/4. \quad (2.46)$$

Ребро $\Gamma_{41}^{(1)}$ является общим для граней с нормальными N_{42} и N_{44} , следовательно, новым конусом задачи будет

$$\mathbf{K}_5 = \{S = \mu_1 N_{42} + \mu_2 N_{44} + \lambda_1(0,0, -1)\}, \quad (2.47)$$

где $\mu_{1,2} \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$. Многогранник Ньютона многочлена $g_5(\mathbf{Q}_5)$ в новых переменных \mathbf{Q}_5 (рис. 12) имеет следующие внешние нормали к своим граням:

$$\begin{aligned} N_{51} &= -(2,2,3), & N_{52} &= -(2,4,5), & N_{53} &= (1,1,1), & N_{54} &= (1,2,2), \\ N_{55} &= (-1,0,0), & N_{56} &= (0, -1,0), & N_{57} &= (0,0, -1), & N_{58} &= (-1,0, -1). \end{aligned}$$

В конус задачи (2.47) попадут только те векторы, компоненты которых удовлетворяют системе неравенств $\mu_1 = -s_1/2 \geq 0$, $\mu_2 = 3s_1/2 - s_2 \geq 0$,

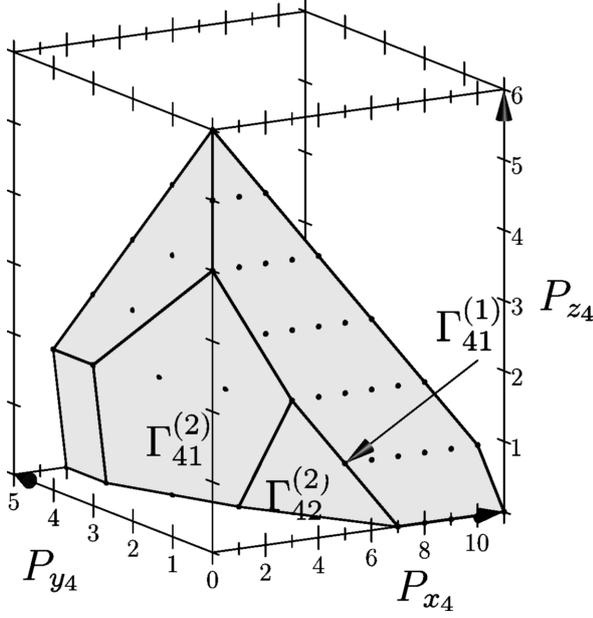


Рис. 11. Многогранник Ньютона для многочлена $g_4(\mathbf{Q}_4)$ после преобразования (2.41). Показаны грани $\Gamma_{41}^{(2)}$, $\Gamma_{42}^{(2)}$ и ребро $\Gamma_{41}^{(1)}$.

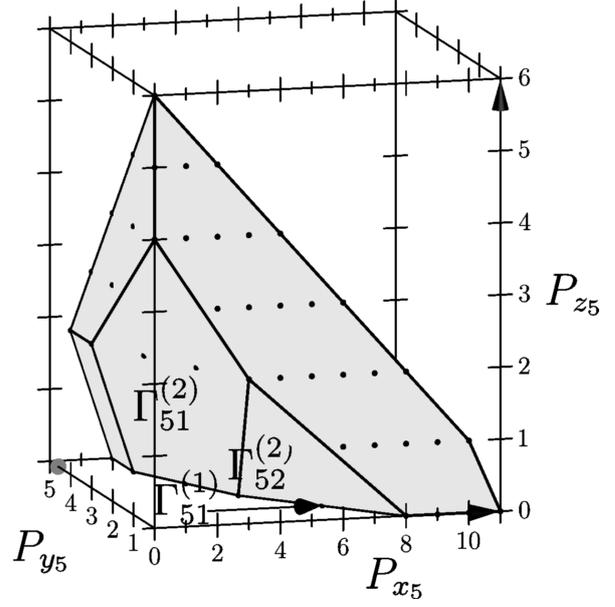


Рис. 12. Многогранник Ньютона для многочлена $g_5(\mathbf{Q}_5)$ после преобразования (2.46). Показаны грани $\Gamma_{51}^{(2)}$, $\Gamma_{52}^{(2)}$ и ребро $\Gamma_{51}^{(1)}$.

$\mu_1 + \mu_2 = s_1 - s_2 > 0$, $\lambda_1 = 2s_1 - s_3 > 0$. Таким вектором будет только нормаль N_{52} грани $\Gamma_{52}^{(2)}$ (см. рис. 12), а соответствующий ей укороченный многочлен есть

$$\hat{g}_{52}^{(2)} = 16x_5^3 (x_5(2y_5 + x_5^2) + 128z_5^2). \quad (2.48)$$

Укорочения, соответствующие ребрам грани $\Gamma_{52}^{(2)}$, суть

$$g_{51}^{(1)} = 16x_5^4(2y_5 + x_5^2)^2, \quad (2.49)$$

$$g_{52}^{(1)} = 16x_5^3(x_5^5 + 128z_5^2), \quad g_{53}^{(1)} = 16x_5^3(4x_5y_5^2 + 128z_5^2). \quad (2.50)$$

Многочлены (2.50) не рассматриваем по замечанию г) п. 1.3. Многочлены (2.49) и (2.48) имеют вещественные корни $y_5 = -x_5^2/2$, $z_5 = 0$. Выполняя заключительную замену переменных

$$x_5 = x_6, \quad y_5 = y_6 - x_6^2/2, \quad z_5 = z_6, \quad (2.51)$$

получаем многогранник Ньютона многочлена $g_6(\mathbf{Q}_6)$ в новых координатах \mathbf{Q}_6 , внешние нормали граней которого суть

$$\begin{aligned} N_{61} &= (0, -1, -1), & N_{62} &= (1, 1, 1), & N_{63} &= (0, -1, 0), & N_{64} &= (1, 2, 2), \\ N_{65} &= (-1, 0, 0), & N_{66} &= (0, 0, -1), & N_{67} &= -(2, 2, 3), & N_{68} &= (-1, 0, -1). \end{aligned}$$

Новый конус задачи есть

$$\mathbf{K}_6 = \{S = \mu_1 N_{52} + \mu_2 N_{57} + \lambda_1(0, -1, 0)\}. \quad (2.52)$$

где $\mu_{1,2} \geq 0$, $\mu_1 + \mu_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$. В конус задачи (2.52) попадает только нормаль N_{61} , т.е. многогранник имеет *дыру* (см. рис. 13) и по замечанию д) п. 1.3 разложение окончено. Укороченный многочлен $\hat{g}_{61}^{(2)}$, соответствующий грани $\Gamma_{61}^{(2)}$ с нормалью N_{61} есть

$$\hat{g}_{61}^{(2)} = 16x_6^3(x_6 + 2)^2(x_6(20z_6^2 - 4z_6y_6 + y_6^2) + 32z_6^2). \quad (2.53)$$

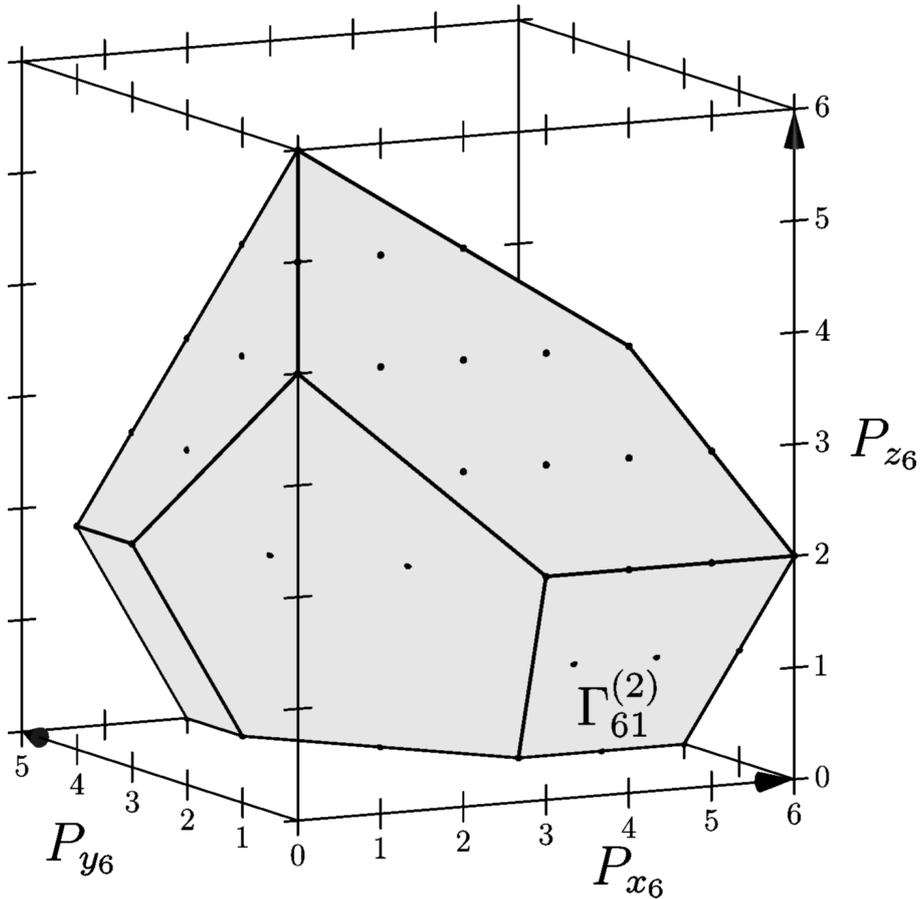


Рис. 13. Многогранник Ньютона многочлена $g_6(\mathbf{Q}_6)$ после преобразования (2.51).

Выполним степенное преобразование $y_6 = wz_6$, тогда последний множитель многочлена (2.53) после факторизации примет вид $x_6(w^2 - 4w + 20) + 32$, а его дискриминант относительно переменной w будет равен $-64x_6(x_6 + 2)$. Следовательно, уравнение $\hat{g}_{61}^{(2)} = 0$ имеет вещественные корни лишь при $-2 \leq x_6 \leq 0$. Собирая замены (2.34), (2.35), (2.37), (2.41), (2.46) и (2.51),

получаем параметрическое представление семейства \mathcal{P}_1 вблизи точки Q_0 :

$$x = -x_6^2/2, \quad y = -x_6^2/2 - 2x_6, \quad z = -x_6^2 - 3x_6, \quad (2.54)$$

которое перейдет в (2.3) при замене $x_6 = -2t$. Указанный выше интервал изменения параметра x_6 соответствует сегменту \mathcal{P}_1^0 , на котором происходит самопересечение поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$. Вне этого интервала существует лишь единственное разложение (2.54) вблизи точки Q_0 .

Для случая (2.40) замена переменных, определяемая условием $2x_3 - y_3 = 0$, приводит после выполнения аналогичных шагов к такой же параметризации семейства \mathcal{P}_1 вблизи точки Q_0 .

Отметим, что для парабол \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 во всех случаях получены конечные степенные разложения, и вопрос об асимптотичности этих разложений не стоит.

Покажем, что укороченный многочлен (2.36) дает в первом приближении разложение линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ в окрестности точки Q_0 . Для этого согласно случаю 4б) подраздела 1.3 выполним степенное преобразование

$$x_2 = \xi^{-1}\eta^{-2}\zeta^4, \quad y_2 = \xi^{-1}\eta^{-1}\zeta^2, \quad z_2 = \xi^{-1}\eta^{-1}\zeta^3, \quad (2.55)$$

задаваемое унимодулярной матрицей $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, которое после факторизации позволяет превратить многочлен (2.36) в многочлен от двух переменных

$$\hat{h}_{21}^{(2)}(\xi, \eta) = 1728\xi\eta^2 - 16\xi^2 + 288\xi\eta + 8\xi - 8\eta - 1, \quad (2.56)$$

нуль которого задает плоскую кривую, изображенную на рис. 14. Эта кривая является кривой рода 0 и допускает бирациональную параметризацию $\xi = \Xi(w)$, $\eta = \mathbb{H}(w)$, которая и определяет замену переменных

$$\xi = \xi_1 + \frac{(28w+3)(12w+1)}{64(9w+1)^2}, \quad \eta = \frac{(8w+1)^2}{16(9w+1)(12w+1)}, \quad \zeta = \zeta_1, \quad (2.57)$$

как указано в п. 1.3, шаг 4, случай б), для подслучая $\rho = 0$. Применяя замену переменных (2.57) к многочлену (2.56), получим рациональную функцию от двух переменных ξ_1 и w

$$\begin{aligned} \widehat{G}(\xi_1, w) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{h}_{21}^{(2)}(\xi_1 + \Xi(w), \mathbb{H}(w)) = & -\frac{\xi_1}{4(9w+1)^2(12w+1)^2} \left(746496w^4\xi_1 - \right. \\ & - 884736w^4 + 290304w^3\xi_1 - 387072w^3 + 42048w^2\xi_1 - \\ & \left. - 63360w^2 + 2688w\xi_1 - 4600w + 64\xi_1 - 125 \right). \quad (2.58) \end{aligned}$$

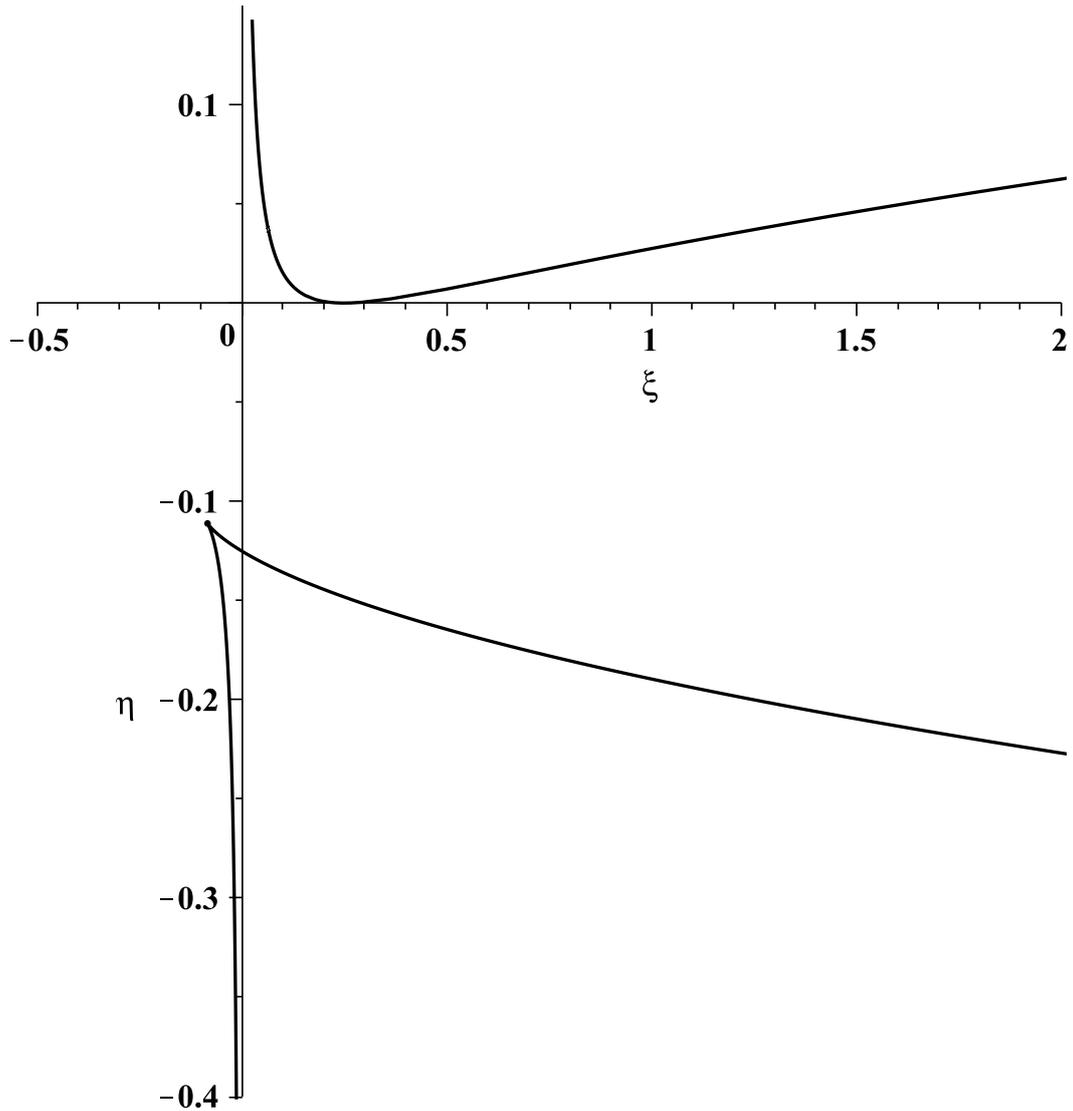


Рис. 14. Кривая $\hat{h}_{21}^{(2)}(\xi, \eta) = 0$, полученная с помощью степенного преобразования (2.55).

Последний множитель $f(w, \xi_1)$ в (2.58) определяет коэффициент a в теореме 1.1 гл. II [1]:

$$a = \left. \frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_1 = 0} = -\frac{f(0, w)}{4(9w + 1)^2(12w + 1)^2} = \frac{(8w + 1)(48w + 5)^3}{4(9w + 1)^2(12w + 1)^2}.$$

Для того, чтобы найти первый член разложения (1.15), выполним последовательно замены переменных (2.55) и (2.57) в полном многочлене $g_2(\mathbf{Q}_2)$, затем выделим в нем общий множитель, а оставшийся многочлен представим в виде многочлена от двух переменных ξ_1, ζ_1 с полиномиальными коэффициентами от w . Вычисляем для этого многочлена многоугольник Ньютона по ξ_1, η_1 и находим ребро с отрицательной внешней нормалью. Тогда начальный член в разложении (1.15) находится из решения укороченного многочлена, соответствующего выделенному ребру многоугольник Ньютона. В нашем случае

он равен

$$\alpha_1(w) = -\frac{(10w+1)(12w+1)}{2(8w+1)(9w+1)},$$

а тогда $\xi_1 = \alpha_1(w)\zeta_1 + o(\zeta_1)$. Собирая последовательно замены переменных (2.34), (2.35), (2.55) и (2.57), получим по два начальных члена разложения линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$ в точке Q_0 :

$$\begin{aligned} x &= 12\Omega(\xi_1, w)\zeta_1^3 + \Omega(\xi_1, w)\frac{32(9w+1)(12w+1)}{(8w+1)^2}\zeta_1^4, \\ y &= 2\Omega(\xi_1, w)\zeta_1^2, \\ z &= 3\Omega(\xi_1, w)\zeta_1^2 + 2\Omega(\xi_1, w)\zeta_1^3, \end{aligned}$$

где

$$\Omega = \frac{512(9w+1)^3(12w+1)}{(64\xi_1(9w+1)^2 + (28w+3)(12w+1))(8w+1)^2}.$$

Многочлен (2.56) имеет единственную особую точку с координатами $\xi = -1/12$, $\eta = -1/9$. Для исследования окрестности этой точки применим степенное преобразование (2.55) ко всему многочлену $g(\mathbf{Q})$, записанному в новых координатах \mathbf{Q}_2 . Сдвигаем особую точку в начало координат

$$\xi = \xi_1 - 1/12, \quad \eta = \eta_1 - 1/9, \quad \zeta = \zeta_1 \quad (2.59)$$

и получаем конус задачи $\mathbf{K}_7 = \{S < 0\}$. Многогранник Ньютона многочлена $g(\mathbf{Q})$, записанного в координатах ξ_1, η_1, ζ_1 имеет единственную нормаль $N_{71} = -(1,1,1)$, лежащую в конусе задачи \mathbf{K}_7 . Укороченный многочлен $\hat{g}_{71}^{(2)} = -4(2\xi_1 + 6\eta_1 + \zeta_1)^2/177417$ является полным квадратом, и согласно замечанию а) п. 1.3 выполняем замену

$$\xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2, \quad \zeta_1 = \zeta_2 - 2\xi_2 - 6\eta_2. \quad (2.60)$$

Новый конус задачи равен $\mathbf{K}_8 = \{S : 0 > s_1 = s_2 > s_3\}$. Только один нормальный вектор $N_{81} = -(2,2,3)$ попадает в конус задачи \mathbf{K}_8 . Получаем укороченный многочлен

$$\hat{g}_{81}^{(2)} = \frac{64}{1594323} (6\eta_2 + 5\xi_2)^3 - \frac{4}{177147} \zeta_2^2, \quad (2.61)$$

который определяет замену

$$\xi_2 = \xi_3 - 6\eta_3/5, \quad \eta_2 = \eta_3, \quad \zeta_2 = \zeta_3. \quad (2.62)$$

Получаем конус задачи \mathbf{K}_9 , лежащий целиком в ортанте $S < 0$. Из внешних нормалей к граням нового многогранника Ньютона только одна $N_{91} =$

$-(4,2,6)$ имеет все отрицательные координаты. Укорочение, соответствующее грани $\Gamma_{91}^{(2)}$ есть многочлен

$$\hat{g}_{91}^{(2)} = -\frac{1}{110716875} (50\zeta_3 + 2133\eta_3^2)^2 + \frac{8000}{1594323} \zeta_3^3. \quad (2.63)$$

Поэтому делаем преобразование

$$\xi_3 = \xi_4, \quad \eta_3 = \eta_4, \quad \zeta_3 = \zeta_4 - 2133\eta_4^2/50. \quad (2.64)$$

Новый конус задачи \mathbf{K}_{10} лежит в ортанте $S < 0$. Из внешних нормалей к граням нового многогранника Ньютона только одна $N_{10,1} = -(2,1,3)$ имеет все отрицательные координаты. Укорочение, соответствующее грани $\Gamma_{10,1}^{(2)}$, есть многочлен

$$\begin{aligned} \hat{g}_{10,1}^{(2)} = & \frac{356127269}{5062500} \eta_4^6 + \frac{4375046}{455625} \eta_4^4 \xi_4 - \frac{4322}{91125} \zeta_4 \eta_4^3 + \frac{191516}{492075} \eta_4^2 \xi_4^2 - \\ & - \frac{104}{98415} \zeta_4 \eta_4 \xi_4 + \frac{8000}{1594323} \xi_4^3 - \frac{4}{177147} \zeta_4^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Кратный корень этого многочлена ищем в виде

$$\xi_4 = u\eta_4^2, \quad \zeta_4 = v\eta_4^3, \quad (2.66)$$

тогда укороченный многочлен $\hat{g}_{10,1}^{(2)}$ после сокращения на η_4^6 приводится к виду

$$\begin{aligned} h(u, v) = & 500000000u^3 + 38781990000u^2 - 105300000uv - 2250000v^2 + \\ & + 956822560200u - 4726107000v + 7009653035727. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Кривая $h(u, v) = 0$ имеет только одну особую точку с координатами

$$u = -6669/250, \quad v = -1065069/2500. \quad (2.68)$$

Эта кривая изображена на рис. 15, из которой видно, что вблизи этой точки кривая $h(u, v) = 0$ является полукубической параболой. В соответствии с корнем (2.68) делаем замену координат $\xi_4 = \xi_5 - 6669\eta_5^2/250$, $\eta_4 = \eta_5$, $\zeta_4 = \zeta_5 - 1065069\eta_5^3/2500$. Многогранник Ньютона в новых координатах имеет ребро $\Gamma^{(1)}$ с вершинами $(3,0,0)$ и $(0,0,2)$ и содержит вершину $\Gamma_{11,1}^{(0)} = (0,8,0)$. Ребро $\Gamma^{(1)}$ имеется у граней предшествующих укорочений (2.61), (2.63) и (2.65), но в них переменная η входит в степенях 3, 4 и 6, соответственно. При продолжении вычисления кратного корня, указанное ребро $\Gamma^{(1)}$ сохранится, а вершина $\Gamma_{11,1}^{(0)}$ будет располагаться все дальше и дальше по второй оси. Таким образом, мы получаем стабилизацию (см. замечание ж) п. 1.3). Это означает, что имеется разложение для кривой особых точек.

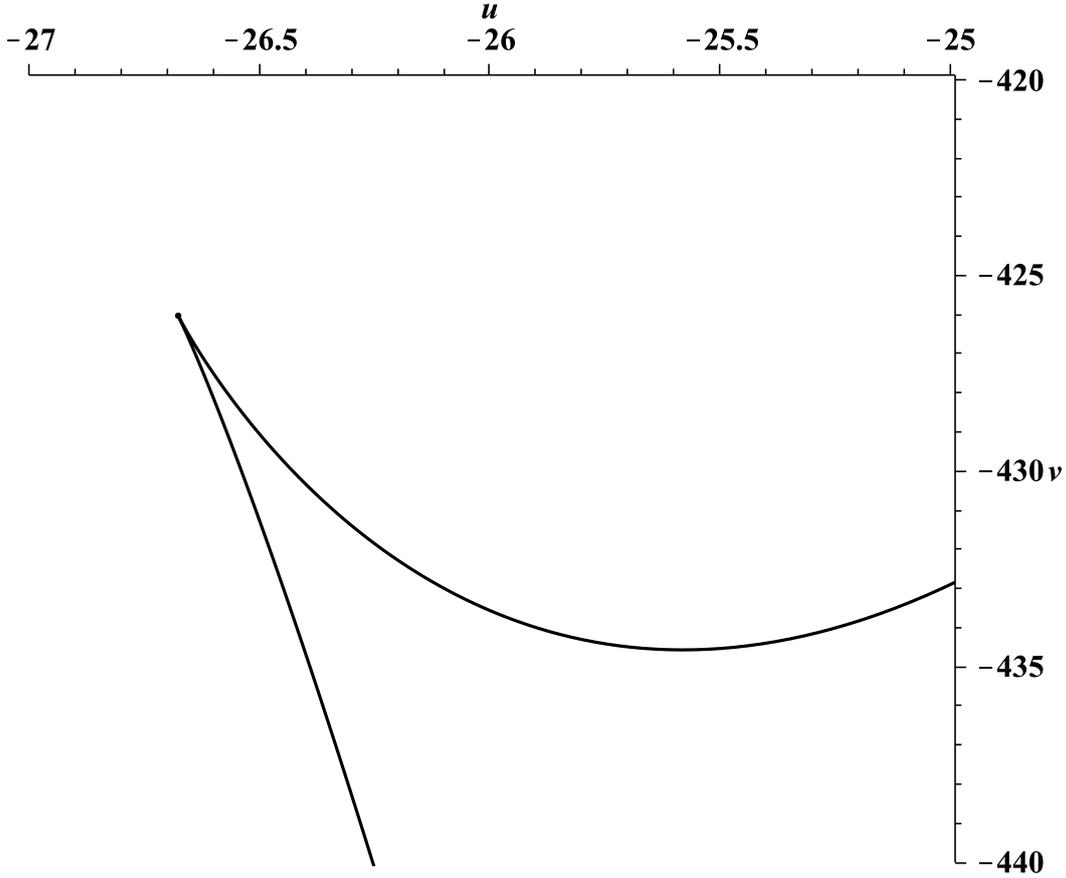


Рис. 15. Кривая $h(u, v) = 0$ (2.67).

Если прервать разложение на шаге, соответствующем корню (2.66), собрать все подстановки (2.34), (2.35), (2.55), (2.59), (2.60), (2.62), (2.64) и, наконец, в (2.66) подставить координаты особой точки (2.68), то получим рациональную аппроксимацию кривой \mathcal{F} в окрестности точки Q_0

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{59049}{78125000000} \frac{\eta_4^3 (118341\eta_4^2 - 2970\eta_4 + 1000)^3}{(40014\eta_4^2 + 1800\eta_4 + 125) (9\eta_4 - 1)^2} \times \\
 &\quad \times (3195207\eta_4^3 - 80190\eta_4^2 - 18000\eta_4 + 5000), \\
 y &= -\frac{2187}{12500} \frac{\eta_4^2 (118341\eta_4^2 - 2970\eta_4 + 1000)^2}{(40014\eta_4^2 + 1800\eta_4 + 125) (9\eta_4 - 1)}, \\
 z &= \frac{6561}{31250000} \frac{\eta_4^2 (118341\eta_4^2 - 2970\eta_4 + 1000)^2}{(40014\eta_4^2 + 1800\eta_4 + 125) (9\eta_4 - 1)} \times \\
 &\quad \times (355023\eta_4^3 - 8910\eta_4^2 + 3000\eta_4 - 1250).
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Несложно установить связь между аппроксимацией (2.69) и параметризацией (2.5) кривой \mathcal{F} в виде ряда

$$\varphi = a_1\eta_4 + a_2\eta_4^2 + a_3\eta_4^3 + \dots \tag{2.70}$$

Для этого выполним разложение в ряд Маклорена аппроксимации (2.69) по

η_4 и параметризации (2.5) по φ , соответственно. Затем подставим ряд (2.70) в разложение функций $x(\varphi)$, $y(\varphi)$, $z(\varphi)$ и, собирая коэффициенты при равных степенях параметра η_4 , получим три рекуррентные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i из ряда (2.70). Эти системы однозначно разрешимы, причем три первые коэффициента

$$a_1 = 54/5, \quad a_2 = -5589/250, \quad a_3 = 758889/500$$

совпадают для каждой из систем. Для разложения x коэффициент $a_4 = 3811986927/250000$, а для разложений y и z коэффициент $a_4 = 5360251707/250000$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что разность между аппроксимацией (2.69) и параметризацией (2.5) есть малая величина порядка $O(\eta_4^5)$.

Итак, с помощью степенной геометрии вблизи точки Q_0 для множества \mathcal{G} получены: прямая \mathcal{C}_1 , являющаяся образующей поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$, парабола \mathcal{P}_1 , приближенно поверхность $\tilde{\mathcal{G}}$ и кривая \mathcal{F} . По теореме 3 ничего другого в окрестности точки Q_0 нет. Следовательно, вблизи точки Q_0 множество \mathcal{G} имеет в качестве компонент только параболу \mathcal{P}_1 и поверхность $\tilde{\mathcal{G}}$. Итак, доказана

Теорема 4. *Вблизи каждой особой точки второго порядка (2.2) множество \mathcal{G} состоит из части параболы \mathcal{P}_1 или \mathcal{P}_2 и линейчатой поверхности $\tilde{\mathcal{G}}$.*

Литература

- [1] Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998. — 288 с.
- [2] Уокер Р. Алгебраические кривые. — пер. с англ., М.: ИЛ., 1952. — 236 с.
- [3] Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П. Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт № 4. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 30 с.
- [4] Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П. Вычисление множеств устойчивости в многопараметрических задачах. Препринт № 23. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 22 с.