ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 68 за 2011 г.

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.

Нелинейное поглощение альфвеновской волны в диссипативной плазме

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Нелинейное поглощение альфвеновской волны в диссипативной плазме // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 68. 28 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-68

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
Институт прикладной математики
имени М.В.Келдыша РАН

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Нелинейное поглощение альфвеновской волны в диссипативной плазме

Москва, 2011

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Нелинейное поглощение альфвеновской волны в диссипативной плазме

Аннотация

Предложен метод исследования поглощения альфвеновской волны, бегущей в однородной неизотермической плазме вдоль постоянного магнитного поля, и релаксации температур электронов и ионов в волне. Поглощение А-волны плазмой обусловлено диссипативными эффектами – магнитной и гидродинамическими вязкостями электронов и ионов и их упругим взаимодействием. Метод основан на точном решении уравнений двухжидкостной электромагнитной гидродинамики плазмы, которые на А-волне, как показано в работе, редуцируются к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Работа поддержана РФФИ, грант № 09-01-00181

M.B. Gavrikov, A.A. Tayurskiy

The nonlinear absorption of Alfven wave in dissipative plasma

Abstract

We propose a method for studying absorption of Alfven waves traveling in a homogeneous nonisothermal plasma along a constant magnetic field, and relaxation of electron and ion temperatures in the A-wave. The absorption of a A-wave by the plasma is arose due to dissipative effects - magnetic and hydrodynamic viscosities of electrons and ions and their elastic interaction. The method is based on the exact solution of two-fluid electromagnetic hydrodynamics of the plasma, which for A-wave, as shown in the work, are reduced to a nonlinear system of ordinary differential equations.

The work is supported by RFFI, grant № 09-01-00181

Хорошо известно явление затухания альфвеновских волн вследствие механизма бездиссипативного обмена энергией между заряженными частицами и электромагнитной волной (черенковское поглощение) [1]. В этой работе на примере альфвеновской волны рассмотрено преобразование различных видов энергии плазмы друг в друга, обусловленное диссипативными процессами, которые в итоге преобразуют энергию собственного электромагнитного поля и кинетическую энергию плазмы в тепловые виды энергии. С этой трансформацией тесно связан механизм релаксации температур электронов и ионов, который определяется прежде всего их теплопроводностью и упругим взаимодействием.

Перечисленные выше вопросы рассмотрены в работе на важном примере затухания плоских альфвеновских волн, бегущих в однородной плазме вдоль невозмущённого магнитного поля и являющихся точным решением уравнений плазмодинамики в отсутствии диссипаций. Это поперечные волны и их затухание определяется, в том числе, и длиной волны ℓ. Оказывается, затухание носит временной характер, при котором пространственная синусоидальная структура альфвеновской волны остаётся постоянной, а меняются во времени только амплитуды волн. При этом затухание не зависит от теплопроводностей электронов и ионов и их вторых гидродинамических вязкостей. Для (комплексных) амплитуд параметров плазмы в альфвеновской волне получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, исследование которой и приводит к важным результатам. Этот анализ аналогичен исследованию в линейном приближении устойчивости разностных схем и решений эволюционных уравнений в частных производных, но более сложен, поскольку система ОДУ на комплексные амплитуды, в отличие от указанных случаев, нелинейная.

Исследование показало, что в отсутствие диссипаций происходит периодическое во времени преобразование магнитной энергии альфвеновской волны в кинетическую и обратно, интенсивность и частота которого определяются длиной волны и начальными условиями. В частности, при определённых начальных условиях преобразование магнитной и кинетической энергий друг в друга не имеет место.

При учёте магнитной вязкости происходит быстрая трансформация магнитной и (почти полностью) кинетической энергий в тепловую энергию электронов и ионов, которая резко ускоряется при дополнительном учёте гидродинамических вязкостей электронов и ионов. Скорость преобразования нетепловых видов энергии в тепловые существенно возрастает при уменьшении длины волны, и при $\ell \sim \ell_c = c/\omega_p$ это преобразование происходит за время $\sim (\omega_{ci} \cdot \omega_{ce})^{-1/2}$ (ω_p – плазменная частота, ω_{ci}, ω_{ce} – циклотронные частоты электронов и ионов, ℓ_c – скиновая длина). На втором этапе происходит значительно более длительная, $\sim 10^4 (\omega_{ci} \cdot \omega_{ce})^{-1/2}$, релаксация температур электронов и ионов, при которой в тепловую энергию плазменных компонент переходят остатки кинетической энергии, а магнитная энергия не меняется и имеет фоновое значение.

Проведённый анализ основан на двухжидкостной гидродинамической модели плазмы [2] и на общепринятых формулах для коэффициентов переноса [3-8].

1. Исходные уравнения

Рассмотрим полностью ионизованную двухжидкостную нерелятивистскую плазму. В гидродинамическом приближении с учётом основных диссипаций её динамика подчиняется уравнениям [3]:

$$\frac{\partial \rho_\pm}{\partial t} + \mathrm{div}\rho_\pm \mathbf{v}_\pm = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho_\pm \frac{d\mathbf{v}_\pm}{d\mathrm{t}} = -\nabla p_\pm \pm e_\pm n_\pm (\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{H}]) + \mathrm{Div}\Pi_\pm - \mathbf{R}_\pm \tag{1.2}$$

$$\rho_\pm T_\pm \frac{dS_\pm}{d\mathrm{t}} = -\mathrm{div}\mathbf{q}_\pm + \mathrm{tr}(\Pi_\pm \mathrm{D}_\pm) \pm \frac{m_\mp}{m_\Sigma}\left\langle \mathbf{R}_\pm, \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_- \right\rangle + Q_\pm \tag{1.3}$$

$$T_\pm dS_\pm = d\varepsilon_\pm + p_\pm d\left(\frac{1}{\rho_\pm}\right) \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_\pm = \varepsilon_\pm(\rho_\pm, T_\pm), \quad p_\pm = p_\pm(\rho_\pm, T_\pm), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\pm \cdot \nabla \tag{1.5}$$

где $\rho_\pm = m_\pm n_\pm$, $m_\Sigma = m_+ + m_-$, а индексы $\pm$ относятся к параметрам электронов и ионов. Для диссипативных членов $\Pi_\pm$, $\mathbf{R}_\pm$, $\mathbf{q}_\pm$, $Q_\pm$ примем следующие часто используемые упрощённые выражения:

- $\mathrm{D}_\pm = \mathrm{def}\mathbf{v}_\pm = \left\| D^\pm_{\alpha\beta} \right\|, D^\pm_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}^\alpha_\pm}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \mathrm{v}^\beta_\pm}{\partial x_\alpha} \right)$ – тензор деформаций
- $\Pi_\pm = 2\mu_\pm \mathrm{D}_\pm + (\nu_\pm - \frac{2}{3}\mu_\pm)\mathrm{trD}_\pm \mathrm{I}_3$ – тензор вязких напряжений
- $\mathbf{R}_\pm = \pm \frac{e_+ e_- n_+ n_-}{\sigma}(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)$ – объёмная сила трения между компонентами
- $Q_\pm = \pm b(T_- - T_+)$ – тепло, передаваемое компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях
- $\mathbf{q}_\pm = -\chi_\pm \nabla T_\pm$ – закон Фурье для потока тепла в каждой плазменной компоненте.

Гидродинамические вязкости электронов и ионов $\mu_\pm$, $\nu_\pm$ являются функциями от T_+, T_-, проводимость плазмы σ и коэффициент теплообмена b суть функции от электронной температуры T_- (см. ниже). Изложенный ниже подход легко обобщается для более сложных выражений $\Pi_\pm$, $\mathbf{R}_\pm$, $\mathbf{q}_\pm$, $Q_\pm$, учитывающих термосилу и анизотропию замагниченной плазмы [3], а также при учёте в уравнениях (1.1) – (1.5) анизотропии давлений электронов и ионов [9].

Система (1.1) – (1.5) замыкается уравнениями Максвелла для квазистационарного магнитного поля:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = e_+ n_+ \mathbf{v}_+ - e_- n_- \mathbf{v}_- \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad e_+ n_+ - e_- n_- = 0 \tag{1.7}$$

и выражениями для коэффициентов переноса $\mu_\pm$, $\nu_\pm$, σ, b, $\chi_\pm$, из которых нам понадобятся только $\mu_\pm$, σ, b:

$$\mu_+ = 0.96 \cdot \frac{3m_i^{1/2} T_+^{5/2}}{4\pi^{1/2} e^4 Z^4 L}, \quad \mu_- = 0.733 \cdot \frac{3m_e^{1/2} T_-^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2} e^4 ZL} \tag{1.8}$$

$$\sigma = \frac{3T_-^{3/2}}{4(2\pi m_e)^{1/2} e^2 ZL \cdot 0.5129}, \quad b = \frac{5m_e^{1/2} e^4 Z^3 \rho^2 L}{m_i^3 k^{1/2} T_-^{3/2}} \tag{1.9}$$

где k – постоянная Больцмана, $m_i = m_+$, $m_e = m_-$, $e = e_-$ – заряд электрона, Z – кратность заряда иона ($e_+ = Ze$), L – кулоновский логарифм (ниже $L = 15$), $\rho = \rho_+ + \rho_-$, температуры $T_\pm$ измеряются в $^\circ K$. Формулы для $\mu_\pm$, σ взяты из [3, 4], для b – из [4]. Близкие, отличающиеся лишь несущественными коэффициентами формулы для $\mu_\pm$ содержатся в [5, 6], для b – в [7]. Формулы для $\nu_\pm$ выписаны в [3], для $\chi_\pm$ – в [2, 4], см. также [3]. Формулы для коэффициентов переноса имеют теоретический характер и время от времени корректируются. Так в [8] обосновано уменьшение электронной вязкости μ_- на два порядка. Ниже этот вопрос будет рассмотрен дополнительно.

2. Уравнения электромагнитной гидродинамики плазмы (ЭМГД)

На первый взгляд, в системе (1.1) – (1.7) отсутствует уравнение для электрического поля $\mathbf{E}$. Однако его нетрудно получить, если учесть зависимость некоторых неизвестных функций в (1.1) – (1.7), а именно – скорости $\mathbf{v}_+$, $\mathbf{v}_-$ связаны законом Ампера (1.6), а плотности ρ_+, ρ_- – условием квазинейтральности (1.7). Исключив зависимые неизвестные, придём к одножидкостной форме системы (1.1) – (1.7), которая содержит и уравнение для $\mathbf{E}$. В задачах плазмостатики удобно в качестве независимых переменных взять $\mathbf{v}_+$, ρ_+, в задачах электронной гидродинамики – $\mathbf{v}_-$, ρ_-. В общем случае в качестве независимых неизвестных возьмём массовую скорость и суммарную плотность плазмы:

$$\rho = \rho_+ + \rho_-, \quad \mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-)/\rho \tag{2.1}$$

Тогда $\mathbf{v}_\pm$, $\rho_\pm$ выражаются через ρ, $\mathbf{U}$ по простым формулам:

$$\mathbf{v}_\pm = \mathbf{U} \pm \frac{\lambda_\mp}{\rho}\mathbf{j}, \rho_\pm = \frac{\lambda_\pm}{\lambda_\Sigma}\rho, \lambda_\pm = \frac{m_\pm}{e_\pm}, \lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_- \tag{2.2}$$

Переходя в системе (1.1) – (1.7) к переменным ρ, $\mathbf{U}$, получим математически равносильную ей систему уравнений электромагнитной гидродинамики (ЭМГД):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{U} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \rho\mathbf{U}}{\partial t} + \mathrm{Div}\Pi = \mathrm{DivP} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho S_\pm}{\partial t} + \mathrm{div}\rho S_\pm\mathbf{U} \pm \lambda_\mp \mathrm{div}(S_\pm \mathbf{j}) = \\ = \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_\pm T_\pm}\{\mathrm{div}(\chi_\pm \nabla T_\pm) + \mathrm{tr}(\Pi_\pm \mathrm{D}_\pm) + \frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma} \pm b(T_- - T_+)\}\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{E} + \frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\mathrm{rotrot}\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\mathbf{U},\mathbf{H}] + \frac{1}{\rho}\mathrm{DivW} \tag{2.6}$$

где тензоры плотности потока импульса Π, вязких напряжений P и тензор “холловских слагаемых” W имеют вид:

$$\begin{gathered}\Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad \mathrm{P} = \Pi_*^c + \Pi^U \\ \mathrm{W} = (\lambda_- - \lambda_+)(\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ \mathrm{p}_-)\mathrm{I}_3 + \lambda_+\lambda_-(\mathbf{jU} + \mathbf{Uj}) - \Pi_*^U - \Pi^c \\ \Pi^h = \rho\mathbf{UU} + p_\Sigma \mathrm{I}_3, \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi}\mathrm{I}_3 - \frac{\mathbf{HH}}{4\pi}, \Pi^c = \lambda_+\lambda_-\frac{\mathbf{jj}}{\rho}\end{gathered} \tag{2.7}$$

Наконец, тензоры Π^c, Π_*^c, Π^U, Π_*^U вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered}\Pi^U = 2\mu_\Sigma \mathrm{D}^U + (\nu_\Sigma - \frac{2}{3}\mu_\Sigma)\mathrm{trD}^U\mathrm{I}_3, \Pi^c = 2\mu^*\mathrm{D}^c + (\nu^* - \frac{2}{3}\mu^*)\mathrm{trD}^c\mathrm{I}_3 \\ \Pi_*^U = 2\mu_*\mathrm{D}^U + (\nu_* - \frac{2}{3}\mu_*)\mathrm{trD}^U\mathrm{I}_3, \Pi_*^c = 2\mu_*\mathrm{D}^c + (\nu_* - \frac{2}{3}\mu_*)\mathrm{trD}^c\mathrm{I}_3\end{gathered} \tag{2.8}$$

где $\mathrm{D}^U = \mathrm{def}\mathbf{U}$, $\mathrm{D}^c = \mathrm{def}(\mathbf{j}/\rho)$ – тензоры деформаций, $p_\Sigma = p_+ + p_-$, $\mu_\Sigma = \mu_+ + \mu_-$, $\nu_\Sigma = \nu_+ + \nu_-$, $\mu_* = \lambda_-\mu_+ - \lambda_+\mu_-$, $\nu_* = \lambda_-\nu_+ - \lambda_+\nu_-$, $\mu^* = \lambda_-^2\mu_+ + \lambda_+^2\mu_-$, $\nu^* = \lambda_-^2\nu_+ + \lambda_+^2\nu_-$.

Итак, система (2.3) – (2.8), (1.4) – (1.7) математически равносильна системе (1.1) – (1.7). Она является одножидкостной и в то же время полностью симметричным образом учитывает инерции электронов и ионов. Уравнение на $\mathbf{E}$ – это обобщённый закон Ома (2.6). Уравнения (2.5) на плотности энтропии $S_\pm$ можно заменить уравнениями относительно $T_\pm$. Наиболее простые формулы получатся, если считать (что ниже предполагается) электроны и ионы идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ. Тогда пара уравнений (2.5) равносильна уравнениям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_\pm}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot T_\pm + T_\pm(\gamma - 1)\mathrm{div}\mathbf{U} \pm \lambda_\mp \rho^{\gamma-2}\mathbf{j}\cdot\nabla\left(\frac{T_\pm}{\rho^{\gamma-1}}\right) = \\ = \frac{\lambda e_\pm(\gamma-1)}{k\rho}\{\mathrm{div}(\chi_\pm\nabla \mathrm{T}_\pm) + \mathrm{tr}(\Pi_\pm \mathrm{D}_\pm) + \frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma} \pm b(T_- - T_+)\}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Наконец, в общем случае на решении ЭМГД-уравнений выполнен закон сохранения полной энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{U^2}{2}+\varepsilon+\frac{\lambda_+\lambda_- j^2}{2\rho^2}\right)+\frac{H^2}{8\pi}\right]+\operatorname{div}\left[\rho\mathbf{U}\left(\frac{U^2}{2}+\varepsilon+\frac{p_\Sigma}{\rho}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\lambda_+\lambda_- j^2}{2\rho^2}\right)+\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E},\mathbf{H}]+A\mathbf{j}\right]=\operatorname{div}\{\chi_+\nabla\mathrm{T}_+ +\chi_-\nabla\mathrm{T}_- +\Pi_+\mathbf{v}_+ +\Pi_-\mathbf{v}_-\} \qquad (2.10)$$

где $\varepsilon=(\lambda_+\varepsilon_+ +\lambda_-\varepsilon_-)/\lambda_\Sigma$ – объёмная плотность внутренней энергии плазмы,

$$A=\lambda_+\lambda_-\frac{\langle\mathbf{U},\mathbf{j}\rangle}{\rho}+\lambda_+\lambda_-\frac{(\lambda_- -\lambda_+)j^2}{2\rho^2}+\frac{\lambda_+\lambda_-}{\lambda_\Sigma}(\varepsilon_+-\varepsilon_-)+\frac{\lambda_- p_+ -\lambda_+ p_-}{\rho}$$

3. **Альфвеновские волны в ЭМГД**

Рассмотрим плоские ($\partial/\partial y=\partial/\partial z=0$) течения двухжидкостной однородной ($\rho=\mathrm{const}$) плазмы, когда электроны и ионы двигаются в плоскостях, ортогональных оси x и не двигаются вдоль самой оси ($U_x=0$). Для таких течений $H_x=\mathrm{const}$ и ЭМГД-система (2.3) – (2.8) с учётом уравнений (2.9) в компактной форме записывается с помощью комплексных обозначений $U_\perp=U_y+iU_z$, $H_\perp=H_y+iH_z$, $E_\perp=E_y+iE_z$, $j_\perp=j_y+ij_z$:

$$\frac{\partial U_\perp}{\partial t}=\frac{H_x}{4\pi\rho}\frac{\partial H_\perp}{\partial x}+\frac{ic}{4\pi\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_*}{\rho}\frac{\partial^2 H_\perp}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_\Sigma\frac{\partial U_\perp}{\partial x}\right) \qquad (3.1)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H_\perp}{\partial t}=-i\frac{\partial E_\perp}{\partial x} \qquad (3.2)$$

$$E_\perp-\left(\frac{c}{\omega_p}\right)^2\frac{\partial^2 E_\perp}{\partial x^2}=\frac{iH_x}{c}U_\perp+\left(\frac{ic}{4\pi\sigma}+\frac{\Lambda \mathrm{v}_A}{\omega_p}\right)\frac{\partial H_\perp}{\partial x}-$$
$$-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_*\frac{\partial U_\perp}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ic\mu^*}{4\pi\rho}\frac{\partial^2 H_\perp}{\partial x^2}\right)\right] \qquad (3.3)$$

$$\frac{\partial T_\pm}{\partial t}=\frac{\lambda e_\pm(\gamma-1)}{k\rho}\{\operatorname{div}(\chi_\pm\nabla\mathrm{T}_\pm)+\operatorname{tr}(\Pi_\pm\mathrm{D}_\pm)+\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{|j_\perp|^2}{\sigma}\pm b(T_- -T_+)\} \qquad (3.4)$$

где i - мнимая единица, $j_\perp=\frac{ic}{4\pi}\partial H_\perp/\partial x$, $j_x=0$, $\Pi_\pm=2\mu_\pm\mathrm{D}_\pm$, $\Lambda=\sqrt{\lambda_+/\lambda_-}-\sqrt{\lambda_-/\lambda_+}$, $\mathrm{v}_A=H_x/\sqrt{4\pi\rho}$ – альфвеновская скорость, $\omega_p=\sqrt{4\pi\rho/(\lambda_+\lambda_-)}$ – плазменная частота, $\sigma=RT_-^{3/2}$, $\mu_\pm=T_\pm^{5/2}/R_\pm$, $b=R_0/T_-^{3/2}$. Из формул (1.8), (1.9) следуют выражения для констант $R_\pm$, R, R_0:

$$R_+=\frac{4\pi^{1/2}e^4Z^4L}{0.96\cdot 3m_i^{1/2}k^{5/2}},\quad R_-=\frac{4(2\pi)^{1/2}e^4ZL}{0.733\cdot 3m_e^{1/2}k^{5/2}}$$
$$R=\frac{3k^{3/2}}{4(2\pi m_e)^{1/2}e^2ZL\cdot 0.5129},\quad R_0=\frac{5m_e^{1/2}e^4Z^3L\rho^2}{m_i^3k^{1/2}} \qquad (3.5)$$

Замкнутая система (3.1) – (3.4) дополняется уравнениями (x-компоненты уравнения импульсов (2.4) и обобщённого закона Ома (2.6)):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p_\Sigma + \frac{|H_\perp|^2}{8\pi}\right) = 0 \tag{3.6}$$

$$E_x = -\frac{1}{c}\mathrm{Im}(\bar{U}_\perp H_\perp) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) \tag{3.7}$$

Условие (3.6) является ограничением на решения системы (3.1) – (3.4), которое априори не обязано выполняться, а (3.7) позволяет проверить апостериори условие квазинейтральности $|\partial E_x/\partial x| \ll en$.

Как и в классической МГД, система (3.1) – (3.4) в бездиссипативном случае ($\mu_\pm = 0$, $b = 0$, $\chi_\pm = 0$, $\sigma = +\infty$) имеет точное решение – поперечную синусоидальную волну, называемую ниже альфвеновской:

$$U_\perp = u(t)e^{i\kappa x},\, H_\perp = h(t)e^{i\kappa x},\, E_\perp = e(t)e^{i\kappa x},\, T_\pm = \mathrm{const} \tag{3.8}$$

где комплексные функции $u(t)$, $h(t)$, $e(t)$ подчиняются системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается подстановкой (3.8) в (3.1) – (3.4):

$$\frac{du}{dt} = \frac{i\kappa H_x}{4\pi\rho}h, \quad \frac{1}{c}\frac{dh}{dt} = \kappa e$$

$$e\left(1 + \left(\frac{\kappa c}{\omega_p}\right)^2\right) = \frac{iH_x}{c}u + \frac{i\kappa\Lambda \mathrm{v}_A}{\omega_p}h$$

Исключая неизвестную $e(t)$, получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными и постоянными коэффициентами:

$$\frac{du}{dt} = \frac{i\kappa H_x}{4\pi\rho}h, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{iH_x\kappa}{1+r^2}u + \frac{ir}{1+r^2}\kappa\Lambda \mathrm{v}_A h, \quad r = \frac{\kappa c}{\omega_p}$$

Исключая из этой системы h, находим u:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{ir}{1+r^2}\kappa \mathrm{v}_A\Lambda\frac{du}{dt} + \frac{\kappa^2 \mathrm{v}_A^2}{1+r^2}u = 0$$

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C} \tag{3.9}$$

$$\omega_\pm = \frac{\kappa \mathrm{v}_A}{2}\left\{\frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2\Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2}\right]^{1/2}\right\}$$

Отсюда легко выписываются выражения для $h(t)$, $e(t)$:

$$\begin{gathered} h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa \mathrm{v}_A}\{C_1\omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2\omega_- e^{i\omega_- t}\} \\ e(t) = \frac{i}{1+r^2}\left\{\left(\frac{H_x}{c} + \Lambda\sqrt{\lambda_+\lambda_-}\,\omega_+\right)C_1 e^{i\omega_+ t} + \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda\sqrt{\lambda_+\lambda_-}\,\omega_-\right)C_2 e^{i\omega_- t}\right\} \end{gathered} \tag{3.10}$$

Подставляя (3.9), (3.10) в (3.8), заключаем, что поперечные колебания (3.8) являются суперпозицией синусоидальных бегущих вдоль магнитного поля

волн с фазовыми скоростями $-\omega_{\pm}(\kappa)/\kappa$, зависящими от длины волны $\ell = 2\pi/\kappa$. Из (3.9) следует, что волна, бегущая против магнитного поля, имеет большую по абсолютной величине фазовую скорость. В МГД (длинноволновом) пределе $r \ll 1$ имеем $\omega_{\pm}(\kappa) \sim \pm\kappa \mathrm{v}_A$ и полученное решение переходит в классическую альфвеновскую волну. В коротковолновом пределе $r \gg 1$ имеем $\omega_{\pm} \cong \pm\omega_c^{\mp}$ (где $\omega_c^{\pm} = H_x/(\lambda_{\pm}c)$ – циклотронные частоты) не зависят от κ и значит с уменьшением длины волны фазовые скорости альфвеновских бегущих волн стремятся к нулю с асимптотикой $\sim \mp\omega_c^{\mp}/\kappa$, $\kappa \to +\infty$.
На решении (3.8) условие (3.6) выполнено, т.к. $p_{\pm} = k\rho_{\pm}T_{\pm}/m_{\pm} = \mathrm{const}$, $|H_{\perp}|^2 = |h(t)|^2$ не зависят от x. А из (3.7) следует $E_x = E_x(t)$ и значит $\mathrm{div}\mathbf{E} = \partial E_x/\partial x \equiv 0$ и тем самым условие квазинейтральности выполнено точно.

4. **Преобразование энергии в альфвеновской волне**

Рассмотрим преобразование друг в друга различных видов энергии в плазме с объёмной плотностью:

- $\varepsilon_m = \dfrac{H^2}{8\pi}$ – энергия магнитного поля
- $\varepsilon_{kin}^{\pm} = \dfrac{\rho_{\pm}\mathrm{v}_{\pm}^2}{2}$ – кинетическая энергия электронов и ионов
- $\varepsilon_{\pm} = \dfrac{k\rho_{\pm}T_{\pm}}{m_{\pm}(\gamma-1)}$ – тепловая энергия электронов и ионов
- $\varepsilon_{kin} = \dfrac{\rho U^2}{2}$ – кинетическая энергия плазмы, движущейся как единое целое
- $\varepsilon_{el} = \dfrac{\lambda_+\lambda_- j^2}{2\rho} = \dfrac{1}{1 + Z\dfrac{m_-}{m_+}} \cdot \dfrac{\rho_-(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-)^2}{2}$ – кинетическая энергия относительного движения электронов

Заметим, что $\varepsilon_{kin}^{+} + \varepsilon_{kin}^{-} = \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el}$.

Закон сохранения полной энергии (2.10) определяет изменение во времени и пространстве полной энергии плазмы, определяемой объёмной плотностью

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_{kin}^{+} + \varepsilon_{kin}^{-} + \varepsilon_+ + \varepsilon_- = \varepsilon_m + \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el} + \varepsilon_+ + \varepsilon_-$$

Рассмотрим, как распределяется энергия по её видам в альфвеновской волне из §3. Для неё:

$$\varepsilon_{\pm} = \mathrm{const},\ \varepsilon_m = \frac{|h(t)|^2}{8\pi},\ \varepsilon_{kin} = \frac{\rho|u(t)|^2}{2},\ \varepsilon_{el} = \frac{r^2}{8\pi}|h(t)|^2$$

являются функциями только времени и из (2.10) следует

$$\varepsilon_m + \varepsilon_{kin} + \varepsilon_{el} = \text{const} \tag{4.1}$$

Значит, полная энергия плазмы в альфвеновской волне постоянна. Анализ распределения полной энергии по её видам показывает, что с течением времени происходит двусторонний обмен кинетической энергии плазмы с энергиями магнитного поля и кинетической энергией относительного движения электронов. Учитывая $\varepsilon_{el}/\varepsilon_{kin} = r^2$, достаточно проследить за изменением ε_m и ε_{kin}. Пусть в (3.9) $C_1 = R_1 e^{i\varphi}$, $C_2 = R_2 e^{i\psi}$, $|C_1| = R_1$, $|C_2| = R_2$. Тогда прямой подсчёт по формулам (3.9), (3.10) показывает:

$$\varepsilon_{kin} = \frac{\rho}{2}\{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos[(\omega_+ - \omega_-)t + \varphi - \psi]\} \tag{4.2}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\rho}{2}\left\{\frac{\omega_+^2 R_1^2 + \omega_-^2 R_2^2}{\kappa^2 \mathrm{v}_A^2} - \frac{2R_1R_2}{1+r^2}\cos[(\omega_+ - \omega_-)t + \varphi - \psi]\right\} \tag{4.3}$$

Из этих формул, с одной стороны, ещё раз вытекает соотношение (4.1). С другой, они показывают, что ε_{kin} и ε_m совершают в противофазе гармонические колебания с частотой $\omega_+ - \omega_- = \kappa \mathrm{v}_A \left[\frac{r^2\Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2}\right]^{1/2}$ и амплитудами $\rho R_1 R_2$, $\rho R_1 R_2/(1+r^2)$ соответственно вокруг значений $\rho(R_1^2 + R_2^2)/2$, $(\omega_+^2 R_1^2 + \omega_-^2 R_2^2)\rho/(2\kappa^2 \mathrm{v}_A^2)$. Относительные амплитуды равны:

$$\frac{2R_1R_2}{R_1^2 + R_2^2}, \qquad \frac{2R_1R_2\omega_+|\omega_-|}{R_1^2\omega_+^2 + R_2^2\omega_-^2} \tag{4.4}$$

и изменяются на отрезке [0,1]. Интенсивность обмена энергией определяется частотой $\omega_+ - \omega_-$, которая в длинноволновом МГД-пределе $r \ll 1$ равна $2\kappa \mathrm{v}_A = 2r\sqrt{\omega_c^+ \omega_c^-} \ll 2\sqrt{\omega_c^+ \omega_c^-}$. В коротковолновом пределе $r \gg 1$ имеем $\omega_+ - \omega_- \cong \omega_c^- + \omega_c^+ \cong \omega_c^-$ и значит частота обмена энергией фактически равна электронной циклотронной частоте. Таким образом, интенсивность обмена энергией ε_m и ε_{kin} для коротких альфвеновских волн, как минимум, на два порядка выше, чем для длинных. Из (4.4) следует, что при $R_1 = 0$ или $R_2 = 0$ (т.е. когда альфвеновская волна распространяется только в одном направлении) амплитуды обращаются в нуль и значит обмен энергией отсутствует: $\varepsilon_m = \text{const}$, $\varepsilon_{kin} = \text{const}$, $\varepsilon_{el} = \text{const}$. В длинноволновом пределе $r \ll 1$ относительные амплитуды совпадают и достигают максимума при $R_1 = R_2$. В общем случае амплитуда колебаний ε_{kin} максимальна при $R_1 = R_2$, а ε_m – при $R_1\omega_+ = R_2|\omega_-|$. При этом отношение амплитуд (4.4) меняется между $|\omega_-|/\omega_+$ и $\omega_+/|\omega_-|$.

В МГД-теории из закона сохранения (4.1) выпадает слагаемое ε_{el}, которое при конечном r сопоставимо с ε_m и существенно меняет баланс энергии, что не учитывается в МГД.

5. **Затухание альфвеновских волн**

Альфвеновская волна (3.8) может рассматриваться как решение задачи Коши для системы (3.1) – (3.4) с нулевыми диссипациями и начальными условиями специального вида:

$$U_{\perp}\big|_{t=0} = u_0 e^{i\kappa x},\, H_{\perp}\big|_{t=0} = h_0 e^{i\kappa x},\, E_{\perp}\big|_{t=0} = e_0 e^{i\kappa x},\, T_{\pm}\big|_{t=0} = T_{\pm}^0 = \text{const} \tag{5.1}$$

где $u_0, h_0 \in \mathbb{C}$, $T_{\pm} > 0$ произвольные, а $e_0 = i\left(\dfrac{H_x}{c}u_0 + \dfrac{\kappa \mathrm{v}_A}{\omega_p}\Lambda h_0\right)\Big/(1+r^2)$.

Считая доказанной теорему единственности решения задачи Коши для системы (3.1) – (3.4), в §3 было показано, что это решение имеет вид (3.8), где $u(t)$, $h(t)$, $e(t)$ вычисляются по (3.9), (3.10), $T_{\pm} \equiv T_{\pm}^0$, а константы C_1, C_2 вычисляются из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_2 = u_0 && C_1 = \left(\frac{\kappa \mathrm{v}_A}{\sqrt{4\pi\rho}}h_0 - \omega_- u_0\right)\Big/(\omega_+ - \omega_-)\\
&C_1\omega_+ + C_2\omega_- = \frac{\kappa \mathrm{v}_A}{\sqrt{4\pi\rho}}h_0 && C_2 = \left(\frac{\kappa \mathrm{v}_A}{\sqrt{4\pi\rho}}h_0 - \omega_+ u_0\right)\Big/(\omega_- - \omega_+)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Тогда затухание альфвеновских волн задаётся решением задачи Коши для системы (3.1) – (3.4) с конечными диссипациями и теми же начальными условиями (5.1). Это решение имеет вид:

$$U_{\perp} = u(t)e^{i\kappa x},\, H_{\perp} = h(t)e^{i\kappa x},\, E_{\perp} = e(t)e^{i\kappa x},\, T_{\pm} = T_{\pm}(t) \tag{5.3}$$

где комплексные функции $u(t)$, $h(t)$ и вещественные $T_{\pm}(t)$ удовлетворяют нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается подстановкой (5.3) в (3.1) – (3.4):

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt} = -\frac{\kappa^2\mu_\Sigma}{\rho}u + \left(\frac{i\kappa H_x}{4\pi\rho} + \frac{c\kappa^3\mu_*}{4\pi\rho^2}\right)h\\
&\frac{dh}{dt} = \frac{\kappa c}{1+(kc/\omega_p)^2}\left\{\left(\frac{iH_x}{c} + \frac{\kappa^2\mu_*}{\rho}\right)u + \left(-\frac{c\kappa}{4\pi\sigma} + \frac{i\kappa\Lambda \mathrm{v}_A}{\omega_p} - \frac{c\kappa^3\mu^*}{4\pi\rho^2}\right)h\right\}\\
&\frac{dT_+}{dt} = Za_*\left\{\mu_+\kappa^2\left[|u|^2 + \frac{c^2\kappa^2\lambda_-^2}{16\pi^2\rho^2}|h|^2 - \frac{c\kappa\lambda_-}{4\pi\rho}(\bar{u}h + u\bar{h})\right] + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{m_-}{m_\Sigma}\frac{c^2\kappa^2}{16\pi^2\sigma}|h|^2 + b(T_- - T_+)\right\}\\
&\frac{dT_-}{dt} = a_*\left\{\mu_-\kappa^2\left[|u|^2 + \frac{c^2\kappa^2\lambda_+^2}{16\pi^2\rho^2}|h|^2 + \frac{c\kappa\lambda_+}{4\pi\rho}(\bar{u}h + u\bar{h})\right] + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{m_+}{m_\Sigma}\frac{c^2\kappa^2}{16\pi^2\sigma}|h|^2 - b(T_- - T_+)\right\}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

с начальными условиями:

$$u(0)=u_0,\quad h(0)=h_0,\quad T_\pm(0)=T_\pm^0 \qquad (5.5)$$

функция $e(t)$ имеет явное выражение:

$$e(t)=\left\{\left(\frac{iH_x}{c}+\frac{\kappa^2\mu_*}{\rho}\right)u+\left(-\frac{c\kappa}{4\pi\sigma}+\frac{i\kappa\Lambda \mathrm{v}_A}{\omega_p}-\frac{c\kappa^3\mu^*}{4\pi\rho^2}\right)h\right\}\Bigg/\left[1+\left(\frac{\kappa c}{\omega_p}\right)^2\right] \qquad (5.6)$$

а величина $a_*=\lambda_\Sigma e(\gamma-1)/(k\rho)$. Сильная нелинейность системы (5.4) обусловлена в том числе, нелинейной зависимостью коэффициентов переноса b, σ, $\mu_\pm$, μ_*, μ^* от T_+, T_-:

$$\begin{gathered}\sigma=RT_-^{3/2}, b=R_0T_-^{-3/2}, \mu_\pm=T_\pm^{5/2}/R_\pm \\ \mu_*=(\lambda_-/R_+)T_+^{5/2}-(\lambda_+/R_-)T_-^{5/2}, \mu^*=(\lambda_-^2/R_+)T_+^{5/2}+(\lambda_+^2/R_-)T_-^{5/2}\end{gathered} \qquad (5.7)$$

где константы R, R_0, $R_\pm$ вычисляются по (3.5).

Таким образом, для исследования процесса затухания альфвеновских волн не надо решать систему уравнений в частных производных (3.1) – (3.4), а достаточно решить значительно более простую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (5.4). Отсюда следует, что затухание альфвеновских волн имеет чисто временной характер – изменяются только амплитуды $h(t)$, $u(t)$, $e(t)$, $T_\pm(t)$, а пространственное (синусоидальное для $U_\perp$, $H_\perp$, $E_\perp$ и константное для $T_\pm$) распределение параметров плазмы остаётся неизменным. Указанное упрощение обусловлено плоской симметрией альфвеновской волны, однородностью плазмы и пространственной однородностью температур электронов и ионов и, как следствие, вырождением эффектов теплопроводности и конвекции.

На решениях (5.3) условие (3.6) выполнено, поскольку $\left|H_\perp\right|^2=\left|h(t)\right|^2$ и $p_\Sigma=p_++p_-=\dfrac{k\rho_+}{m_+}T_+(t)+\dfrac{k\rho_-}{m_-}T_-(t)$ не зависят от x, а из (3.7) следует $E_x=-\dfrac{1}{c}\mathrm{Im}(\bar{u}h)=E_x(t)$ и значит условие квазинейтральности $\mathrm{div}\mathbf{E}=0$ выполнено точно.

На решении (5.3) закон сохранения (2.10) имеет вид:

$$\begin{gathered}\frac{\rho\left|u(t)\right|^2}{2}+(1+r^2)\frac{\left|h(t)\right|^2}{8\pi}+\frac{T_+(t)}{Za_*}+\frac{T_-(t)}{a_*}=C_0=\mathrm{const} \\ \varepsilon_{kin}=\frac{\rho\left|u(t)\right|^2}{2}, \varepsilon_m=\frac{\left|h(t)\right|^2}{8\pi}, \varepsilon_{el}=r^2\frac{\left|h(t)\right|^2}{8\pi}, \varepsilon_+=\frac{T_+(t)}{Za_*}, \varepsilon_-=\frac{T_-(t)}{a_*}, r=\frac{\kappa c}{\omega_p}\end{gathered} \qquad (5.8)$$

где константа C_0 определяется начальными условиями (5.5).

6. **Решение уравнений для амплитуд в незамагниченной плазме.**

Точнее, речь пойдёт о ещё более узком случае – помимо $H_x=0$ будем считать $\mu_\pm=0$, т.е. пренебрежём гидродинамическими вязкостями электронов и ионов. В бездиссипативном случае при $H_x = 0$ решение (3.8) даёт стационарную синусоидальную волну в однородной ($\rho = \mathrm{const}$, $T_\pm = \mathrm{const}$) плазме, и ниже исследуется затухание этой волны, вследствие омического сопротивления и обмена энергией между плазменными компонентами. Система (5.4) при $H_x = 0$, $\mu_\pm = 0$ даёт $u \equiv \mathrm{const}$, а h, $T_\pm$ ищутся из системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{dh}{dt} = -\frac{r^2\omega_p^2}{1+r^2}\cdot\frac{h}{4\pi\sigma} \\ &\frac{dT_+}{dt} = Za_*\left\{\frac{m_-}{m_\Sigma}\frac{r^2\omega_p^2}{16\pi^2\sigma}|h|^2 + b(T_- - T_+)\right\} \\ &\frac{dT_-}{dt} = a_*\left\{\frac{m_+}{m_\Sigma}\frac{r^2\omega_p^2}{16\pi^2\sigma}|h|^2 - b(T_- - T_+)\right\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $\sigma = RT_-^{3/2}$, $b = R_0 T_-^{-3/2}$, $r = \kappa c/\omega_p$, $a_* = \lambda_\Sigma e(\gamma - 1)/(k\rho)$. На решении (6.1) выполнен закон сохранения (5.8):

$$\frac{T_+}{Za_*} + \frac{T_-}{a_*} + (1+r^2)\frac{|h|^2}{8\pi} = C_0 \tag{6.2}$$

Без нарушения общности можно считать $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, в противном случае, делая замену неизвестных $(h_1, h_2) \to (h, \varphi)$: $h_1 = h\cos\varphi$, $h_2 = h\sin\varphi$. $h = h_1 + ih_2$, получим для h уравнение из (6.1), а $\varphi \equiv \mathrm{const}$. Это означает, что амплитуда магнитного поля $h(t)$ всё время коллинеарна вектору $h(0)$.

С помощью первого интеграла (6.2) понизим порядок системы (6.1), исключая из числа неизвестных T_+:

$$T_+ = C^0 - ZT_- - Za_*(1+r^2)\frac{h^2}{8\pi}, \quad C^0 = Za_*C_0 \tag{6.3}$$

Тогда получим следующую автономную систему на плоскости (h, T_-):

$$\begin{aligned} &\frac{dh}{dt} = -\frac{\alpha_0 h}{T_-^{3/2}} \\ &\frac{dT_-}{dt} = \alpha_1\frac{h^2}{T_-^{3/2}} + \frac{\beta_1}{T_-^{3/2}} - \frac{\gamma_1}{T_-^{1/2}} \end{aligned} \tag{6.4}$$

где константы α_0, β_1, $\gamma_1 > 0$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = \frac{r^2\omega_p^2}{4\pi R(1+r^2)}, \beta_1 = R_0 C^0 a_*, \gamma_1 = (1+Z)R_0 a_* \\ &\alpha_1 = a_*\left[\frac{m_+}{m_\Sigma}\frac{r^2\omega_p^2}{16\pi^2 R} - \frac{R_0 Za_*(1+r^2)}{8\pi}\right] \end{aligned} \tag{6.5}$$

Система (6.4) имеет одну особую точку

$$h^* = 0, \quad T_-^* = \frac{\beta_1}{\gamma_1} \tag{6.6}$$

в которой матрица Якоби системы (6.4) – диагональная:

$$\mathrm{diag}\left\{ -\frac{\alpha_0}{(T_-^*)^{3/2}}, -\frac{\gamma_1}{(T_-^*)^{3/2}} \right\} \tag{6.7}$$

Поскольку $\alpha_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, то собственные числа матрицы Якоби вещественные и отрицательные, поэтому особая точка (6.6) – притягивающий (устойчивый) узел и по теореме Гробмана-Хартмана [10] в некоторой окрестности особой точки топология интегральных кривых нелинейной системы (6.4) такая же как у её линеаризации в особой точке (6.6). В данном случае в справедливости теоремы Гробмана-Хартмана можно убедиться непосредственно, поскольку система (6.4) может быть следующим образом решена аналитически.

Поскольку $dh/dt < 0$, то h можно взять в качестве новой независимой переменной вместо времени t. Тогда для искомой функции $T_- = T(h)$ имеем на основании (6.4):

$$\frac{\alpha_1 h^2}{T^{3/2}} + \frac{\beta_1}{T^{3/2}} - \frac{\gamma_1}{T^{1/2}} = \frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dh}\cdot\frac{dh}{dT} = -\frac{\alpha_0 h}{T^{3/2}}\frac{dT}{dh}$$

Откуда получаем для нахождения $T(h)$ линейное уравнение:

$$\frac{dT}{dh} = \frac{\gamma_1}{\alpha_0}\frac{T}{h} - \frac{\alpha_1 h^2 + \beta_1}{\alpha_0 h}$$

решение которого имеет вид:

$$T(h) = Ch^{\gamma_1/\alpha_0} + \frac{\beta_1}{\gamma_1} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0 - \gamma_1}h^2, \quad \gamma_1 \neq 2\alpha_0 \tag{6.8}$$

$$T(h) = Ch^2 + \frac{\beta_1}{\gamma_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}h^2 \ln h, \quad \gamma_1 = 2\alpha_0 \tag{6.9}$$

где $C \in \mathbb{R}$ – произвольная константа. После чего зависимость $h(t)$ ищется из первого уравнения (6.4) квадратурой:

$$-\alpha_0 t = \int \frac{T(h)^{3/2}}{h} dh \tag{6.10}$$

где $T(h)$ вычисляется по (6.8) или (6.9). Поскольку интеграл в (6.10) расходится в нуле, то интегральные кривые входят в особую точку (6.6) за бесконечное время. Интегральные кривые на плоскости (h,T) легко построить на основании формул (6.8), (6.9). Их расположение зависит от соотношения между величинами α_1, α_0, γ.

Лемма 1. Пусть $\theta = \dfrac{2\pi R R_0 a_*}{\omega_p^2}$**, тогда следующие пары условий эквивалентны:** 1) $\alpha_1 > 0 \leftrightarrow \dfrac{r^2}{1+r^2} > \dfrac{m_\Sigma}{m_+} Z\theta$, 2) $\gamma_1 > 2\alpha_0 \leftrightarrow \dfrac{r^2}{1+r^2} < (1+Z)\theta.$ *

Если учесть $\frac{m_\Sigma}{m_+} Z\theta < (1+Z)\theta$, то из $\gamma_1 \le 2\alpha_0$ следует, на основании **Леммы 1**, $\alpha_1 > 0$ (а из $\alpha_1 \le 0$ следует $\gamma_1 > 2\alpha_0$). Кроме того, нужно учесть малость величины θ: $\theta \ll 1$. Действительно, из выражений (3.5) следует равенство $\theta = \frac{15(\gamma-1)}{8\sqrt{2\pi}0.5129} \cdot \frac{m_-}{m_+}(1+Z\frac{m_-}{m_+})$. Например, для дейтерия и $\gamma = 5/3$ имеем $\theta = 0.00027$. Таким образом, согласно Леммы 1, логически возможны и содержательны только следующие случаи:

$$1)\ \gamma_1 < \alpha_0, 2)\ \gamma_1 = \alpha_0, 3)\ \alpha_0 < \gamma_1 < 2\alpha_0, 4) \gamma_1 = 2\alpha_0$$

$$5)\ \alpha_1 > 0,\ \gamma_1 > 2\alpha_0, 6)\ \alpha_1 = 0, 7)\ \alpha_1 < 0$$

Для каждого из них ниже нарисована картина интегральных кривых. Пунктиром обозначена парабола, составленная из точек максимума или минимума функции $T(h)$: $T_*(h) = \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} h^2$. Жирная линия отвечает интегральной кривой для $C = 0$.

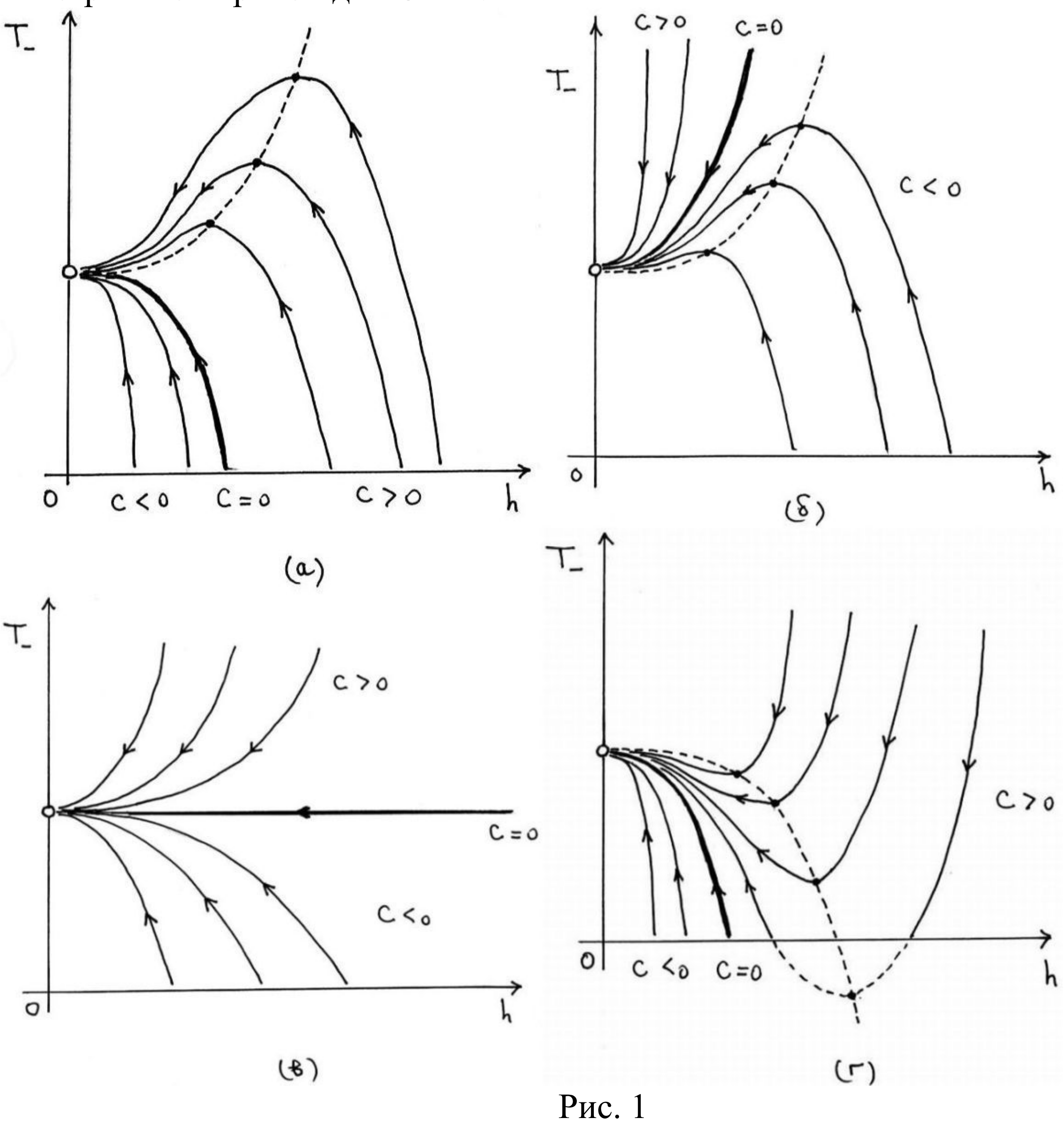

Рис. 1

Если заданы начальные условия $T_{\pm}^{0} > 0$, $h_0 > 0$, то решение задаётся интегральной кривой, начинающейся в точке (h_0, T_{-}^{0}) и входящей (за бесконечное время) в особую точку $(0, \beta_1/\gamma_1)$. Начальное данное (h_0, T_{-}^{0}) лежит внутри криволинейного треугольника, ограниченного осями $h = 0$, $T_{-} = 0$ и кривой $T_{гр}(h) = a_* C_0 - \frac{(1+r^2)a_*}{8\pi} h^2$, где константа C_0 вычисляется с помощью формулы (6.2) по начальным данным $T_{\pm}^{0}$, h_0. При этом особая точка лежит на левой стороне треугольника: $\beta_1 \Big/ \gamma_1 = \frac{Z}{1+Z} a_* C_0$.

Теорема 1. Интегральная кривая, начинающаяся в точке (h_0, T_{-}^{0}) криволинейного треугольника, всё время остаётся внутри него. (Физический смысл этого утверждения в положительности в каждый момент времени температуры ионов T_{+}, вычисленной по (6.3) и температуры электронов T_{-}).

Доказательство. Положительность температуры электронов T_{-} означает, что интегральная кривая, начинающаяся в точке (h_0, T_{-}^{0}), не пересекает ось h. Для случаев $1) \div 6)$ это очевидно, поскольку для них интегральные кривые $T(h)$ либо монотонные, либо имеют только один экстремум на $[0, h_0]$, являющийся максимумом $T(h)$ на этом отрезке. В случае 7) интегральная кривая, начинающаяся в верхней полуплоскости $T_{-} > 0$, может пересечь ось h, а затем снова вернуться в верхнюю полуплоскость. Однако, для этого необходимо, очевидно, чтобы $h_0 > h_*$, где h_* – пересечение параболы минимумов $T_*(h) = \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} h^2$ с осью h: $h_* = (-\beta_1/\alpha_1)^{1/2}$. Пусть h^* – пересечение криволинейной границы треугольника $T_{гр}(h)$ с осью h: $T_{гр}(h) = 0$, $h^* = (8\pi C_0 \big/ (1+r^2))^{1/2}$. Очевидно, $h_0 < h^*$. Поэтому, если установить неравенство $h^* < h_*$, то получим $h_0 < h^* < h_*$ и значит интегральная кривая, начинающаяся в точке (h_0, T_{-}^{0}), не пересекает ось h. Неравенство $h^* < h_*$, с учётом выражений (6.5), равносильно неравенству:

$$\frac{8\pi C_0}{1+r^2} < -\frac{\beta_1}{\alpha_1} = R_0 Z a_*^2 C_0 \Bigg/ \left[\frac{R_0 Z a_*^2 (1+r^2)}{8\pi} - \frac{m_+}{m_\Sigma} \frac{r^2 \omega_p^2}{16\pi^2 R} a_* \right]$$

Которое перепишем так:

$$1 < \frac{R_0 Z a_*^2 (1+r^2)}{8\pi} \Bigg/ \left[\frac{R_0 Z a_*^2 (1+r^2)}{8\pi} - \frac{m_+}{m_\Sigma} \frac{r^2 \omega_p^2}{16\pi^2 R} a_* \right]$$

Но последнее неравенство верно, т.к. знаменатель положителен (ибо $\alpha_1 < 0$).

Теперь докажем, что интегральная кривая не пересекает криволинейную границу треугольника $T_{гр}(h)$. Допустим, это не так. Пусть h^0 – наибольшее

$h \in [0, h_0]$, для которого $T(h) = T_{гр}(h)$. Значит, для $h^0 < h \le h_0$, имеем $T(h) < T_{гр}(h)$. Покажем, что

$$T'(h^0) > T'_{гр}(h^0) \tag{6.11}$$

Это приведёт к противоречию, поскольку для $h > h^0$ и достаточно близких к h^0 получим абсурдное соотношение:

$$0 < T_{гр}(h) - T(h) = T_{гр}(h^0) - T(h^0) + (T'_{гр}(h^0) - T'(h^0))(h - h^0) + o(h - h^0) =$$

$$= (T'_{гр}(h^0) - T'(h^0))(h - h^0) + o(h - h^0) < 0$$

Итак, установим (6.11). Имеем:

$$T'(h^0) = C\frac{\gamma_1}{\alpha_0}\left(h^0\right)^{\frac{\gamma_1}{\alpha_0}-1} - \frac{2\alpha_1}{2\alpha_0 - \gamma_1}h^0,\; T'_{гр}(h^0) = -\frac{2(1+r^2)a_*}{8\pi}h^0$$

$$T(h^0) = T_{гр}(h^0) : a_* C_0 - \frac{(1+r^2)a_*}{8\pi}\left(h^0\right)^2 = \frac{\beta_1}{\gamma_1} + C\left(h^0\right)^{\gamma_1/\alpha_0} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0 - \gamma_1}\left(h^0\right)^2$$

Из последнего равенства выразим $C\left(h^0\right)^{\gamma_1/\alpha_0}$ и подставим в доказываемое неравенство (6.11). В результате (6.11) сведётся к неравенству:

$$a_* C_0 > \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \left[\frac{(1+r^2)a_*}{8\pi} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0 - \gamma_1} + \frac{2\alpha_0\alpha_1}{\gamma_1(2\alpha_0 - \gamma_1)} - \frac{2(1+r^2)a_*}{8\pi}\frac{\alpha_0}{\gamma_1}\right]\left(h^0\right)^2$$

Квадратная скобка в последнем неравенстве, учитывая (6.5), равна:

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_1} + \frac{(1+r^2)a_*}{8\pi\gamma_1}(\gamma_1 - 2\alpha_0) = \frac{a_*}{\gamma_1}\cdot\frac{(1+r^2)\omega_p^2}{16\pi^2 R}\cdot\frac{m_-}{m_\Sigma}\left\{\frac{m_\Sigma}{m_-}\theta - \frac{r^2}{1+r^2}\right\}$$

Поэтому доказываемое неравенство сведётся к следующему:

$$a_* C_0 > \frac{Z}{1+Z}a_* C_0 + \frac{a_*}{(1+Z)R_0 a_*}\cdot\frac{(1+r^2)\omega_p^2}{16\pi^2 R}\frac{m_-}{m_\Sigma}\left\{\frac{m_\Sigma}{m_-}\theta - \frac{r^2}{1+r^2}\right\}\left(h^0\right)^2$$

После элементарных преобразований получим:

$$C_0 > \frac{1+r^2}{8\pi}\left[1 - \frac{r^2}{1+r^2}\frac{m_-}{m_\Sigma}\cdot\frac{1}{\theta}\right]\left(h^0\right)^2$$

Это верно, поскольку $T_{гр}(h^0) > 0$ и значит $C_0 > \frac{1+r^2}{8\pi}\left(h^0\right)^2$.

Теорема доказана.

Заметим, есть ещё одна интегральная кривая, входящая в особую точку вдоль оси T_-, не учитываемая формулами (6.8), (6.9), которая получается интеграцией системы (6.4), где надо положить $h \equiv 0$:

$$-\frac{\beta_1}{\gamma_1}T^{1/2} - \frac{T^{3/2}}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1}{\gamma_1}\right)^{3/2}\ln\left|\frac{\sqrt{\beta_1/\gamma_1} + T^{1/2}}{\sqrt{\beta_1/\gamma_1} - T^{1/2}}\right| = \frac{\gamma_1}{2}t + \text{const}$$

Интегральные кривые для случаев 1) – 4) отвечают коротким волнам, для случая 7) – длинным, а для случаев 5), 6) – средним. Для дейтерия, например, это даёт такие оценки: короткие $\ell < 269c/\omega_p$, длинные $\ell > 380c/\omega_p$, средние

$269 c/\omega_p \le \ell \le 380 c/\omega_p$, где $\ell = 2\pi/\kappa$ – длина волны. При затухании волны энергия магнитного поля полностью переходит в тепловую энергию электронов и ионов, при этом изменение самих тепловых энергий электронов и ионов может иметь немонотонный характер, это свидетельствует об обмене тепловой энергией между электронами и ионами. Например, для коротких и средних волн тепловая энергия электронов, в зависимости от начального условия, может сначала монотонно расти, а затем монотонно убывать до равновесного значения T_-^*, причём на этом этапе монотонного роста тепловая энергия ионов, как показывает несложный анализ, может, в свою очередь, то убывать, то возрастать. Для длинных волн тепловая энергия электронов всегда монотонно возрастает.

Качественное поведение интегральных кривых в случаях 1) – 4) изображено на Рис. 1. В случае 1) – 3) жирная кривая – всегда парабола, касающаяся пунктирной параболы $T_- = T_*(h)$ в точке $h = 0$, причём при $C < 0$ максимум интегральной кривой достигается в точке $h = 0$, а не на пунктирной параболе. В случае 1) интегральные кривые входят в особую точку под углом $\pi/2$ ($\equiv$ касаются параболы T_-), в случае 3) – под нулевым углом (касаются параболы $T_- = T_*(h)$), в случае 2) – под конечными углами, меняющимися от $-\pi/2$ до $\pi/2$. В случае 4) жирная кривая отличается от параболы и каждая интегральная кривая касается пунктирной параболы и имеет максимум, лежащий на этой параболе. В случае 5) интегральные кривые изображены на Рис. 1б): жирная парабола направлена вверх, при $C > 0$ минимумы интегральных кривых достигаются в точке $h = 0$, а при $C < 0$ максимумы интегральных кривых лежат на пунктирной параболе и все они касаются её в точке $h = 0$. Случаи 6) и 7) соответствуют Рис. 1в), г). В случае 7) жирная и пунктирная параболы касаются друг в друга и направлены вниз, а все интегральные кривые касаются пунктирной параболы в точке $h = 0$. Стрелкой указано направление роста t.

Из (6.5) и (6.7) следует, что затухание амплитуды магнитного поля не зависит от коэффициента теплообмена между компонентами и для длинных волн значительно слабее, чем для коротких, причём, как и следовало ожидать, затухание возрастает с уменьшением проводимости.

7. **Особые точки уравнений для амплитуд**

Обезразмерим систему уравнений (5.4) для амплитуд с целью её последующего численного исследования. Ниже рассматривается исключительно замагниченная плазма с напряжённостью магнитного поля $H_x \ne 0$ и плотностью $\rho > 0$. Выберем следующие характерные масштабы величин:

- $\rho_0 = \rho$ – плотность плазмы
- $H_0 = H_x$ – напряжённость магнитного поля

- $U_0 = \dfrac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} = \mathrm{v}_A$ – альфвеновская скорость
- $L_0 = \ell_c = \dfrac{c}{\omega_p} = \dfrac{c\sqrt{\lambda_+\lambda_-}}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$ – скиновая длина
- $t_0 = l_c/U_0 = (\omega_c^+\omega_c^-)^{-1/2}$ – характерное время
- $\varepsilon_0 = \dfrac{H_0^2}{8\pi}$ – плотность энергии
- $T_0 = \varepsilon_0 \dfrac{\lambda_\Sigma e}{\rho_0 k} = \mathrm{v}_A^2 \dfrac{\lambda_\Sigma e}{2k}$ – характерная температура в $^\circ K$

Тогда система (5.4) после обезразмеривания даёт:

$$\frac{du}{dt} = (ir + \alpha_1)h + \beta_1 u$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{r}{1+r^2}\left\{(i+\alpha_2)u + \left[r\left(-\frac{\zeta}{T_-^{3/2}} + i\Lambda\right) + \beta_2\right]h\right\}$$

$$\frac{dT_-}{dt} = 2(\gamma-1)\left\{\frac{m_+}{m_\Sigma}r^2\zeta\frac{|h|^2}{T_-^{3/2}} - \eta\frac{T_- - T_+}{T_-^{3/2}} + \alpha_3|u|^2 + \beta_3|h|^2 + \frac{r^3}{\mathrm{Re}_-}\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{1/2}(u\bar{h} + \bar{u}h)\right\} \quad (7.1)$$

$$\frac{dT_+}{dt} = 2Z(\gamma-1)\left\{\frac{m_-}{m_\Sigma}r^2\zeta\frac{|h|^2}{T_-^{3/2}} + \eta\frac{T_- - T_+}{T_-^{3/2}} + \alpha_4|u|^2 + \beta_4|h|^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{r^3}{\mathrm{Re}_+}\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{1/2}(u\bar{h} + \bar{u}h)\right\}$$

где безразмерные величины α_j, β_j, $1 \le j \le 4$ равны:

$$\alpha_1 = r^3\left[\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathrm{Re}_+} - \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathrm{Re}_-}\right], \alpha_2 = \alpha_1/r, \alpha_3 = r^2/\mathrm{Re}_-, \alpha_4 = r^2/\mathrm{Re}_+$$

$$\beta_1 = -r^2\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_+} + \frac{1}{\mathrm{Re}_-}\right), \beta_2 = -r^3\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_+}\frac{\lambda_-}{\lambda_+} + \frac{1}{\mathrm{Re}_-}\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right), \beta_3 = \frac{r^4}{\mathrm{Re}_-}\frac{\lambda_+}{\lambda_-}, \beta_4 = \frac{r^4}{\mathrm{Re}_+}\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \quad (7.2)$$

Как и выше, $r = \kappa c/\omega_p$. Кроме того, ζ, η – безразмерные числа подобия, $\mathrm{Re}_\pm = \ell_c\rho_0 U_0/\mu_\pm = R_\pm/T_\pm^{5/2}$ – магнитное число Рейнольдса, где величины ζ, η, $R_\pm$ равны:

$$\zeta = 0.386LZ^3\frac{ce^3}{m_+^2}\frac{(4\pi\rho_0)^{5/2}}{H_0^4}\left(1 + Z\frac{m_-}{m_+}\right)^{-3/2}, \eta = 1.46\zeta\frac{m_-}{m_+}\left(1 + Z\frac{m_-}{m_+}\right)$$

$$R_+ = 2.87\zeta\left(\frac{m_-}{m_+}\right)^{1/2}Z^3\left(1 + Z\frac{m_-}{m_+}\right)^{-1}, R_- = 5.317\zeta\left(1 + Z\frac{m_-}{m_+}\right)^{-1} \quad (7.3)$$

Из (7.3) следует, что $\zeta, \eta, R_{\pm} \sim \rho_0^{5/2} / H_0^4 = \rho^{5/2} / H_x^4$ и значит последняя комбинация является определяющей в задаче о затухании альфвеновских волн. Учитывая $Z \dfrac{m_-}{m_+} \ll 1$, приближённо, согласно (7.3), имеем $\zeta : \eta : R_+ : R_- = 1 : \dfrac{3}{2} \dfrac{m_-}{m_+} : 3Z^3 \left(\dfrac{m_-}{m_+} \right)^{1/2} : 5$. Например, для дейтериевой плазмы $m_+ = 2m_p$, $m_- = m_e$, $Z = 1$ имеем $m_+ / m_- = 3670$, $m_- / m_+ = 0.00027$, $\left(m_- / m_+ \right)^{1/2} = 0.0165$, $\eta = 0.0004\zeta$, $R_+ = 0.047\zeta$, $R_- = 5.317\zeta$.

Отметим значения ζ и скиновых длин для некоторых видов плазмы:

- z-пинч (дейтерий) [11]: $\rho_0 = 2.4 \cdot 10^{-7}\,\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$, $H_0 = 1.54 \cdot 10^4\,\text{гс}$, $\zeta = 0.482$, $\ell_c = 1.98 \cdot 10^{-3}\,\text{см}$
- перетяжка z-пинча и плазменного фокуса (дейтерий) [11]: $\rho_0 = 10^{-4}\,\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$, $H_0 = 2.8 \cdot 10^6\,\text{гс}$, $\zeta = 0.783 \cdot 10^{-3}$, $\ell_c = 1.097 \cdot 10^{-4}\,\text{см}$
- плазменный ускоритель (дейтерий) [12]: $\rho_0 = 1.67 \cdot 10^{-8}\,\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$, $H_0 = 1.5 \cdot 10^4\,\text{гс}$, $\zeta = 0.137 \cdot 10^{-2}$, $\ell_c = 0.752 \cdot 10^{-2}\,\text{см}$
- солнечный ветер (водород): $\rho_0 = 10^{-23}\,\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$, $H_0 = 10^{-4}\,\text{гс}$, $\zeta = 0.609 \cdot 10^{-6}$, $\ell_c = 0.217 \cdot 10^6\,\text{см}$

В безразмерном виде закон сохранения полной энергии имеет вид

$$\frac{T_+}{Z(\gamma - 1)} + \frac{T_-}{\gamma - 1} + |h|^2 (1 + r^2) + |u|^2 = C_0 = \text{const}$$
$$\varepsilon_+ = \frac{T_+}{Z(\gamma - 1)}, \varepsilon_- = \frac{T_-}{\gamma - 1}, \varepsilon_m = |h|^2, \varepsilon_{el} = r^2 |h|^2, \varepsilon_{kin} = |u|^2 \tag{7.4}$$

Таким образом, решения уравнений для амплитуд зависят только от двух безразмерных параметров r и ζ, принимающих положительные значения. Случай $r \gg 1$ соответствует коротким альфвеновским волнам, $r \ll 1$ – длинным, а $\zeta \ll 1$ – хорошо проводящей плазме.

Понизим порядок системы (7.1), исключив посредством закона сохранения (7.4) T_+ из числа неизвестных:

$$T_+ = Z(\gamma - 1)[C_0 - (1 + r^2)|h|^2 - |u|^2] - ZT, \quad T = T_- \tag{7.5}$$

Тогда в скалярном виде получим следующую систему, $h = h_1 + ih_2$, $u = u_1 + iu_2$:

$$\frac{dT}{dt} = 2(\gamma - 1)\left\{ \frac{m_+}{m_\Sigma} r^2 \zeta \frac{h_1^2 + h_2^2}{T^{3/2}} + \alpha_3 (u_1^2 + u_2^2) + \beta_3 (h_1^2 + h_2^2) + \frac{r^3}{\text{Re}_-} \left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right)^{1/2} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot 2(u_1 h_1 + u_2 h_2) - \frac{\eta}{T^{3/2}} [(1 + Z)T - Z(\gamma - 1)(C_0 - u_1^2 - u_2^2 - (1 + r^2)(h_1^2 + h_2^2))] \right\}$$

$$\frac{du_1}{dt}=\beta_1u_1+\alpha_1h_1-rh_2,\ \frac{du_2}{dt}=\beta_1u_2+\alpha_1h_2+rh_1$$
$$\frac{dh_1}{dt}=\frac{r}{1+r^2}\left[\alpha_2u_1-u_2+\left(\beta_2-\frac{\zeta r}{T^{3/2}}\right)h_1-\Lambda rh_2\right] \tag{7.6}$$
$$\frac{dh_2}{dt}=\frac{r}{1+r^2}\left[u_1+\alpha_2u_2+\Lambda rh_1+\left(\beta_2-\frac{\zeta r}{T^{3/2}}\right)h_2\right]$$

Лемма 2. Система (7.6) имеет в $\mathbb{R}^5=\{(T,u_1,u_2,h_1,h_2)\}$ **единственную особую точку** $(T^0,0,0,0,0)$**,** $T^0=\dfrac{Z}{1+Z}(\gamma-1)C_0$**, где** C_0 **– значение первого интеграла (7.4).**

Доказательство. Точка (T,u_1,u_2,h_1,h_2) – особая точка для автономной системы (7.6), если правые части этой системы обращаются в этой точке в нуль. Снова вернёмся к комплексным обозначениям. Тогда обращение в нуль правых частей уравнения для u_1, u_2, h_1, h_2 в комплексном виде запишется так:

$$(\alpha_1+ir)h+\beta_1u=0,\ (\beta_2-\frac{\zeta r}{T^{3/2}}+i\Lambda r)h+(\alpha_2+i)u=0$$

Определитель этой линейной однородной системы уравнений относительны h и u равен:

$$(\alpha_1+ir)(\alpha_2+i)-\beta_1(\beta_2-\frac{\zeta r}{T^{3/2}}+i\Lambda r)=r(\alpha_2+i)^2-\beta_1(\beta_2-\frac{\zeta r}{T^{3/2}}+i\Lambda r)=$$
$$=[r(\alpha_2^2-1)-\beta_1\beta_2+\beta_1\frac{\zeta r}{T^{3/2}}]+i[2+\alpha_2-\beta_1\Lambda r]$$

Но вещественная часть определителя отрицательная

$$r(\alpha_2^2-1)-\beta_1\beta_2+\beta_1\frac{\zeta r}{T^{3/2}}<r\alpha_2^2-\beta_1\beta_2=r^5\left[\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathrm{Re}_+}-\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathrm{Re}_-}\right]^2-$$
$$-r^5\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_+}+\frac{1}{\mathrm{Re}_-}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_+}\frac{\lambda_-}{\lambda_+}+\frac{1}{\mathrm{Re}_-}\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)=-\frac{r^5}{\mathrm{Re}_+\mathrm{Re}_-}\left(\sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}}+\sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\right)^2<0$$

и значит, он отличен от нуля. Поэтому в особой точке $u=u_1+iu_2=0$, $h=h_1+ih_2=0$. Но тогда, приравнивая к нулю правую часть первого уравнения (7.6), получим $T=T^0=\dfrac{Z}{1+Z}(\gamma-1)C_0$. Лемма доказана.

Для классификации особой точки вычислим матрицу Якоби правых частей в особой точке:

$$\mathrm{J}=\mathrm{diag}\left\{-\frac{2(\gamma-1)\eta(1+Z)}{(T^0)^{3/2}},\mathrm{J}^0\right\}$$

где J^0 – 2x2-блочная матрица с 2x2 блоками: $\mathrm{J}^0=\left\|\mathrm{J}^0_{js}\right\|$, $1\le j,s\le 2$

$$\mathrm{J}_{11}^0=\begin{pmatrix}\beta_1 & 0\\ 0 & \beta_1\end{pmatrix},\quad \mathrm{J}_{12}^0=\begin{pmatrix}\alpha_1 & -r\\ r & \alpha_1\end{pmatrix},\quad \mathrm{J}_{21}^0=\frac{r}{1+r^2}\begin{pmatrix}\alpha_2 & -1\\ 1 & \alpha_2\end{pmatrix},\quad \mathrm{J}_{22}^0=\frac{1}{1+r^2}\begin{pmatrix}\beta_0 & -\Lambda r^2\\ \Lambda r^2 & \beta_0\end{pmatrix},$$

где $\beta_0=r\left(\beta_2-\dfrac{\zeta r}{(T^0)^{3/2}}\right)$.

Найдём собственные числа J. Одно число, очевидно, равно $\lambda_0=-\dfrac{2(\gamma-1)\eta(1+Z)}{(T^0)^{3/2}}$. Остальные являются собственными числами матрицами J^0. Прямое вычисление характеристического многочлена даёт:

$$\det(\mathrm{J}^0-\lambda \mathrm{I}_4)=\frac{1}{(1+r^2)^2}\{[(\beta_1-\lambda)(\beta_0-\lambda(1+r^2))+r^2-\alpha_1^2]^2+[(\beta_1-\lambda)\Lambda r^2-2\alpha_1 r]^2\}$$

где I_4 – единичная матрица четвёртого порядка. Отсюда получаются два квадратных с комплексными коэффициентами уравнения для нахождения λ:

$$(\beta_1-\lambda)(\beta_0-\lambda(1+r^2))+r^2-\alpha_1^2\pm i[(\beta_1-\lambda)\Lambda r^2-2\alpha_1 r]=0$$

что даёт:

$$\lambda^2(1+r^2)-\lambda[\beta_0+\beta_1(1+r^2)\pm i\Lambda r^2]+\beta_1\beta_0+r^2-\alpha_1^2\pm i(\beta_1\Lambda r^2-2\alpha_1 r)=0 \quad (7.7)$$

В следующей теореме собраны технические результаты.

Теорема 2. 1) Каждое уравнений (7.7) не имеет вещественных, сопряжённых или кратных корней

2) Если $\lambda_1\neq\lambda_2$ – корни (7.7) для верхнего знака, то $\overline{\lambda_1}\neq\overline{\lambda_2}$ – корни (7.7) для нижнего знака

3) Все корни (7.7) имеют отрицательные вещественные части

4) Все собственные числа $\{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2}\}$ матрицы J однократные и есть базис $\mathbb{R}^5$, состоящий из собственных векторов J. *

Из **Теоремы 2. 3)** следует, что особая точка $(T^0,0,0,0,0)$ это притягивающий (устойчивый) многомерный узел и, по теореме Гробмана-Хартмана [10], в некоторой окрестности особой точки топология интегральных кривых нелинейной системы (7.6) и её линеаризации в рассматриваемой особой точке совпадают.

Ниже рассмотрена геометрия решений линеаризованной системы.

8. **Геометрия решений линеаризованной системы**

Рассмотрим линеаризованную систему

$$(\dot T,\dot u_1,\dot u_2,\dot h_1,\dot h_2)^t=\mathrm{J}(T,u_1,u_2,h_1,h_2)^t \quad (8.1)$$

где J – матрица Якоби системы (7.6) в особой точке. Пусть $\lambda_1\neq\lambda_2$ – корни характеристического уравнения (7.7) для верхнего знака. Если $x_j+iy_j\neq 0$ – собственный вектор J для значения λ_j, $j=1,2$, то, как известно, линейная оболочка $\mathrm{V}_j=[x_j,y_j]$ является двумерным инвариантом подпространства $\mathbb{R}^5$ для оператора J, причём, если $\lambda_j=a_j+ib_j$, $j=1,2$, то

$$\mathrm{J}x_j = a_j x_j - b_j y_j,\ \mathrm{J}y_j = a_j y_j + b_j x_j, \quad j = 1,2 \tag{8.2}$$

Если $x_0 = (1,0,0,0,0)$, то $\mathrm{V}_0 = [x_0]$ – собственное подпространство, отвечающее значению λ_0, а $\mathbb{R}^5$ распадается в прямую сумму $\mathbb{R}^5 = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$. В частности, $\{x_0, x_1, y_1, x_2, y_2\}$ – базис в $\mathbb{R}^5$ и из (8.2) следует, что матрица J в этом базисе равна:

$$\operatorname{diag}\left\{1, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\right\}$$

Поэтому, если $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ – координаты вектора из $\mathbb{R}^5$ в базисе $\{x_0, x_1, y_1, x_2, y_2\}$, то система (8.1) в этом базисе распадается на три независимые подсистемы:

$$\dot z_0 = \lambda_0 z_0, \quad \begin{matrix} \dot z_1 = a_1 z_1 + b_1 z_2 \\ \dot z_2 = -b_1 z_1 + a_1 z_2 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \dot z_3 = a_2 z_3 + b_2 z_4 \\ \dot z_4 = -b_2 z_3 + a_2 z_4 \end{matrix}$$

решение которых имеет вид:

$$\begin{gathered} z_0(t) = D_0 e^{\lambda_0 t},\ (z_1(t), z_2(t)) = D_1 e^{a_1 t}(\cos(\varphi_1 - b_1 t), \sin(\varphi_1 - b_1 t)) \\ (z_3(t), z_4(t)) = D_2 e^{a_2 t}(\cos(\varphi_2 - b_2 t), \sin(\varphi_2 - b_2 t)) \end{gathered} \tag{8.3}$$

где D_0, D_1, D_2, φ_1, φ_2 – произвольные вещественные константы. Согласно **Теореме 2**, λ_0, a_1, $a_2 < 0$. Поэтому из (8.3) следует, что проекция любого решения линеаризованной системы (8.1) на двумерную плоскость V_j, $j = 1,2$ есть спираль, наматывающаяся на точку 0 с угловой скоростью b_j и декрементом затухания $|a_j|$.

Нетрудно получить явные, хотя и громоздкие, формулы для a_j, b_j, $j = 1,2$ и для базисных векторов x_j, y_j, $j = 1,2$. Решая уравнение (7.7) для верхнего знака, получим:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = {} & \frac{\beta_0 + \beta_1(1+r^2) + i\Lambda r^2}{2(1+r^2)} \pm \\ & \pm \frac{\{[\beta_0 + \beta_1(1+r^2) + i\Lambda r^2]^2 - 4(1+r^2)[\beta_1\beta_0 + r^2 - \alpha_1^2 + i(\beta_1 \Lambda r^2 - 2\alpha_1 r)]\}^{1/2}}{2(1+r^2)} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Для извлечения корня из комплексного числа воспользуемся формулой

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left\{\left[\frac{(a^2+b^2)^{1/2} + a}{2}\right]^{1/2} + i \operatorname{sgn} b \left[\frac{(a^2+b^2)^{1/2} - a}{2}\right]^{1/2}\right\} \tag{8.5}$$

Подкоренное выражение в (8.4) равно $A + iB$, где

$$\begin{aligned} A &= [\beta_0 - \beta_1(1+r^2)]^2 - \Lambda^2 r^4 - 4(1+r^2)(r^2 - \alpha_1^2) \\ B &= 2[\Lambda r^2(\beta_0 + \beta_1(1+r^2)) - 2(1+r^2)(\beta_1 \Lambda r^2 - 2\alpha_1 r)] \end{aligned} \tag{8.6}$$

По формуле (8.5) получим:

$$a_{1,2} = \frac{1}{2(1+r^2)}\left\{\beta_0 + \beta_1(1+r^2) \pm \left[\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}\right]^{1/2}\right\}$$
$$b_{1,2} = \frac{1}{2(1+r^2)}\left\{\Lambda r^2 \pm \operatorname{sgn} B\left[\frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2}\right]^{1/2}\right\} \qquad (8.7)$$

Формулы (8.6), (8.7) позволяют в явном виде найти собственные числа $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j = 1,2$

Лемма 3. Положим для $j = 1,2$

$$x_j = \left(0, \frac{r(\beta_1 - a_j) - \alpha_1 b_j}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, -\frac{rb_j + \alpha_1(\beta_1 - a_j)}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, 0, 1\right)$$
$$y_j = \left(0, \frac{rb_j + \alpha_1(\beta_1 - a_j)}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, \frac{r(\beta_1 - a_j) - \alpha_1 b_j}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}, -1, 0\right)$$

Тогда $x_j + iy_j$ **– собственный вектор** J **для значения** $\lambda_j = a_j + ib_j$**,** $j = 1,2$**, причём** $x_j \perp y_j$ **и** $\|x_j\| = \|y_j\| = \left(1 + \frac{\alpha_1^2 + r^2}{(\beta_1 - a_j)^2 + b_j^2}\right)^{1/2}$**.** *

Заметим, что собственные числа λ_j и базисные векторы x_j, y_j, $j = 1,2$ зависят только от r, ζ и полной энергии C_0, через которое выражается равновесная температура $T^0 = \frac{Z}{1+Z}(\gamma - 1)C_0$.

9. **Обсуждение результатов**

Равновесная температура T^0, согласно полученным результатам, в размерном виде вычисляется по формуле:

$$T^0 = \frac{T_0^+ + ZT_0^-}{1+Z} + \frac{Z}{1+Z}\cdot\frac{\lambda_\Sigma e(\gamma-1)}{k}\left\{\frac{|u_0|^2}{2} + \frac{|h_0|^2}{8\pi\rho}\left[1 + \left(\frac{\kappa c}{\omega_p}\right)^2\right]\right\} \qquad (9.1)$$

и не зависит от замагниченности плазмы H_x и коэффициентов переноса, но зависит от плотности и длины волны $\ell = 2\pi/\kappa$. В МГД-теории $\kappa c/\omega_p \ll 1$, в формуле (9.1) член $(\kappa c/\omega_p)^2$ выпадает и зависимость от длины волны исчезает.

При $r \ll 1$ декременты затухания a_j и частоты b_j имеют асимптотики

$$a \approx -\left(\frac{Z(\gamma-1)}{1+Z}\right)^{5/2} |h_0|^5 r^7 \cdot \frac{\lambda_\Sigma}{\lambda_\pm} \cdot \frac{1}{R_\pm}$$
$$b \approx \frac{1}{2}\left\{\Lambda \pm \frac{\Lambda R^* - \Lambda R_\Sigma - 4R_*}{\lambda_\Sigma(\lambda_+^{-1}R_+^{-1} - \lambda_-^{-1}R_-^{-1})}\right\} \qquad (9.2)$$

где $R^* = (\lambda_-/\lambda_+)R_+^{-1} + (\lambda_+/\lambda_-)R_-^{-1}, R_\Sigma = R_+^{-1} + R_-^{-1}, R_* = (\lambda_-/\lambda_+)^{1/2} R_+^{-1} - (\lambda_+/\lambda_-)^{-1} R_-^{-1}$, причём верхние и нижние знаки в (9.2) соответствуют друг другу. При $r \ll 1$ (длинноволновое приближение) имеем:

$$a \approx -\frac{r^2}{2A_0^{3/2}}[\zeta + R_\Sigma A_0^4],\ A_0 = \frac{Z(\gamma-1)}{Z+1}\left[\frac{T_0^+}{Z(\gamma-1)} + \frac{T_0^-}{\gamma-1} + |h_0|^2 + |u_0|^2\right] \qquad (9.3)$$
$$b \approx \pm r$$

Из (9.2) следует огромный рост, $\sim r^7$, декрементов затухания для коротких волн, что означает чрезвычайно быстрое затухание альфвеновских волн с длиной, меньшей скиновой c/ω_p. Это затухание компенсируется уменьшением начальной амплитуды $|h_0|$ магнитного поля в альфвеновской волне либо эффективным уменьшением гидродинамических вязкостей электронов и ионов. Длинноволновое приближение (9.3) совпадает с аналогичными результатами из МГД-теории (см. ниже) и вычислениями на основе линейной теории.

В МГД система уравнений для амплитуд запишется в виде:

$$\frac{du}{dt} = irh + \beta_1 u, \quad \frac{dh}{dt} = r\left[iu - \frac{r\zeta}{T_-^{3/2}}h\right] \qquad (9.4)$$
$$\frac{dT_-}{dt} = 2(\gamma-1)\left\{\frac{m_+}{m_\Sigma} r^2 \zeta \frac{|h|^2}{T_-^{3/2}} - \eta\frac{T_- - T_+}{T_-^{3/2}} + \alpha_3 |u|^2\right\}, T_+ = Z(\gamma-1)\left\{C_0 - \frac{T_-}{\gamma-1} - |h|^2 - |u|^2\right\}$$

где β_1, α_3 вычисляются по (7.2).

Система (9.4) имеет единственную особую точку, вычисляемую по формуле из §7, а характеристическое уравнение для линеаризованной в особой точке системы имеет вид:

$$(\lambda + \lambda_0)\left[r^2 + (\lambda - \beta_1)(\lambda + \frac{r^2\zeta}{(T^0)^{3/2}})\right]^2 = 0, \quad \lambda_0 = \frac{2(\gamma-1)\eta(Z+1)}{(T^0)^{3/2}}$$

Значит собственные числа имеют вид: $\lambda = -\lambda_0$ и двукратные

$$\lambda^\pm = -\frac{r^2}{2}\left\{(T^0)^{5/2}R_\Sigma + \frac{\zeta}{(T^0)^{3/2}} \pm \left\{\left[(T^0)^{5/2}R_\Sigma - \frac{\zeta}{(T^0)^{3/2}}\right]^2 - \frac{4}{r^2}\right\}^{1/2}\right\} \qquad (9.5)$$

При $r < r_* = 2\left|(T^0)^{5/2}(R_+^{-1} + R_-^{-1}) - \zeta(T^0)^{-3/2}\right|^{-1}$ у собственных чисел $\lambda^\pm$ есть мнимая часть, при $r > r_*$ – собственные числа вещественные и различные.

При $r \ll 1$ формула (9.5) переходит в (9.3). Декременты затухания и частоты изображены на графике

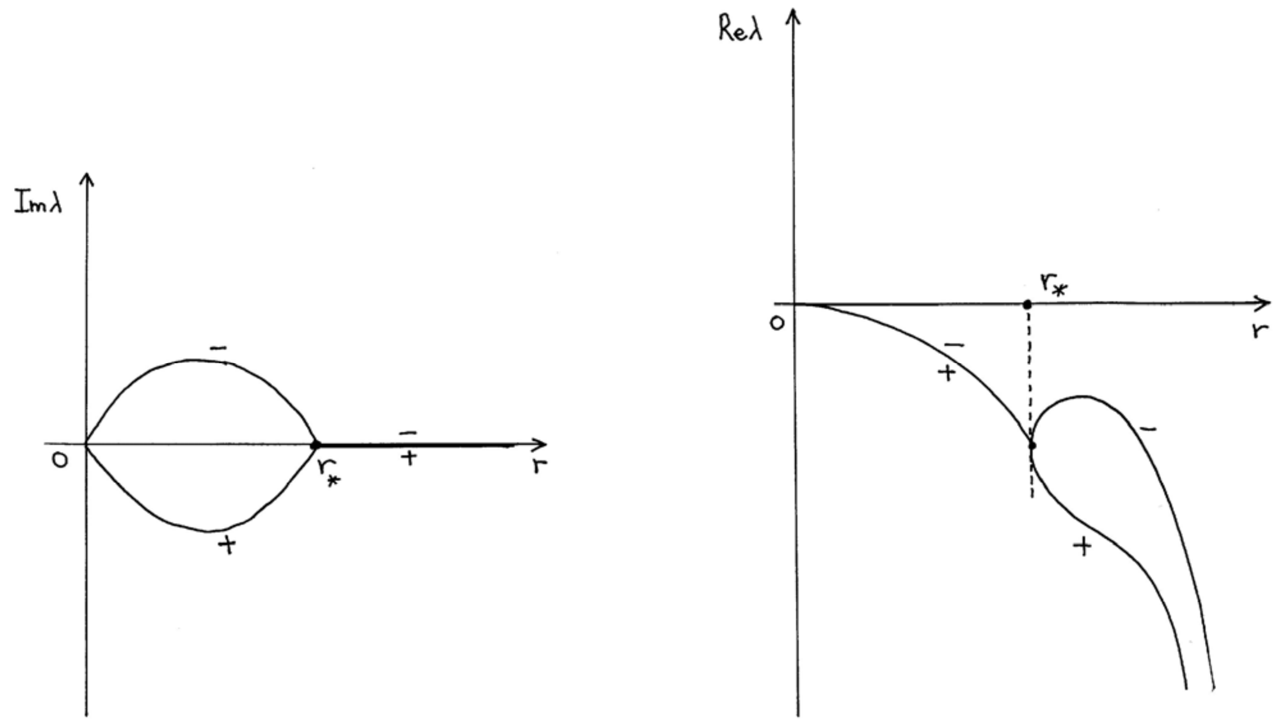

Рис. 2

Как видно, для конечных r результаты МГД-теории и двухжидкостной плазмодинамики сильно разнятся. Например, декременты затухания для коротких волн $r \gg 1$ в МГД-теории $\sim r^2$, что расходится с формулой (9.2).

Принято считать, что гидродинамические вязкости электронов и ионов, вследствие их малости, приводят лишь к незначительному размыванию, сглаживанию параметров плазмы, которое в ряде ситуаций, например при наличии ударных волн, даже полезно. Ошибочность такого взгляда продемонстрируем на решении задачи о затухании альфвеновских волн без учёта гидродинамических вязкостей электронов и ионов. Тогда в характеристическом уравнении (7.7) надо положить $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_0 = -\zeta r^2 (T^0)^{-3/2}$, и мы получим:

$$\lambda^2(1+r^2) + \lambda[\zeta(T^0)^{-3/2} \pm i\Lambda]r^2 + r^2 = 0$$

Откуда для верхнего знака:

$$\lambda = \frac{1}{2(1+r^2)}\left\{-r^2[\zeta(T^0)^{-3/2} + i\Lambda] \pm r[(\zeta(T^0)^{-3/2} + i\Lambda)^2 r^2 - 4(1+r^2)]^{1/2}\right\}$$

Тогда в коротковолновом, $r \gg 1$ приближении получим для декрементов затухания и частот:

$$a \sim -\left(\frac{Z(\gamma-1)}{1+Z}\right)^{-3/2} |h_0|^{-3} r^3, \quad b \sim \pm(\lambda_{\mp}/\lambda_{\pm})^{1/2} \qquad (9.6)$$

В длинноволновом приближении получим старые волны (9.3), где надо положить $R_\Sigma = 0$. Из сравнения (9.6) и (9.2) следует, что затухание коротких волн без учёта гидродинамических вязкостей электронов и ионов кардинально изменилось: во-первых, оно происходит значительно медленнее, $\sim r^3$ и, во-вторых, при уменьшении начальной амплитуды магнитного поля в альфвеновской волне оно увеличивается, а не уменьшается, как это было с учётом гидродинамических вязкостей.

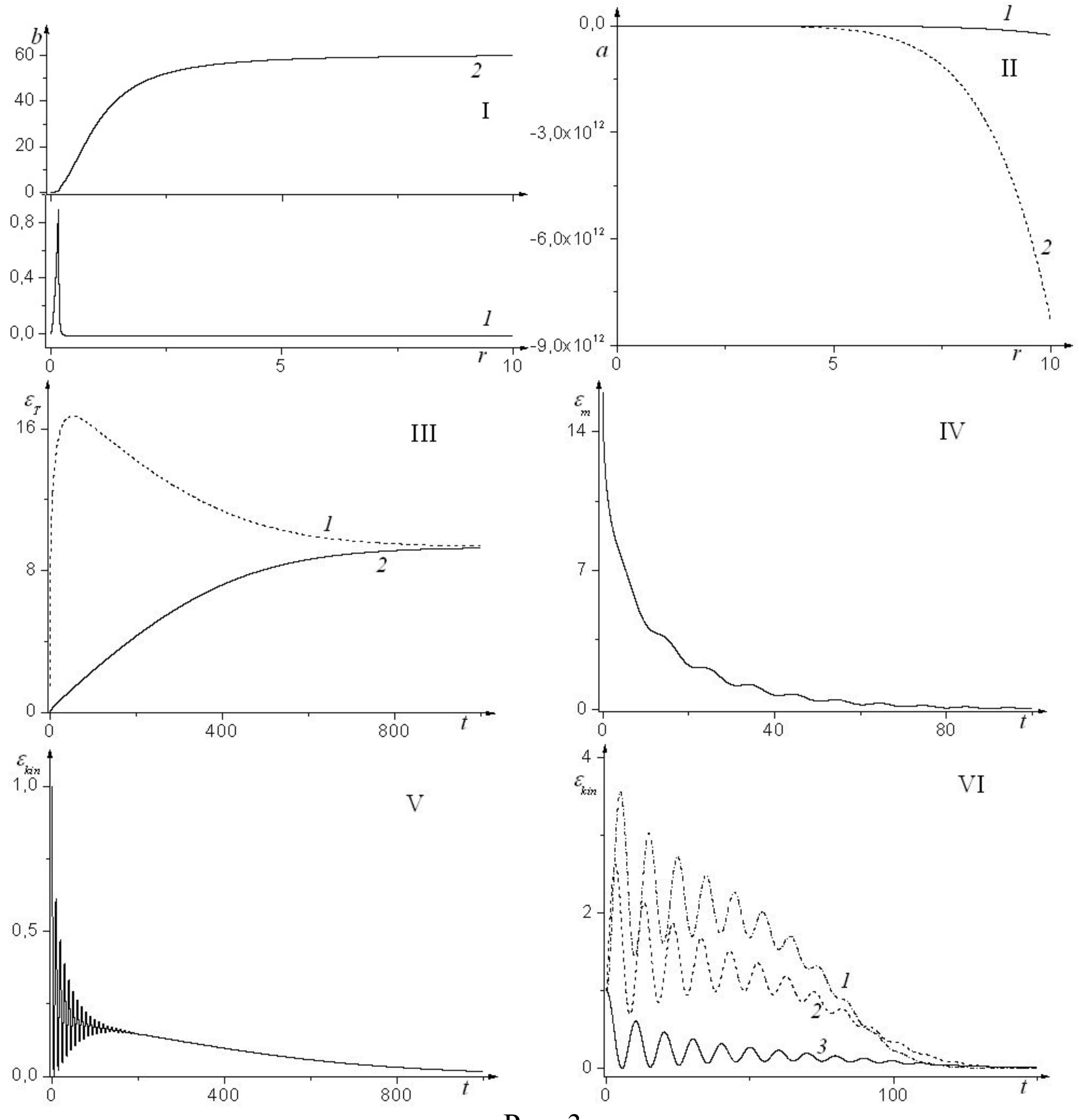

Рис. 3

В общем случае графики зависимости декрементов затухания a_j и частот b_j от r изображены на Рис. 3 I, II(для $\zeta = 1/10$, $T_+^0 = T_-^0 = 1$, $h_0 = 4$, $u_0 = 1$). Декременты затухания по модулю монотонно растут, а частоты b_j имеют разные знаки и порядки. При малых ζ профили частот имеют локальные экстремумы, с увеличением ζ они исчезают и профили частот тоже становятся монотонными. На Рис. 3 III-V приведены зависимости от времени тепловых энергий $\varepsilon_+ - 2$, $\varepsilon_- - 1$ ионов и электронов, магнитной ε_m и кинетической ε_{kin} энергии для варианта $\zeta = 100$, $T_+ = 0.01$, $T_- = 1$, $h_0 = 4$, $u_0 = 1$. На Рис. 3 VI показана зависимость эволюции кинетической энергии $\varepsilon_{kin}(t)$ от сдвига фаз в начальных распределениях магнитного поля и скорости (3 – сдвиг фаз u_0 и h_0 равен 0, 2 – $\pi/2$, 3 – π).

Литература

1. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 719 с.
2. Гавриков М.Б. Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Часть I. Препринт №59. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. 28 с.
3. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183-272
4. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965. 212с.
5. Чэпмен С. Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960
6. Имшенник В.С. // Астрономический журнал. 1961. **38**. С. 652
7. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1937. **7**. С. 203
8. Боброва Н.А., Сасоров П.В. // Физика плазмы. 1993. Т. 19. С. 789
9. Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф. / В сб. Проблемы современной физики. М.: ИЛ, 1957. №7. С. 139
10. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. Имшенник В.С., Боброва Н.А. Динамика столкновительной плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1997. 319 с.
12. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчёт двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 88-163