Келлин Н.С.

Газокинетический оператор и его полугруппа в пространствах Лебега

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

Н.С. Келлин

Газокинетический оператор и его полугруппа в пространствах Лебега

Москва - 2011

Н.С. Келлин. Газокинетический оператор и его полугруппа в пространствах Лебега. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, 20 страниц, библиография: 25 наименований.

Изучается спектр газокинетического оператора (и его полугруппы), отвечающего за описание процессов переноса частиц, их поглощения и воспроизводства их при соударениях в линеаризованном уравнении Больцмана. Вместе с соответствующими начальными и граничными условиями оно описывает процесс переноса частиц самой различной природы (от нейтронов или фотонов в ядерных реакторах или в звёздных атмосферах соответственно до клеток в популяциях).

N.S. Kellin. Linear Boltzmann Operator and it's Semi-group at Lebesgue Scale. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, 20 Pages, 25 References.

The spectrum of linear Boltzmann operator (and it's semi-group) which describes processes of particles transport and their adsorption with generation in linearized Boltzmann equation is investigated in this paper. Together with corresponding initial and boundary conditions this equation describes many processes of particle transport (from neutrons and photons in nuclear reactors and star's atmospheres correspondingly till cells in growing populations).

§ 1. Спектральный анализ газокинетического оператора

1.1 Цель настоящего исследования – спектральный анализ газокинетического оператора $\hat\Lambda = -\hat L + \hat K = -\vec\upsilon\nabla_{\vec r} \bullet - h(\vec r,\vec\upsilon)\hat I \bullet + \int_W d\vec\upsilon' K(\vec r,\vec\upsilon' \to \vec\upsilon)\bullet$ в возможно более общих условиях, накладываемых на функции $h(\vec r,\vec\upsilon)$ и $K(\vec r,\vec\upsilon' \to \vec\upsilon)$, которые предполагает только сам вывод уравнения Больцмана.

Обозначения и соглашения о сокращениях в записи следуют принятым в монографии [1], и соответствуют использованным в работе [2] в частности, функции h и K соответствуют функциям $E^{1/2}\Sigma_{total}(\vec r,E)$ и $\sum_{b'}^{l}\upsilon_{b',l}(E')(E'/E)\Sigma_{b',l}(\vec r,E')\cdot W_{b',l}(E' \to E,\vec\Omega' \to \vec\Omega)$.

Оператор $\hat K$ – «интеграл соударений» – будет рассматриваться как возмущение оператора переноса $-\hat L$, спектральные свойства которого подробно изучались в работе [2] в предположении, что функция $h \in L_D^\infty$, а области $V(\boldsymbol{\upsilon})$ лебегово эквивалентны замкнутым.

Большинство[1] результатов спектрального анализа оператора $\hat\Lambda$ будет получено в аналогичных предположениях:

$$\begin{aligned} &h \in L_D^\infty;\ K = k(\vec r,\vec\upsilon' \to \vec\upsilon)\cdot\varphi(|\vec\upsilon' - \vec\upsilon|),\ \ k \in L_{D\times W}^\infty,\ \ \exists b < 2:\ 0 < \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1/|\vec\upsilon' - \vec\upsilon|^b; \\ &\boldsymbol{0} < k_0 \le k \le k_1 < \infty,\ \ Im\, h(\vec r,\vec\upsilon)=0;\ \ [V(\vec\upsilon)] = V(\vec\upsilon)\ \ \textit{почти при всех}\ \ \vec\upsilon \end{aligned} \quad . \tag{0}$$

1.2 Предполагаются известными следующие свойства операторов $\tilde\Lambda$.

С.1. Замкнутость и неограниченность в пространствах L_D^p.

С.2. Плотность области определения в $L_D^p:\ [D(\hat\Lambda_p)] = [R_D^p] = L_D^p;\ p < \infty$.

С.3. Взаимная сопряженность при $1/p + 1/q = 1$ операторов $\tilde\Lambda_q$ и $\hat\Lambda'_p = -\hat L' + \tilde K'$, где $\hat K' = \int_W d\vec v'\bar K(\vec r,\vec v \to \vec v'),\ p < \infty,\ D(\hat\Lambda') = \tilde R_D^p$, а при $p = \infty$ $\hat\Lambda_1'^{+} = \hat\Lambda_\infty,\ \hat\Lambda_1^{+} = \hat\Lambda'_\infty$.

С.4. Существование резольвент $\hat R(\lambda,\tilde\Lambda)$, представимых при достаточно больших $Re\,\lambda\ \ (Re\,\lambda > ||\tilde K|| - a)$ абсолютно и равномерно сходящимися рядами $\hat R(\lambda,\tilde\Lambda) = (\sum_0^\infty(\tilde l(\lambda)\tilde K)^n)\tilde l(\lambda) \equiv \sum_0^\infty \tilde A^n(\lambda)\tilde l(\lambda) = \tilde l(\lambda)\sum_0^\infty(\tilde K\tilde l(\lambda))^n \equiv \tilde l(\lambda)\sum_0^\infty \tilde{\mathcal A}^n(\lambda) = \tilde l(\lambda) + \tilde l(\lambda)\sum_0^\infty \tilde B_n(\lambda)\tilde l(\lambda)$, с оценкой норм вида $||\hat R(\lambda,\tilde\Lambda)|| \le 1/\{Re\,\lambda + sup_p\,||\tilde K||_p\}$. В дальнейшем под $\tilde A(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal A}(\lambda)$ будут подразумеваться любые из операторов $\tilde l(\lambda)\tilde K$ и $\tilde K\tilde l(\lambda)$ соответственно. Отметим, что $\tilde A(\lambda)$ называется оператором критичности; его наибольшее собственное значение (см. ниже теорему 8) равно $K_{ýôô}(\lambda),\ \ Im\,\lambda = 0$.

1.3. Приведем несколько простых предложений, которые будут использоваться при доказательстве теорем 1-8.

<u>Пр.1</u>. $\tilde K \in B(L_D^p),\ p \in [1,\infty]$. В самом деле, из определения нормы в L_D^∞ следует принадлежность $\tilde K$ к $B(L_D^\infty)$, а, следовательно, и принадлежность $\tilde K \in B(L_D^1)$, так как $\hat K^+ = \hat K'$. Согласно интерполяционной теореме Рисса $\tilde K \in B(L_D^p)$ при всех p.

<u>Пр.2</u>. При рассмотрении операторных функций $\tilde A(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal A}(\lambda)$ существенную роль играло утверждение, сформулированное в [1] с. 349 Д22.3: «Если G – открытая односвязная область аналитичности операторнозначной функции $\hat A(\lambda) \in B(X)$ и, кроме того, некоторая положительная степень $\hat A^n(\lambda) \in Q(X) \subset B(X)$, то либо оператор $\hat I - \hat A(\lambda)$ не имеет ог-

---

[1] **При использовании теории положительных на конусе операторов от функции h будет требоваться вещественность, а от k – положительность.**

раниченного обратного нигде в G, либо этот обратный существует всюду в G, кроме, быть может, счетного числа изолированных точек $\{\lambda_i\} \subset G$». В работе [3] это утверждение доказано для случая $n = 1$. Методом, изложенным в [4] с. 504, получаем необходимую для дальнейшего часть приведенного утверждения; при выполнении сформулированных условий, оператор $\widehat{I} - \widehat{A}(\lambda)$ ограниченно обратим всюду в G, кроме, быть может, не более чем счетного множества точек $\{\lambda_i\} \subset G$ с возможными предельными точками лишь на ∂G и в бесконечности, если, хотя бы при одном $\lambda_0 \in G$, $(\hat{I} - \hat{A}(\lambda_0))^{-1} \in B(X)$.

Пр.3. Рассмотрим эквивалентные задачи Коши $(t \cdot \sigma = \tau)$

$$n_t' = -[\vec{\upsilon}\nabla_{\vec{r}} n + h(\vec{r},\vec{\upsilon})n] = -\hat{L}n;\ |\vec{\upsilon}| \le 1 \quad ; \quad n_t' = -[\vec{\upsilon}\nabla_{\vec{r}} n + h(\vec{r},\vec{\upsilon}/\sigma)n] = -\hat{L}^{(\sigma)}n;\ |\vec{\upsilon}| \le \sigma;$$

$$\hat{R}(\lambda,-\hat{L}) = \hat{l}(\lambda) \quad ; \quad \hat{R}(\lambda,-\hat{L}^{(\sigma)}) = \hat{l}^{(\sigma)}(\sigma\cdot\lambda) = \int_{s_1}^{s} \frac{d\eta}{\upsilon} exp[-\int_{\eta}^{s} \frac{d\xi}{\upsilon}(h+\lambda)].$$

Поэтому, $\forall \sigma > 0$ $\hat{l}^{(\sigma)}(\sigma\lambda) \in B(L_D^p)$ тогда и только тогда, когда $\hat{l}(\lambda) \in B(L_D^p)$, то есть $a_s(\sigma \cdot h(\vec{r},\vec{v})) = \sigma \cdot a_s(h(\vec{r},\vec{v}))$.

Пр.4. Обычная проверка функции $x^2 + a_2(\mu)x^\alpha + a_3(\mu)x + 1$ на экстремум при $x \ge 1$, $x = max\{u,\upsilon\}/min\{u,\upsilon\}$, $0 \le \alpha \le 1$, $|\mu| \le 1$ показывает, что справедливо неравенство $1/|\vec{u} - \vec{\upsilon}| \le 2\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha} u^{-\alpha} \cdot \upsilon^{\alpha-1} / |\vec{\Omega} - \vec{\omega}|$. Здесь $\vec{\Omega} = \vec{\upsilon}/\upsilon$, $\vec{\omega} = \vec{u}/u$, $\mu = (\vec{\Omega},\vec{\omega})$,.

Пр.5. Операторы $\tilde{A}(\lambda)$ и $\tilde{A}(\lambda)$ являются регулярными, что следует из определения (см. [5] с. 31) и условия (0).

Пр.6. Операторы $\tilde{A}_1$ являются филлипсовскими, что следует из С.4. Поэтому, подобно тому, как в работе [2] были введены операторы $\tilde{L}_1^e$ и пространства L_D^{1e}, можно ввести операторы $\tilde{A}_1^e$ и соответствующие пространства L_D^{1e} (в которых $\|f\|_\infty = \|f\|'$), потребующиеся вместо операторов $\tilde{A}_\infty$ и пространства L_D^∞ при рассмотрении полугрупп $\hat{T}(t,\tilde{A})$.

Пр.7. (Лемма Альбертони, Монтаньини). Пусть $\lambda \in \pi_{a_s}^+ \Rightarrow \lambda \in P\sigma(\hat{\Lambda}) \Longleftrightarrow \sigma(\hat{A}(\lambda)) \ni 1$. Доказательство леммы, приведенное в [1], без изменений, проводится и в случае, когда коэффициенты оператора $\hat{\Lambda}$: h и K удовлетворяют условиям (0).

Пр.8. Про последовательность $\{u_n\} \subset L_D^p$ будем говорить, что “она сходится к нулю” тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = n(\varepsilon)$ $\forall n > N$ $u_n(x) = 0$ при $x \in D_{\varepsilon,1}$.

1.4. Подробное изучение свойств оператора переноса $-\hat{L}$, проведенное в работе [2], позволяет, рассматривая оператор $\hat{\Lambda}$ как возмущенный (ограниченным оператором $\hat{K}$), заметно проще и полнее, чем до сих пор, решать задачу его спектрального анализа. Установим нужное для анализа спектра оператора $\hat{\Lambda}$ в полуплоскости $\overline{\pi}_{a_s}^-$ соотношение.

Лемма 1. Если $f \in L_{D_{0,\varepsilon}}^p$, $p > 1$, то $\|\tilde{K}f\|_p \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Действительно, при $p < \infty$ в силу неравенства Гельдера имеем:

$$|\tilde{K}f|^p \le \varphi_1 \int_{W_{0,\varepsilon}} d\vec{\upsilon}'|k| \cdot |\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}|^{-2} \cdot |f|^p \cdot [\varphi_1 \int_{W_{0,\varepsilon}} d\vec{\upsilon}'|k| \cdot |\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}|^{-2}]^{p-1} \Rightarrow$$

$$\|\tilde{K}f\|_p \le 16\pi \cdot k_1\varphi_1\varepsilon \|f\|_p; \quad \|\tilde{K}f\|_\infty \le \|f\|_\infty k_1\varphi_1 \underset{D}{VM} \int_{W_{0,\varepsilon}} d\vec{\upsilon}'|\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}|^{-2} \le 20\pi k_1\varepsilon \|f\|_\infty \varphi_1.$$

Итак, последовательности Хилле $\{W_n\}$, построенные в работе [2] для точек спектра операторов $-\tilde{L}$, одновременно являются и последовательностями Хилле для операторов $\tilde{A}$, откуда с учетом взаимной сопряженности операторов $\tilde{A}_1(\lambda)$ и $\tilde{A}_\infty(\bar{\lambda})$ следует

<u>теорема 1</u>: $\sigma(\tilde{A}) \supseteq \bar{\pi}^{-}_{a_s}$.

Спектральный анализ оператора $\hat{\Lambda}$ в полуплоскости $\pi^{+}_{a_s}$ проведем, основываясь на Пр.7. о связи между спектрами операторов $\hat{\Lambda}$ и $\hat{A}(\lambda)$. Основным результатом, полученным в ходе спектрального анализа оператора $\hat{A}(\lambda)$, будет следующий:

<u>теорема 2</u>. $\exists N : \forall n > N\ \forall\lambda \in \pi^{+}_{a_s}\ \ \tilde{A}^{n}(\lambda) \in Q(L^{\infty+}_{D} \to L^{\infty}_{D})$. Воспользовавшись принадлежностью $\tilde{I}(\lambda) \in B(L^{\infty}_{D})$ и взаимосопряженностью операторов $\tilde{A}(\lambda)$ и $\tilde{A}(\lambda)$, убеждаемся, что теорема 2 является следствием утверждения:

$$\exists N : \forall n > N\ \forall\lambda \in \pi^{+}_{a_s}\ \ \tilde{B}_{n}(\lambda) \in Q(L^{\infty+}_{D} \to L^{\infty}_{D}). \tag{1}$$

Поскольку операторы $\hat{K}$ и $\hat{K}'$ зависят от одних и тех же функций, то доказывать утверждение (1) можно, например, только для операторов $\hat{B}_n(\lambda)$. Доказательство теоремы 2 проведем после исследования операторов $\tilde{A}(\lambda)$ и $\tilde{A}(\lambda)$.

<u>Лемма 2</u>. Операторы $\tilde{B}_n(\lambda)$ – интегральные.

<u>Доказательство</u>. Оператор $\hat{B}_1(\lambda)$ интегральный, что доказывается так же, как и соответствующий результат в [1] и [6]. Ядро его – $B_1(\lambda, x' \to x)$ имеет вид $(\vec{\omega} = (\vec{r} - \vec{r}\,')_0)$ [2]:

$$\begin{aligned} B_1(\lambda, x' \to x) = {} & |\vec{r} - \vec{r}\,'|^{-2} \cdot \int_0^1 u du k(\vec{r}\,', \vec{\upsilon}\,' \to u\vec{\omega}) \cdot k(\vec{r}, u\vec{\omega} \to \vec{\upsilon})\varphi(|\vec{\upsilon}\,' - u\vec{\omega}|) \times \\ & \times \varphi(|u\vec{\omega} - \vec{\upsilon}|) \cdot exp[-|\vec{r} - \vec{r}\,'| \cdot \int_0^1 (h(\xi\vec{r} + (1-\xi)\vec{r}\,', u\vec{\omega}) + \lambda)\tfrac{d\xi}{u}] \end{aligned} \tag{2}$$

Ядро $B_n(\lambda, x' \to x)$ получается из ядра $B_1(\lambda, x' \to x)$ применением к нему оператора $\hat{A}^{(n-1)}(\lambda)$ по переменным x. В результате получаем рекуррентное соотношение и явную формулу для ядер в которых положено $\vec{\omega} = (\vec{r} - \vec{\rho})_0$; $\vec{\omega}_1 = (\vec{r}_2 - \vec{r}\,')_0$, $\vec{\omega}_i = (\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i)_0$, $\vec{\omega}_n = (\vec{r} - \vec{r}_n)_0$, а $p(\vec{r} \to \vec{\rho}, \vec{u}) = exp[-|\vec{r} - \vec{\rho}| \int_0^1 (h(\xi\vec{r} + (1-\xi)\vec{\rho}, \vec{u}) + \lambda)\frac{d\xi}{u}]$ [3]:

$$B_n(\lambda, x' \to x) = B_{n-1}(\lambda, \vec{r}\,' \to \vec{\rho}, \vec{\upsilon}\,' \to u\vec{\omega}) \cdot \int_V \frac{d\vec{\rho}}{|\vec{r} - \vec{\rho}|} \int_0^1 \frac{\mu du}{|\vec{r} - \vec{\rho}|} k(\vec{r}, u\vec{\omega} \to \vec{\upsilon})\varphi(|u\vec{\omega} - \vec{\upsilon}|) p(\vec{r} \to \vec{\rho}, u\vec{\omega});$$

$$\begin{aligned} B_n(\lambda, x' \to x) = {} & \underbrace{\int \cdot K \cdot \int}_{(n-1)\ раз} \frac{d\vec{r}_2 K\, d\vec{r}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^2 \prod_{i=2}^{n} |\vec{r}_i - \vec{r}_{i+1}|^2 |\vec{r}_2 - \vec{r}\,'|^2} \int_0^1 \upsilon_1 d\upsilon_1 \cdot K \cdot \int_0^1 \upsilon_n d\upsilon_n \times \\ & \times K(\vec{r}, \upsilon_n\vec{\omega}_n \to \vec{\upsilon}) \prod_{i=2}^{n} K(\vec{r}_i, \upsilon_{i-1}\vec{\omega}_{i-1} \to \upsilon_i\vec{\omega}_i) K(\vec{r}\,', \vec{\upsilon}\,' \to \upsilon_1\vec{\omega}_1) \times \\ & \times p(\vec{r}_n \to \vec{r}, \upsilon_n\vec{\omega}_n) \prod_{i=2}^{n-1} p(\vec{r}_i \to \vec{r}_{i+1}, \upsilon_i\vec{\omega}_i) p(\vec{r}\,' \to \vec{r}_2, \upsilon_1\vec{\omega}_1) \end{aligned} \tag{3}$$

<u>Следствие 1</u>. Операторы $\tilde{A}^{n}(\lambda)$ и $\tilde{A}^{n}(\lambda)$ – интегральные при $n > 1$. Действительно, в силу сопряженности операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{A}(\lambda)$, достаточно установить, что операторы $\tilde{A}^{n}(\lambda)$ интегральные. Для этого достаточно определить их ядра – $\tilde{A}(\lambda, x' \to x) = \tilde{I}(\lambda)\tilde{B}_n(\lambda, x' \to y, s)$.

---

[2] **Выписаны формулы для ядер $B_1(\lambda, x' \to x)$. Формулы для ядер $B'_1(\lambda, x' \to x)$ аналогичны.**

[3] **Выписаны формулы для ядер $B_n(\lambda, x' \to x)$. Формулы для ядер $B'_n(\lambda, x' \to x)$ аналогичны.**

Здесь для определенности выделена координата s, на которую действуют операторы $\tilde{T}(\lambda)$.

Лемма 3. Ядра $B_n(\lambda, x' \to x)$ (и $B'_n(\lambda, x' \to x)$) суммируемы по x' и по x со степенями $\beta \in [1, \beta_0)$ $\forall \lambda \in \pi^+_{a_s}$.

Доказательство: Заменяем функции k и φ, входящие в операторы $\hat{B}_n(\lambda)$, их наибольшими значениями, а λ заменяем на $Re\lambda = \mu$. Интегрирование по $d\vec{r}_i$ заменяем на интегрирование по $s_i^2 ds_i d\omega_i$. Заменяем интервалы интегрирования по ds_i на большие: $[0, d]$ ($d = diamV$). В результате приходим к оценке сверху для интегралов от степеней их ядер: $\int_D dx^{(\prime)} \left| B_n(\lambda, x' \to x) \right|^\sigma \le$

$$\le k_1^{n+1} \cdot \varphi_1^{n+1} \int_0^d ds_1 \cdot K \cdot \int_0^d ds_{n-1} \int_0^d s_n^{2-2\sigma} ds_n \cdot \int_{4\pi} d\vec{\omega}_1 \cdot K \cdot \int_{4\pi} d\vec{\omega}_n \int_0^1 \upsilon_1^\sigma d\upsilon_1 \cdot K \cdot \int_0^1 \upsilon_n^\sigma d\upsilon_n \int_W d\vec{\upsilon}^{(\prime)} F_n,$$

где $F_n = |\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_n|^{-b\sigma} \prod_{i=1}^{n-1} |\vec{\upsilon}_{i+1} - \vec{\upsilon}_i|^{-b\sigma} |\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}'|^{-b\sigma} p^\sigma(\vec{r}_n \to \vec{r}, \vec{\upsilon}_n) \prod_{i=2}^{n-1} p^\sigma(\vec{r}_i \to \vec{r}_{i+1}, \vec{\upsilon}_i) p^\sigma(\vec{r}' \to \vec{r}_2, \vec{\upsilon}_1)$.

Согласно Пр.3 интегралы по ds_i от функций p_i^σ ограничены при всех $\lambda \in \pi^+_{a_s}$. Согласно Пр.4 разности $|\vec{\upsilon}_{i+1} - \vec{\upsilon}_i|^{-b\sigma}$, входящие сомножителями в функцию F_n, допускают оценку величиной $2^{n+1} \cdot \{\int_0^1 \upsilon^{\sigma(1-b)} d\upsilon\}^{n+1} \cdot \{\int_{4\pi} d\vec{\omega} |\vec{\Omega} - \vec{\omega}|^{-b\sigma}\}^{n+1}$, которая конечна при некотором $\sigma > 1$ в силу соотношения (0). Применив неравенство Гельдера к интегралу $\int_0^d ds_n s_n^{2(1-\sigma)} p^\sigma(\vec{r}_n - \vec{r}, \vec{\upsilon}_n)$ с показателями p и q такими, что $2p(1-\sigma) > 1$, получаем ограниченность сверху при $\sigma \in [1, \sigma_0)$, $\sigma_0 = \sigma_0(b)$ величин $\int_D dx^{(\prime)} |B_n(\lambda, x' \to x)|^\sigma$.

Следствие 2. Согласно [7], с. 24 результат, полученный в лемме 3, достаточен для того, чтобы утверждать, что $\exists N\, \forall n > N\, \forall p\, \forall q \quad \tilde{A}^n(\lambda), \tilde{A}^n(\lambda), \tilde{B}_n(\lambda) \in B(L_D^p \to L_D^q)$.

Замечание 1. Если особенности в ядре оператора $\hat{K}$ имеют вид $1/|\vec{\upsilon}' - \vec{\upsilon}|$, то в качестве N можно брать число 8.

Следствие 3. Согласно теореме XI.3.3 работы [4] результат, полученный в лемме 3, достаточен для того, чтобы утверждать, что операторы $\tilde{A}^n(\lambda), \tilde{A}^n(\lambda), \tilde{B}_{n-1}(\lambda)$ – компактные из L_D^p в L_D^q $\forall n > 1$ при $1 < p < q_0 = q_0(b, p) < \infty$.

Лемма 4. Операторы $\tilde{B}_3(\lambda)$, $\tilde{A}^4(\lambda)$, $\tilde{A}^4(\lambda) \in Q(L_D^1)$.

Как и ранее, при доказательстве можно ограничиться рассмотрением одного из перечисленных операторов, например, $\hat{B}_3(\lambda)$. Согласно лемме 5.2 из работы [5] $\hat{B}_1(\lambda)$ переводит слабокомпактные множества в компактные, поскольку, согласно лемме 3, $\hat{B}_1(\lambda) \in B(L_D^1 \to L_D^p)$, где $p > 1$. Поскольку образом ограниченного в L_D^1 множества (при действии оператора $\hat{B}_1(\lambda)$) является ограниченное в L_D^p при $p > 1$ множество, а следовательно, слабокомпактное в L_D^p и тем более в L_D^1, то оператор $\hat{B}_1(\lambda) \in WQ(L_D^1)$ при $\lambda \in \pi^+_{a_s}$. Слабокомпактные операторы образуют идеал, и, кроме того, произведение двух слабокомпактных операторов компактно ([5] 6.11), поэтому, $\hat{B}_3(\lambda) \in Q(L_D^1)$ [4]. Применив

[4] Схема рассуждений, аналогичная приведенной, использовалась ранее А.А. Шкурпеловым для доказательства того, что (в наших обозначениях) оператор $\hat{B}_3(\lambda) \in WQ(L'_D)$, если функции h и k, входящие в него, удовлетворяют требованиям «газовой модели» вещества, [14]. Использовалась она также и в работе [15], где рассматривалась задача переноса частиц во всем пространстве ÿ × ÿ × ÿ.

обычные соображения, связанные с сопряженностью, заключаем, что операторы, рассмотренные в лемме, компактны и в L^{∞}_{D}.

Представляет интерес выяснить, в каких пространствах компактно действуют операторы критичности $\tilde{A}(\lambda)$ и сопряженные к ним $\tilde{A}^{+}(\lambda)$.

<u>Теорема 3.</u> 1) $\forall\lambda\in\pi^{+}_{a_s}$ $\tilde{A}(\lambda)$, $\tilde{A}^{+}(\lambda)\notin WQ(L^{1}_{D}),\ WQ(L^{\infty}_{D})$.

2) $\forall\lambda\in\pi^{+}_{a_s}$ $\forall p\in(1,\infty)$ $\tilde{A}(\lambda)$, $\tilde{A}^{+}(\lambda)\in Q(L^{p}_{D})$.

<u>Доказательство.</u> 1) Операторы $\tilde{A}(\lambda)$ и $\tilde{A}^{+}(\lambda)$ не являются интегральными, так как их действие на функции $f\neq f(s,\vec{v})$ сводится к умножению на функции $\tilde{A}(\lambda)\chi(D)$ и $\tilde{A}^{+}(\lambda)\chi(D)$ соответственно. Поэтому, (см. [5] сс.122-123) они не могут быть слабокомпактными.

2) Если функции h и k, входящие в операторы $\tilde{T}(\lambda)$ и $\tilde{K}$, таковы, что $a=a(h)>0$, $k_0=a(k)>0,\ Im\,h=0=Im\,k$, а $\lambda>a$, то метод доказательства компактности операторов $\tilde{A}(\lambda)$ $(\tilde{A}^{+}(\lambda)=\tilde{A}(\lambda))$, предложенный В.С. Владимировым в [6], полностью сохраняется. Чтобы провести доказательство в общем случае, надо заметить, что: в силу <u>Пр.5</u> достаточно доказывать компактность операторов $\tilde{T}(\lambda)Im\tilde{K}$ и $\tilde{T}(\lambda)Re\tilde{K}$; из тождества Гильберта для резольвент $\tilde{T}(\lambda)$ вытекает возможность ограничиться при доказательстве каким-либо одним значением $\lambda\in\pi^{+}_{a_s}$ (например, $\lambda=\beta>a$); второе резольвентное тождество, примененное к операторам $\tilde{T}(\beta)$ и $|\tilde{T}(\beta)|$, сводит доказательство к случаю зависимости операторов $\tilde{T}(\lambda)$ от действительных функций h. Доказательство теоремы 3 следует теперь из регулярности операторов $\tilde{K}$, что и требовалось доказать.

<u>Доказательство теоремы 2</u>.

Лемма 4 и следствие 2 показывают, что в силу интерполяционной теоремы Красносельского для достаточно больших n оператор $\vec{B}_n(\lambda)$ может быть некомпактным разве лишь как оператор из L^{1}_{D} в L^{∞}_{D}. Рассмотрим тогда оператор $\vec{B}_{n+4}(\lambda)$ и воспользуемся результатом теоремы 2.4 из работы [9] о том, что оператор $\vec{S}=\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\cdot\vec{S}_3$ компактен, коль скоро все операторы оцениваются ($\vec{R}_i\leq\vec{S}_i\leq\vec{T}_i$) компактными операторами $\vec{R}_i$ и $\vec{T}_i$. Поскольку сами операторы $\vec{B}_n(\lambda)\in Q(L^{1}_{D}\to L^{p}_{D})$ и $\vec{B}_1(\lambda)\in Q(L^{p}_{D}\to L^{p+\varepsilon}_{D})$ при $\varepsilon>0$, то для применимости результатов Алипрантиса и Буркиншау, требуется оценка $\vec{B}_1(\lambda)\leq\vec{Q}\in Q(L^{q}_{D}\to L^{\infty}_{D})$ при каком-либо $q\in(1,\infty)$. Рассмотрев в качестве $\vec{Q}$ оператор типа $\vec{B}_1(\lambda)$, в котором функции k заменены на достаточно большие константы, и, оценивая его ядро, аналогично тому, как это сделано в [1] §8, можно утверждать, что $\vec{Q}$ – компактен, на основании теоремы 6.4 из [5]. Что и требовалось доказать.

На основании результатов лемм 3 и 4 и следствия 3, с учетом взаимной сопряженности операторов $\tilde{A}(\lambda)$ и $\tilde{A}^{+}(\lambda)$ и <u>Пр.7</u> получаем <u>следствие 4</u>.

1) Оператор критичности $\vec{A}(\lambda)$ удовлетворяет теории Рисса-Шаудера в $J^{1}\backslash\{0\}$ при $\lambda\in\pi^{+}_{a_s}$.

2) Газокинетический оператор $\vec{\Lambda}$ удовлетворяет теории Рисса-Шаудера в $\pi^{+}_{a_s}$.

3) Спектры операторов $\vec{A}(\lambda)$ и $\vec{\Lambda}$ (и др. результаты пунктов 1) и 2)) инвариантны относительно индекса p пространств L^{p}_{D}.[5]

---

[5] Инвариантность относительно индекса p будет справедлива и для результатов теорем 6-7.

Изучим детальнее структуру точечного спектра оператора $\hat{\Lambda}$, а именно, покажем, что последовательность его собственных чисел $\{\lambda_i\}$, если она бесконечна, обязана удовлетворять следующему условию: $Re\lambda_i \to -a_s$ при $i \to \infty$. Для этого достаточно показать, что $\|\hat{B}_1(\lambda)\|_1 \to 0$ при $Im\lambda \to \infty$, коль скоро при

$$n \to \infty \quad \exists\{\hat{B}^*_{1,n}(\lambda)\}: \quad \|\hat{B}^*_{1,n}(\lambda) - \hat{B}_1(\lambda)\|_1 \to 0, \tag{4}$$

где $\|\hat{B}^*_1(\lambda)\|_1 \le \tilde{n}(\vartheta)|\lambda + a_s|^{-\vartheta}, \quad 0.5b < \vartheta < 1, \quad a_s < |\lambda + a_s|, \quad \lambda \in \pi^+_{a_s}$. (5)

Звезда у оператора $\hat{B}_1(\lambda)$ означает, что его ядро строится с помощью функций h и k специального вида: удобно, чтобы в ядре оператора $\hat{B}_1(\lambda)$ фигурировали абсолютно непрерывные почти при всех $(x',x) \in D \times D$ по u в среднем с весом u^{-b} функции $\psi(x,u,x') = \varphi_1^2 2^{2b}|\vec{\Omega} - \vec{\omega}|^b|\vec{\Omega}' - \vec{\omega}|^b\, k(\vec{r}',\vec{\upsilon}' \to u\vec{\omega}) \times \times k(\vec{r},u\vec{\omega} \to \vec{\upsilon}) \cdot p(\vec{r}' \to \vec{r},u\vec{\omega})$. Здесь обозначения те же, что и в формуле (3).

Множества функций h и k, порождающих функции ψ с указанными свойствами, очевидно, всюду плотны в пространствах L^∞_D и $L^\infty_{D\times W}$ соответственно, по нормам, индуцированным из пространств L^1_D и $L^1_{D\times W}$, так что предельный переход (4) обоснован.

Оценивая сверху величины $|\tilde{B}(\lambda)|\chi(D)$, дважды применяя неравенство Гельдера к функциям 1 и $\psi(x,u,x')$ и $p(\vec{r}' \to \vec{r},u\vec{\omega})$ и $\psi(x,u,x')/p(\vec{r}' \to \vec{r},u\vec{\omega})$ и интегрируя по частям по u в формуле (2), что возможно, так как $\psi \in AC[0,1]_u$, приходим к требуемой оценке (5), с учетом конечности норм $\|(\upsilon')^{-b}|\vec{\Omega}\text{-}\vec{\omega}|^{-b}|\vec{\Omega}\text{-}\vec{\omega}'|^{-b}\, \mathbf{V}^1_0[u^{3-b}\psi(x,u,x')]\|_{1,\infty}$ и $\|\upsilon^{-b}|\vec{\Omega} - \vec{\omega}|^{-b}|\vec{\Omega} - \vec{\omega}'|^{-b}\, \mathbf{V}^1_0[u^{3-b}\psi(x,u,x')]\|_{\infty,1}$. Здесь $\mathbf{V}$ – означает вариацию функции. Если предположить дополнительно равномерность по $\lambda \in \pi^+_{a_s}$ оценки (5), что выполняется, например, при условии $\|\upsilon\hat{l}(-a_s)\|_\infty < \infty$, то из результатов [10] следует равномерная ограниченность в $\pi^+_{a_s}$ $Im\lambda_i$ при $\lambda_i \in P_1\sigma(\hat{\Lambda})$, то есть «концентрация точечного спектра оператора $\hat{\Lambda}$ к действительной оси» [1].

1.5. Исследуем важный частный случай оператора критичности: ядро k строго положительно: $0 < k_0 \le k \le k_1 < \infty$, функция h – действительна. В этом случае операторы $\tilde{A}(\beta)$ при $\beta \in \pi^+_{a_s} \cap \breve{Y}^1$ являются положительными на конусе неотрицательных функций в L^p_D операторами. Тогда справедлива <u>теорема 4</u>.

Операторы $\tilde{A}(\beta)$ и $\tilde{A}(\beta)$ имеют ведущие собственные значения. <u>Доказательство</u> теоремы основывается на методах работы [11] и аналогично приведенному в [1] в случае, когда функции h и k удовлетворяют требованиям «газовой модели» вещества: операторы $\tilde{A}(\beta)$ являются $\chi(D)$-положительными во всех L^p_D. Действительно, $\forall f \in K \subset L^p_D$ $(\tilde{A}(\beta))^2 F \ge (k_0\varphi_0/d)^2 E_3(dA+\beta d)\|\tilde{T}(\beta)F\|_1\chi(D)$, а с другой стороны, согласно лемме 3 при $p > p_0$, $(\tilde{A}(\beta))^2 F \le$

$$\le k_1^2\varphi_1^2 \int_D \frac{dx'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\int_0^1 \frac{udu}{|\vec{\upsilon}'-u\vec{\omega}|^b|u\vec{\omega}-\vec{\upsilon}|^b} exp[-|\vec{r}-\vec{r}'|\int_0^1 \frac{d\xi}{u}(h+\beta)]\tilde{T}(\beta)F(x') \le k_1^2\varphi_1^2\|\hat{B}^*_1(\beta)F\|_\infty\,\chi(D).$$

Аналогичные оценки с заменой оператора $\hat{B}^*_1(\beta)$ на $\hat{B}^*_k(\beta)$ справедливы для функций F из всех пространств L^p_D, причем, согласно следствию 2, $sup_p\, k(p,b) < \infty$.

Следовательно, показатели $\chi(D)$-положительности операторов $\tilde{A}(\beta)$ конечны во всех L_D^p. Остается воспользоваться взаимной сопряженностью операторов $\tilde{A}(\beta)$ и $\tilde{A}(\beta)$. Что и требовалось доказать.

Для приложений бывает полезно знание норм оператора критичности $\hat{A}(\beta)$ в случае положительности на конусе. Для этого докажем <u>теорему 5</u>. [6]

$$1)\quad \|\hat{A}^n(\beta)\chi(D)\|_\infty = \|\hat{A}^n(\beta)\|_\infty, \quad \|\hat{A}'^n(\beta)\chi(D)\|_\infty = \|\hat{A}^n(\beta)\|_1 \qquad (6)$$

2) $\|\hat{A}(\beta)\|_2 = (\lambda_{max})^{1/2}$, где λ_{max} есть наибольшее собственное число оператора $\hat{A}'(\beta)\hat{A}(\beta)$.

<u>Доказательство</u>.

1) Первое из выписанных равенств доказывается так же, как и лемма 5 работы [2], второе следует из него в силу взаимной сопряженности операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}'$.

2) Рассуждение, аналогичное приведённому в работе [4] с. 189, показывает, что в доказательстве нуждается только то, что оператор $\hat{A}'(\beta)\hat{A}(\beta)$ – интегральный (разумеется, он самосопряжен и положительно определен). Для этого в явном виде построим его ядро, причем, в общем случае $\lambda \in \pi_{a_s}^+$, $h \in L_D^\infty, k \in L_{D\times W}^\infty$. Непосредственная проверка показывает, что $\forall G \in L_D^1 \quad (\hat{l}'(\lambda)\hat{l}(\lambda)G)(\vec r,\vec\upsilon) =$

$$= \int_0^{s_0(\vec r,\vec\Omega)} \frac{d\rho}{\upsilon} G(\vec r-\rho\vec\Omega,\vec\upsilon)\int_0^{s^0(\vec r,\vec\Omega)} \frac{d\nu}{\upsilon}\, exp[-\int_0^\nu \frac{d\xi}{\upsilon}(\bar h(\vec r-\xi\vec\Omega,\vec\upsilon)+\bar\lambda)-\int_{-\rho}^{\nu}\frac{d\xi}{\upsilon}(h(\vec r-\xi\vec\Omega,\vec\upsilon)+\lambda)] +$$

$$+\int_0^{s^0(\vec r,\vec\Omega)} \frac{d\rho}{\upsilon}G(\vec r+\rho\vec\Omega,\vec\upsilon)\int_0^{s^0(\vec r,\vec\Omega)}\frac{d\nu}{\upsilon}\, exp[-\int_0^\nu\frac{d\xi}{\upsilon}(\bar h(\vec r+\xi\vec\Omega,\vec\upsilon)+\bar\lambda)-\int_\rho^\nu \frac{d\xi}{\upsilon}(h(\vec r+\xi\vec\Omega,\vec\upsilon)+\lambda)] = \hat Q_1 G+\hat Q_2 G.$$

Делая в интегралах $\hat K'\hat Q_i\hat K G$ замену переменных, как при доказательстве леммы 2, приходим к искомой формуле для ядра $K(\lambda,x'\to x)$ оператора $\hat K\hat l'(\lambda)\hat l(\lambda)\hat K$: $K(\lambda,x'\to x) =$

$$= \int_0^1 \frac{du}{|\vec r-\vec r'|}\Big\{K(\vec r',\vec\upsilon'\to\vec u)\bar K(\vec r,\vec\upsilon\to\vec u)\int_0^{s^0(\vec r,\vec\omega)}\frac{ds}{|\vec r-\vec r'|}\, exp[-\int_0^s\frac{d\xi}{u}(\bar h(\vec r+\xi\vec\Omega,\vec u)+\bar\lambda)-\int_{-|\vec r-\vec r'|}^s\frac{d\xi}{u}(h(\vec r+\xi\vec\omega,\vec u)+\lambda)]+$$

$$+K(\vec r',\vec\upsilon'\to-\vec u)\bar K(\vec r,\vec\upsilon\to-\vec u)\int_{s_0(\vec r,\vec\omega)}^{-|\vec r-\vec r'|}\frac{ds}{|\vec r-\vec r'|}\, exp[-\int_s^0\frac{d\xi}{u}(\bar h(\vec r+\xi\vec\omega,-\vec u)+\bar\lambda)-\int_s^{-|\vec r-\vec r'|}\frac{d\xi}{u}(h(\vec r+\xi\vec\omega,-\vec u)+\lambda)]\Big\}$$

Здесь $\vec u = u\vec\omega$, $\vec\omega = (\vec r-\vec r')_0$. Если функции K и h четны по $\vec\omega$, то вид ядра $K(\lambda,x'\to x)$ значительно упрощается ($\rho = |\vec r-\vec r'|$): $K(\lambda,x'\to x) =$

$$\int_0^1 \frac{du}{\rho}K\bar K\Big\{\int_0^{s^0}\frac{ds}{\rho}\, exp[-\int_0^s\frac{d\xi}{u}(\bar h+\bar\lambda)-\int_{-\rho}^s\frac{d\xi}{u}(h+\lambda)] + \int_{s_0}^{-\rho}\frac{ds}{\rho}\, exp[-\int_s^0\frac{d\xi}{u}(\bar h+\bar\lambda)-\int_s^{-\rho}\frac{d\xi}{u}(h+\lambda)]\Big\}.$$

При $h=\bar h$, $\lambda=\bar\lambda$ и $K=\bar K$ имеем окончательно $K(\lambda,x'\to x)=$

$$\int_0^1\frac{du}{\rho}KK\, exp[-\int_{-\rho}^0\frac{d\xi}{u}(h+\lambda)]\Big\{\int_0^{s^0}\frac{ds}{\rho}\, exp[-2\int_0^s\frac{d\xi}{u}(\bar h+\bar\lambda)+\int_{s_0}^{-\rho}\frac{ds}{\rho}\, exp[-2\int_s^{-\rho}\frac{d\xi}{u}(h+\lambda)]\Big\}. \qquad (7)$$

Теорема доказана.

<u>Замечание 2</u>. Практическое применение формулы для нормы оператора критичности, действующего в гильбертовом пространстве, доказанной в теореме 5, требует ответа на вопрос, как искать $\lambda_{\max}$ – максимальное сингулярное число оператора критичности. Для этого заметим, что, повторив рассуждения леммы 3 и следствия 3, можно утверждать, что спектр оператора $\hat A'(\lambda)\cdot\hat A(\lambda) \in Q(L_D^p)$ (и, в частности, $\lambda_{\max}$) инвариантен относительно индекса p, и для нахождения λ_{max} может быть использована формула Гельфанда.

---

[6] См. примечания 2 и 3.

$\lambda_{max} = r_\sigma(\breve{A}'(\lambda)\cdot\breve{A}(\lambda)) = \lim_{n\to\infty}\{\|[\breve{A}'(\lambda)\cdot\breve{A}(\lambda)]^n\|_\infty\}^{1/n}$. Если оператор $\widehat{A}(\lambda)$ положителен, то, как и в первой части теоремы, приходим к полезной для приложений формуле:

$$\|\breve{A}(\beta)\|_2 = \lim_{n\to\infty}\{\underset{D}{VM}[(\breve{A}'(\beta)\cdot\breve{A}(\beta))^n\chi(D)]\}^{1/2n}. \quad (8)$$

Замечание 3. Поскольку нам известен явный вид норм операторов $\tilde{A}'_\infty(\beta)$ в случае их положительности, то формула, аналогичная (8), может быть использована для определения $\tilde{\beta}_0$ – ведущих собственных значений операторов $\tilde{A}_p(\beta)$ и $\tilde{A}'_p(\beta)$, поскольку их спектр инвариантен по индексу p.

1.6. Рассмотрим вопрос об определении величины соотношения $q = (|\lambda_1|/\lambda_0)$, где $\lambda_0 = K_{eff}$ – ведущее собственное значение оператора критичности, а λ_1 – следующее за K_{eff} по величине модуля собственное значение. Это отношение называется спектральным зазором фокусирующего оператора [18] и для него справедлива формула, аналогичная формуле Гельфанда для спектрального радиуса [19]: при $\beta\hat{A}u \geq \hat{A}v \geq \alpha\hat{A}u$; $\theta(u, v) = min\beta/max\alpha$ и $\chi^2(\hat{A}) = sup\{\theta(\hat{A}u, \hat{A}v): \hat{A}u \neq 0 \neq \hat{A}v, u\in K, v\in K\}$ имеем $q = \lim_{n\to\infty}[(\chi(\breve{A}^n)-1)/(\chi(\breve{A}^n)+1)]^{1/n}$.

Поскольку оператор критичности имеет ведущее собственное значение и является компактным в L_D^p оператором при $p\in(1,\infty)$ со спектром, инвариантным по индексу p, то спектральный зазор для него корректно определен и задачей является оценка величины q через коэффициенты оператора $\hat{A}$. Задача эта важна потому, например, что от величины q зависит число итераций, необходимых для получения значения K_{eff} с необходимой точностью, при использовании алгоритмов вычисления K_{eff} предложенных в [1], Д26.

Воспользуемся результатами работы [20]. Оператор $\hat{A}$ из $B(L_D^p)$ называется φ-острым, если он оставляет инвариантным конус $K\subset L_D^p$, и при некотором φ из промежутка $[0, \pi/2)$, для любой f из K^+ и для любой g из K выполнено неравенство: $(\hat{A}^+f, \hat{A}g)\geq\|\hat{A}^+f\|*\|\hat{A}g\|*cos\varphi$. φ-острый оператор имеет в K ведущее собственное значение $\beta = r_\sigma(\hat{A})$ с собственным вектором g_0. Если g_1 из K – собственный вектор для $\hat{A}$ и $g_1 \neq cg_0$, то $\hat{A}$ аннулирует g_1. Если $\lambda\in\sigma(\hat{A})$ и $\lambda \neq r_\sigma(\hat{A})$, то $|\lambda| \leq r_\sigma(\hat{A})tg(\varphi)$. Если положительный оператор $\hat{A}\in B(L_D^\infty)$ – интегральный, то он будет φ-острым оператором ($\varphi = arccosd_0(\hat{A})$), когда величина $d_0(\hat{A})\in(0;1)$. Здесь $d_0(\breve{A}) = \underset{(x',x)\in D\times D}{Vm}\dfrac{\int_D dyA(x'\to y)A(y\to x)}{\underset{x'\in D}{VM}A(x'\to y)\int_D dx'A(x'\to x)}$.

Перечисленные результаты применимы к анализу оператора критичности, поскольку из результатов, полученных в главе III, следует, что при соблюдении условий (0) на коэффициенты h и k, оператор критичности $\hat{A}$ положителен, компактен в L_D^p и при некотором $n \geq 2$ $\hat{A}^n\in B(L_D^1\to L_D^\infty)$. Он является интегральным, а, следовательно, ([4], с.408) имеет ограниченное в существенном ядро и, таким образом, вышеопределённая величина d_0 строго больше нуля.

Исследуем важный частный случай $b = 1$, когда можно задаться определенной степенью числа n, такой, чтобы ядро $A_n(x'\to x)$ было ограниченным в существенном. В этом случае

$$d_0 = \underset{(x',x)\in D^2}{Vm}\{A_{10}(x'\to x)/\underset{x'\in D}{VM}A_5(x'\to x)\breve{A}^5\chi(D)\} \geq \underset{(x',x)\in D^2}{Vm}\{B_9(x'\to x)/\underset{x'\in D}{VM}A_5(x'\to x)\breve{B}^4\chi(D)\}$$

$\geq (aE_3(Ad)/2k_2d^2)(E_3(Ad)mesV/d^2)^8(2h_0/k_1)^5/(I*min\{(k_3d)^4,(k_2/a)^4\}) > 0$,

где $I = \underset{V\times V}{VM}\int_V\frac{dr_1}{(r-r_1)^2}\int_V\frac{dr_2}{(r_2-r_1)^2}\int_V\frac{dr_3}{(r_3-r_2)^2(r_3-r')^2} \leq 4\pi^7 d$, $k_2 = \underset{D}{VM}\int_D d\vec{\upsilon}'k(\vec{\upsilon}'\to\vec{\upsilon}) \leq 4\pi k_1/3$ а $k_3 = \underset{D}{VM}\int_D d\vec{\upsilon}'k(\vec{\upsilon}'\to\vec{\upsilon})/\upsilon \leq 2\pi k_1$), что доказывается сверткой и оценкой сверху ядер A_n с полярными особенностями типа $1/|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2$. Преобразуя полученную оценку снизу для d_0, получаем окончательно

$$d_0 \geq (V/V_Ш)^8(E_3(Ad))^9(3^4\pi/4^9 d)(ad^2/(k_1k_2)^5)max[(ad)^4;(k_2k_3)^4](k_0)^{10}, \tag{9}$$

где $V_Ш$ – объем минимального шара содержащего тело V. (Такой шар существует и называется шаром Юнга данного тела V. Его диаметр равен $D = diam(V)(3/2)^{1/2}$).

Таким образом, спектр оператора критичности $\hat{A}$, имеющего спектральный радиус $r_\sigma(\hat{A}) = K_{eff}$, за исключением ведущего собственного значения $- K_{eff}$ сосредоточен в круге радиуса не большего $|\lambda_1| \leq K_{eff}[(1-d_0)/(1+d_0)]^{0,1}$ где величина d_0 приведена в формуле (9). При $\varphi = 1/|\mathbf{v}'-\mathbf{v}|$ можно положить $n = 8$.

§ 2 Спектральный анализ полугруппы газокинетического оператора

2.1. Свойство С.4 и предложение Пр.1 с учетом теоремы 7 работы [2] показывают, что операторы $\tilde{A}_p$ являются производящими операторами взаимосопряженных полугрупп $\tilde{T}_p(t) = \hat{T}_p(t,\tilde{A})$ класса (C_0) при $p < \infty$. При $p = \infty$ следует вместо полугрупп $\tilde{T}_\infty(t)$, не являющихся (C_0)-полугруппами из-за неплотности $(\tilde{R}_D)^\infty$ в L_D^∞, рассматривать полугруппы $\hat{T}_1^e(t)$ и $\hat{T}_1'^e(t)$, сопряженные по Филлипсу соответственно к полугруппам $\hat{T}_1'(t)$ и $\hat{T}_1(t)$.

Полугруппы $\tilde{T}(t)$ удовлетворяют условиям теории возмущений, так как $\tilde{T}_0(t) = \hat{T}(t,-\tilde{L})$ есть (C_0)-полугруппа, а операторы $\tilde{K}$ ограничены. Поэтому $\tilde{T}(t)$ представимы рядами $\tilde{T}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{T}_n(t)$, $\tilde{T}_{n+1}(t) = \int_0^t d\tau \tilde{T}_0(\tau)\tilde{K}\tilde{T}_n(t-\tau)$, которые равномерно по $t \in [0,T]$, $T < \infty$ сходятся по норме операторов в $B(L_D^p)$. Полугруппы $\tilde{T}_n(t)$ сильно непрерывны по t. Воспользовавшись связью между спектрами полугруппы и ее производящего оператора, а также результатами спектрального анализа операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{T}_0(t)$, можно утверждать, что

$$\{\lambda : 0 < |\lambda| \leq exp[\omega_0 t]\} \subseteq \sigma_e(\tilde{T}(t)),$$

$$\{\lambda : |\lambda| > exp[\omega_0 t]\} \supseteq \mu(\tilde{T}(t)),\ \ \omega_0 = \omega_0(\tilde{T}_0(t)),\ \ 0 \in \sigma(\hat{T}(t,\tilde{A})), \tag{10}$$

так как это предельная точка для $\sigma(\tilde{T}(t))$. Здесь через μ обозначена область мероморфности оператора, то есть та область, где он удовлетворяет теории Рисса-Шаудера. Фактически в соотношениях (10) включения можно заменить равенствами. Доказательство этого будет проведено в двух теоремах.

2.2. Теорема 6. $\lambda \in \tilde{n}_\sigma(\tilde{T}_0(t)) \Rightarrow \lambda \in \sigma(\tilde{T}(t))$. Теорема 7. $\lambda \in \rho(\tilde{T}_0(t)) \Rightarrow \lambda \notin c_\sigma(\tilde{T}(t))$.

Согласно теоремам 16.7.1, 16.7.7 работы [12], этого достаточно, чтобы в соотношениях (3.9) включения можно было заменить равенствами.

Доказательство теоремы 6. По условию и согласно п.8 работы [2] для операторов $[\lambda\hat{I} - \tilde{T}_0(t)] \in B(L_D^\infty)$ существуют последовательности Хилле $\{W_n\}$. Покажем, что они сходятся к нулю. Рассмотрим последовательности $\{u_n\} = \{W_n\chi(D_{0,1/n})/\|W_n\chi(D_{0,1/n})\|\}$ так что при $n \to \infty$ $\|(\lambda\hat{I} - \tilde{T}_0(t))u_n\| = \|\chi(D_{0,1/n})[\lambda\hat{I} - \tilde{T}_0(t)]W_n\|/\|W_n\chi(D_{0,1/n})\| \to 0$, если $W_n\chi(D_{0,1/n})$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. Если последнее соотношение не выполняется, то приходим к противоречию с условием $0 < c_0 \leq \|W_k\|$, поскольку $\|(\lambda\hat{I} - \tilde{T}_0(t))W_n\| \to 0$, при $n \to \infty$ и согласно формуле (12) работы [2] $W_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ почти при всех $x \in D$.

В силу взаимной сопряженности операторов $\hat{T}'(t)$ и $\hat{T}(t)$ аналогичные последовательности Хилле существуют и для операторов $\tilde{T}(t) \in B(L_D^1)$. С учетом сказанного и на основании леммы 1 проведем оценку: $\|(\lambda\hat{I}-\tilde{T}(t))u_n\|\le\|(\lambda\hat{I}-\tilde{T}(t))u_n\|\le\|(\lambda\hat{I}-\tilde{T}_0(t))u_n\|+\sum_{m=1}^{\infty}\|\tilde{T}_m(t)u_n\|\le o(1)+c\sum_{m=1}^{\infty}\|\tilde{T}_0(t)\|^m(o(1))^m/m! = o(1)+\|\tilde{T}_0(t)\|\{exp[o(1)\cdot\|\tilde{T}_0(t)\|]-1\}\to 0$ при $n\to\infty$; что и требовалось. Доказательство теоремы для операторов $\tilde{T}(t)\in B(L_D^p),\ p\in(1,\infty)$ проводится аналогично. Свойство $\|(\lambda\hat{I}-\tilde{T}_0(t))W_n\|_p\to 0$ гарантирует стремление к нулю по n интегралов $\int_{D_{\varepsilon,1}}dx\,|(\lambda\hat{I}-\tilde{T}_0(t))W_n|^p$, а, следовательно, с учетом явного вида полугрупп $\tilde{T}_0(t)$, и стремление к 0 по n интегралов $\int_{s_1}^{s_2}ds\,|(\lambda\hat{I}-\tilde{T}_0(t))W_n|^p$ почти при всех $y\in Q_{\varepsilon,1}$. Отсюда с учетом неравенства $0<c_0\le\|W_n\|_p$ следует соотношение $\|u_n\|_p=\|W_n\chi(D_{0,1/n})\|\not\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому, сходящаяся к нулю последовательность u_n является последовательностью Хилле и для операторов $(\tilde{T}_0(t))_p$, а, следовательно, и для операторов $\tilde{T}_p(t)$. Дальнейшие рассуждения изменений не требуют. Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7.

Применим следующую схему рассуждений. Пусть $\tilde{Q}(t)=\tilde{T}(t)-\tilde{T}_0(t)$. Если удастся показать, что некоторая его степень является компактным оператором, то в силу теоремы 5.35 из [13] можно утверждать, что $exp\,\pi_{\omega_0}^{+}=\mu(\tilde{T}(t))$, так как эта область связана, а операторы $[\mu\hat{I}-\tilde{T}(t)]^{-1}$ существуют и ограничены при достаточно больших μ.

Пусть теперь $\hat{\mathcal{K}}=\hat{T}_1(t)\cdot\hat{T}_1'(t)\in Q(L_D^2)\Rightarrow\tilde{T}_1(t)\in Q(L_D^2)\Rightarrow\forall n\ge 2\,\forall t>0\ \ \tilde{T}_n(t)\in$ $\in Q(L_D^2)\Rightarrow\tilde{Q}(t)\in Q(L_D^2)\Rightarrow\forall p\in(1,\infty)\ \ \tilde{Q}(t)\in Q(L_D^p)$, так как $\forall n\ge 1\ \tilde{T}_n(t)\in B(L_D^p)$.

Если $p=1$ или $p=\infty$, то аналогично тому, как велось рассмотрение оператора критичности, компактность четвертой степени $\tilde{Q}^4(t)$ по той же схеме рассуждений будет следовать из компактности операторов $\tilde{T}_1(t)\cdot\tilde{T}_3(t)$, $\tilde{T}_2(t)\cdot\tilde{T}_2(t)$, $\tilde{T}_1^4(t)$, если будет доказана компактность оператора $\hat{\mathcal{K}}^2$ в пространствах L_D^1 и L_D^∞. Итак, теорема 7 является следствием леммы 5:

1) $\hat{\mathcal{K}}\in Q(L_D^2)$, 2) $\hat{\mathcal{K}}^2\in WQ(L_D^1)$ к доказательству которой и переходим.

В целях упрощения выкладок пользуемся результатом работы [8] о том, что оператор $\widehat{A}\in B(L_D^2)$ компактен, коль скоро имеет место оценка $\hat{0}\le\hat{A}\le\hat{B}\in Q(L_D^2)$, и применить его к оператору $\hat{\mathcal{K}}$. Пункт 2) и то, что $\hat{\mathcal{K}}^2\in Q(L_D^1)$, доказывается так же, как и леммы 3 и 4, но с использованием результатов работы [9]. Далее, в силу известного закона преобразования спектров полугрупп при умножении их на $exp[\omega t]$, можно полагать, что $a(h)>0$.

$$|\hat{\mathcal{K}}F|\le exp[at]k_1^2\varphi_1^2\int_0^\tau d\tau\,exp[a(\tau-t)]\int_W d\vec{\upsilon}'|\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon}|^{-b}\cdot\int_0^\tau d\xi\int_W d\vec{\upsilon}''|\vec{\upsilon}''-\vec{\upsilon}|^{-b}F(\vec{r}+\xi(\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon}'')+\tau\vec{\upsilon}',\vec{\upsilon}'')=$$

$$=c\int_D dx'\hat{\mathcal{K}}(x'\to x)F(x')=\hat{Q}(t)\int_0^\tau d\xi\,\hat{k}(\xi)F.$$

Здесь $F\in K\subset L_D^p$, $\hat{Q}(t)G=exp[at]k_1^2\varphi_1^2\int_0^t d\tau\,exp[a(\tau-t)]G(\tau)$; а при $D(\xi)=((\xi V_{\vec{r}})\times W_{\vec{\upsilon}})$

$$\hat{k}(\xi)F=\int_W\frac{d\vec{\upsilon}'}{|\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}'|^b}\cdot\int_W\frac{d\vec{\upsilon}''}{|\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}''|^b}F(\vec{r}+\xi(\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon}'')+\tau\vec{\upsilon}',\vec{\upsilon}'')\le\hat{k}_0F=c'\xi^{2b-3}\int_{D(\xi)}\frac{dx'F(x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^b|\vec{r}-\vec{r}'+\xi(\vec{\upsilon}'-\vec{\upsilon})|^b}.$$

В приведенных формулах F следует считать продолженной нулем на все пространство $R_{\vec{r}}^3$, чтобы не писать под интегралами по $d\tau$ и $d\xi$ функций Хевисайда. Из-за этого при полярной замене координат в неравенствах появляются константы $\tilde{n}>0$ и $\tilde{n}'>0$, точные значения которых сейчас несущественны.

Теперь для того, чтобы доказать компактность оператора $\tilde{T}$ достаточно, например, показать, что $\tilde{k}_0(\xi) \in Q(L^2_{D(\xi)} \to L^2_D)$ и, кроме того, $\int_0^\tau d\xi \,||\tilde{k}_0(\xi)||_2 < \infty$. Компактность оператора $\tilde{k}_0(\xi)$ следует из того, что его ядро суммируемо со степенями $\sigma < 3/b$, что устанавливается непосредственным вычислением. Попутно получаем, что $\tilde{k}_0(\xi) \in B(L^1_{D(\xi)} \to L^p_D)$, $p > 1$, то есть его слабую компактность.

Для доказательства существования интеграла по $d\xi$, оценим величину $I = \underset{x\in D}{VM} \int_D dx' \chi_0(\xi, x' \to x) \le M(\xi)$. Так как $\tilde{k}_0(\xi)$ – положительно определенный оператор, то на основании п.54 [3] с. 558 компактность оператора $\tilde{T}$ будет следовать из того, что $\int_0^\tau d\xi \xi^{2b-3} M(\xi) < \infty$ при $1 \le b < 2$.

Для оценки величины I перейдем к полярным координатам как по $\vec{r}\,'$, так и по $\vec{\upsilon}\,'$, с центрами в точках $\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}$ соответственно. Заменим области интегрирования на объемлющие их шары, радиусов 2ξ и 2 и воспользуемся оценкой из Пр.4. В результате получим $I \le M\ \xi^{4-3b}$, то есть существование интеграла $\int_0^\tau d\xi \tilde{k}(\xi)$. Теорема доказана.

Замечание 4. Если в формулах для $\tilde{T}^0_n(t)F$ и $\tilde{T}F$, не делая оценок сверху, перейти к полярным координатам, так же как и при доказательстве леммы 2, то получим интегральное представление операторов $\tilde{T}^0_n(t)$ и $\tilde{T}$, при $n > 1$.

Замечание 5. Теоремы 6 и 7 показывают, что возможно разложение спектра операторов $\tilde{T}(t)$ на две части, одну, лежащую в круге $|\lambda| < exp[t(\omega_0 + \varepsilon)]$, а другую – в области $|\lambda| > exp[t(\omega_0 + \delta)]$, где $\varepsilon < \delta$, причем, вторая часть спектра состоит из конечного числа полюсов резольвенты $\tilde{R}(\lambda, \tilde{T}(t))$, конечной кратности. Если точечный спектр операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{T}(t)$ не пуст, то в соответствии с указанным разбиением спектра получаем нетривиальное разложение операторов $\tilde{T}(t) = \tilde{Q}(t) + \tilde{S}(t)$, где $\tilde{S}(t) \in Q(L^p_D)$ и $||\tilde{Q}(t)|| < r_\sigma(\tilde{S}(t))$, то есть, получаем важный для исследования асимптотики задачи Коши с газокинетическим оператором результат: полугруппы $\tilde{T}(t)$ квазикомпактны.

2.3. Для выделения в спектре полугрупп $\tilde{T}(t)$ (и их производящих операторов $\tilde{A}$) ведущего собственного значения в том случае, когда эти операторы являются положительными на конусе неотрицательных функций (то есть, когда $Im\,h = 0$ и $k_0 > 0$) будет доказана теорема 8: полугруппы $\tilde{T}(t)$ являются u_0-положительными операторами в пространстве L^∞_D, при $t > 2d = 2diamV$.

Согласно Д.25.3 [1], с. 353 этого достаточно, чтобы утверждать о наличии в точечном спектре (в случае его непустоты) операторов $\tilde{T}(t)$ и $\tilde{A}$ ведущего собственного значения, причем, в силу доказанной инвариантности спектра (взаимосопряженных) операторов $\tilde{\Lambda}_p$ и $\tilde{\Lambda}'_q$ по индексу p пространств L^p_D, все операторы $\tilde{A} \in C(L^p_D)$ и $\tilde{T}(t) \in B(L^p_D)$ имеют соответствующие ведущие собственные значения.

Доказательство теоремы проводится по схеме, предложенной в [1]. Изменения в условиях по сравнению с принятыми в [1] на коэффициенты газокинетического оператора приводят к изменению значений констант, появляющихся при оценках величин $\tilde{T}F, F \ge 0$, что в данном случае несущественно: константы остаются строго положительными. Переход от переменных $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ к $(\vec{r}, \vec{\upsilon})$ дает возможность провести доказательство u_0-положительности как для $\tilde{T}'(t)$, так и для $\tilde{T}(t)$. Рассмотрим функции $\tilde{u}_0 = \int_{2d}^t d\tau \tilde{T}_0(t-\tau)\chi(D)$. Тогда

$\forall F \in K \quad \tilde T(t)F \ge \tilde T_2(t)F \ge \int_{2d}^{t} d\tau \tilde T_0(t-\tau)F(\tau)$. Оценивая величину $F(\tau)$ снизу, находим $F(\tau) \ge c^2(K)\exp[-A(h)\tau]\,d^{-3}\int_0^d d\tau \,\|\hat T_0^*(t-\tau)F\|_1 = \tilde F_0 > 0$. Здесь оператор $\hat T_0^*(\tau)$ порожден функцией $h^* = A(h)\chi(D)$. Итак, $\tilde T(t)F \ge \tilde F_0 \tilde u_0$.

Доказательство u_0-ограниченности сверху операторов $\tilde T(t)$ не изменяется по сравнению с приведенным в [1]. В результате получаем оценку сверху: $\tilde T(t)F \le \{\|\tilde K\|_\infty \exp[t(\|\tilde K\|_\infty - 2d)] + (1/(t-2d))\exp[2d(\|\tilde K\|_\infty - a(h))]\}\cdot \|F\|_\infty \cdot \tilde u_0$.

Теорема доказана.

§ 3. Анализ газокинетического оператора с возмущением

Рассмотрим газокинетический оператор $\hat\Lambda$, возмущенной оператором $\hat M$, далее называемым оператором запаздывания, $\hat\Lambda + \hat M = \hat U$, имеющим специальный вид:

$$\left.\begin{array}{l} \hat M = \hat M_{ij}; \quad i = 0,\cdots,n; \quad j = 0,\cdots,n; \qquad \hat M_{ij} = 0, \qquad \text{êðîì å ñëó÷àåâ:} \\ \hat M_{ii} = -\lambda_i(\vec r)\hat I; \;\; 0 \le \lambda_i(\vec r) \in L_D^\infty; \;\; i>0; \quad \hat M_{0j} = Q_j(x)\hat I; \;\; Q_j(x) \in L_D^\infty; \;\; j>0 \\ \hat M_{i0} = \int_w K_i(\vec r, \vec\upsilon' \to \vec\upsilon)\,d\vec\upsilon' \equiv \hat K_i; \quad K_i = k_i\varphi(|\vec\upsilon' - \vec\upsilon|); \quad k_i \in L_W^\infty \times L_D^\infty; \;\; i>0 \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Очевидно, что эволюционное уравнение $\dot{\vec\varphi}_t = \hat U\vec\varphi$, $\vec\varphi(0) = \vec\varphi_0$, порождённое оператором $\hat U$ в условиях (11), обобщает как эволюционное уравнение, описывающее динамику реакторов на запаздывающих нейтронах ([1] гл.7), так и эволюционное уравнение динамики реактора с учетом обратной связи по температуре в виде уравнения "инерционного звена" ([16], часть I).

Здесь $\vec\varphi \in \prod_{j=0}^{n}(L_D^p)_j = \mathsf{X}_p$, $\hat U = -\hat{\mathsf{L}} + \hat{\mathsf{R}}$, где, $\hat 0 \le \hat{\mathsf{R}} \in B(\mathsf{X}_p)$ – положителен на конусе в X_p функций с неотрицательными компонентами, если $\forall i \forall j \; Q_j \ge 0 \le K_i$, а $-\hat{\mathsf{L}} = diag[-\hat L, -\lambda_i(\vec r)\hat I] \in C(\mathsf{X}_p)$, $D(-\hat{\mathsf{L}}) = D(\hat U) = R_D^p \times \prod_{j=1}^{n}(L_D^p)_j$.

4.1. В главе 7 монографии [1] про оператор $\hat U$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям (3.1) и (32.1) из [1] (условия (0) и (11) настоящей работы являются обобщающими их аналогами), была доказана серия теорем, основные результаты которых следующие.

1) $\hat{\mathsf{T}}^5(\lambda) = [\hat{\mathsf{R}}\hat R(\lambda, -\hat{\mathsf{L}})]^5 \in Q(\mathsf{X}_p)$. 2) $\exists k$: $\hat{\mathsf{T}}^k(\lambda) \in B(\mathsf{X}_1 \to \mathsf{X}_\infty)$.

3) $\sigma(-\hat{\mathsf{L}}(t)) = \left(\bigcup_j\{\lambda_j\}\right) \cup \sigma(-\hat L)$; здесь $\lambda_j \ne \lambda_j(\vec r)$.

4) $\hat{\mathsf{T}}(\lambda)$ u_0-положителен в X_∞ при $Im\lambda = 0$, $\lambda \in \pi_{a_s}^+$.

5) $\hat T(t, \hat U)$ имеет ведущее собственное значение. 6) $\mu(\hat T(t,\hat U)) = exp[t\,\mu(\hat U)]$.

Эти результаты позволили описать спектр оператора $\hat U$: $\sigma(\hat U) = \sigma(-\hat{\mathsf{L}})$ и еще, быть может, не более чем счетное множество Рисс-Шаудеровских точек с возможными предельными точками на $\partial\mu(-\hat{\mathsf{L}})$. В спектре $\hat U$ есть ведущее собственное значение. Доказывалось, что оператор $\hat U$ является правильным. ([1], §39). Доказательство базировалось на уже доказанной правильности оператора $\hat\Lambda$ и на том, что операторы $\hat M_{i0}$ являются возможными частными случаями оператора $\hat K$. Условия (0) и (11) таковы, что операторы $\hat M_{i0}$ по-прежнему являются одними из возможных частных случаев оператора $\hat K$. Оператор $\hat\Lambda$ в условиях (0) обладает всеми свойствами правильного оператора, что доказано в §§ 1-2, настоящей работы; структура системы $\dot{\vec\varphi}_t = \hat U\vec\varphi$, $\vec\varphi(0) = \vec\varphi_0$ в условиях (11) такая же, как и у соответствующей системы из [1].

Поэтому, сохраняя структуру доказательств, предложенную в [1] и пользуясь результатами работы [2] и §§ 1-2, получаем результаты, аналогичные шести перечисленным, необходимые для выяснения спектральной картины оператора $\hat{U}$ в условиях (0) и (11).

1) $\exists N : \forall n > N \ \ \forall p \in (1,\infty) \ \ T^{\frown n}(\lambda) \in Q(X_p)$. 2) $\exists k: \ T^{\frown k}(\lambda) \in Q(X_1 \to X_\infty)$.

3) $\sigma(-L^{\frown}(t)) = \left(\bigcup_j Z(\lambda_j(\vec{r}))\right) \cup \sigma(-\hat{L})$. Здесь Z – множество существенных значений функции $\lambda_i(\mathbf{r})$.

4) $T^{\frown}(\lambda)$ u_0-положителен, если $Im\lambda=0=Imh$, $\lambda \in \pi^+_{a_s}$, а остальные функции, входящие в оператор $\hat{U}$, строго положительны.

5) $\hat{T}(t,\hat{U})$ имеет ведущее собственное значение, если выполнены предположения п.4 и $\exists \breve{V} \subseteq V: \ mes\breve{V} > 0 \ \ \forall \vec{r} \in \breve{V} \ \ \lambda_1(\vec{r}) = \max_j \lambda_j(\vec{r})$. 6) $\mu(\hat{T}(t,\hat{U})) = exp[t\,\mu(\hat{U})]$, если $h \in \mathcal{K}$.

4.2. Полученные результаты, однако, недостаточны для решения вопроса о существовании ведущего собственного значения у эволюционных операторов $\hat{U}$ с коэффициентами, зависящими от температуры. Рассмотрим эволюционное уравнение $\vec{\varphi}'_t = \hat{U}(T)\vec{\varphi}$, имеющее стационарное решение $\hat{U}^*\vec{\varphi}^* = 0$, где $\hat{U}^* = \hat{U}(T^*)$. Линеаризуем зависимость оператора $\hat{U}$ от T, переходя к системе в отклонениях: $\delta\varphi = \vec{\varphi} - \vec{\varphi}^*$, $\delta T = T - T^*$. Для описания поведения величины δT используем уравнение "инерционного звена", $\delta T'_t = \hat{K}^*_T \delta\vec{\varphi} - \lambda_T(\vec{r})\delta T$ [79]. В результате получаем систему в отклонениях:

$$\dot{\mathbf{\Psi}} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \delta\vec{\varphi} \\ \delta T \end{bmatrix} = \hat{V}\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{U}^* & \hat{U}'^*_T \vec{\varphi}^* \hat{I} \\ \hat{K}^*_T & -\lambda_T(\vec{r})\hat{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\vec{\varphi} \\ \delta T \end{bmatrix} \tag{12}$$

К матричному оператору $\hat{V}$ из (12) нельзя применять методы теории положительных операторов, поскольку элемент $\hat{V}_{12} = \hat{U}'^*_T \vec{\varphi}^*$ представляет собой вектор со знаконеопределенными координатами. Поэтому для доказательства существования у оператора $\hat{V}$ ведущего собственного значения применим теорию возмущений ([3], гл.VII, § 6). Рассмотрим операторы $\mu\hat{S}$: $\hat{S}_{12} = \hat{U}'^*_T \vec{\varphi}^* \hat{I}$, $\hat{S}_{ij} = \hat{0}$ и $\hat{P}$: $\hat{P}_{11} = \hat{U}^*$, $\hat{P}_{12} = \hat{0}$, $\hat{P}_{21} = \hat{K}^*_T$, $\hat{P}_{22} = \lambda_T(\vec{r})\hat{I}$. Оператор $\hat{P}$, очевидно, имеет ведущее собственное значение – нулевое – то же, что и у оператора $\hat{U}^*$. $\hat{V} = \hat{P} + \mu\hat{S}$; поэтому, при достаточно малых $|\mu|$ оператор $\hat{V}$ также имеет ведущее собственное значение.

Итак, результаты спектрального анализа операторов $-\hat{L}$ и $\hat{\Lambda}$ в условиях (0), полученные в работе [2] и §§ 1-2, позволили применить к анализу спектров операторов $\hat{U}$ и $\hat{T}(t,\hat{U})$ все методы, развитие в [1] гл.7, и получить полную спектральную картину в условиях (11).

В задачах с учетом запаздывающих нейтронов и зависимости сечений от температуры в виде "инерционного звена" это дает следующие результаты.

1) Обоснованы результаты спектрального анализа операторов $\hat{\Lambda}$ и $\hat{U}$ в том случае, когда их коэффициенты зависят от температуры.

2) Доказано существование ведущего собственного значения для системы (12) в отклонениях $(\delta\vec{\varphi}, \delta T)$, если $\hat{U}'^*_T \vec{\varphi}^*$ достаточно мало по норме в $X_\infty = \prod_{j=0}^n (L^\infty_D)_j$ [17].

§ 4. Сводка результатов, их обсуждение и обобщение

I. Подытожим результаты спектрального анализа операторов $\hat{U}$, $\hat{T}(t)$, $\hat{A}(\lambda)$, $\hat{A}(\lambda)$ и $\hat{B}_n(\lambda)$.

1. $\tilde{B}_1(\lambda) \in WQ(L_D^p)$ при $p \in [1,\infty]$, а, следовательно, $J \setminus \{0\} = \mu(\tilde{A}(\lambda)) = \mu(\hat{A}(\lambda))$. Здесь $\lambda \in \pi_{a_s}^+$, $\hat{B}_1(\lambda) \in Q(L_D^p)$, $p \in (1,\infty)$.

2. Все точки $\lambda_i \neq 0$ из спектра операторов $\tilde{A}(\lambda)$ и $\hat{A}(\lambda)$ инвариантны по индексу p пространств L_D^p, а их собственные и присоединенные элементы лежат в L_D^∞.

3. $\exists N : \forall n > N \forall \lambda \in \pi_{a_s}^+ \ \tilde{A}^n(\lambda), \tilde{B}_n(\lambda) \in Q(L_D^{\infty +} \to L_D^\infty)$.

4. Если $0 < k_0(k)$ и $Im\,h = 0$, то при $\beta > -a_s$ операторы $\hat{A}(\beta)$ являются $\chi(D)$-положительными, а следовательно, они и операторы $\tilde{A}(\beta)$ имеют ведущее собственное значение. Здесь и далее $a_s = a_s(h)$.

5. Полуплоскость $\bar{\pi}_{a_s}^- \subseteq \sigma(\tilde{A})$; полуплоскость $\pi_{a_s}^+ = \mu(\tilde{A})$; таким образом, для точек спектра $\lambda_i \in \pi_{a_s}^+$ справедливы выводы теории Рисса-Шаудера.

6. Если функция $h \in \mathcal{K}$ (см. [2]), то для спектров полугрупп $\tilde{T}(t)$ справедливо соотношение $exp\{t\sigma(\tilde{A})\} = \sigma(\hat{T}(t,\tilde{A}))$. Существенные спектры полугрупп $\hat{T}(t,-\tilde{L}_0)$ и $\hat{T}(t,-\tilde{A})$ совпадают всегда.

7. Спектры операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{T}(t)$ инвариантны по индексу p пространств L_D^p, а их собственные и присоединенные функции, соответствующие спектральным точкам из $\pi_{a_s}^+$, лежат в L_D^∞.

8. Если $\mu(\tilde{A}) \neq \rho(\tilde{A})$ и $0 < k_0(k)$, и $Imh = 0$, то как у $\tilde{A}$, так и у $\tilde{T}(t)$ есть ведущее собственное значение, поскольку полугруппы $\tilde{T}(t)$ являются $\tilde{u}_0$-положительными операторами.

9. Полугруппы $\tilde{T}(t)$ представимы как в виде

$$\hat{T}(t,\tilde{A}) = \hat{T}(t,-\tilde{L}_0) + \tilde{Q}(t), \tag{13}$$

где $\tilde{Q}(t) \in WQ(L_D^p)$ и $\tilde{Q}(t) \in Q(L_D^p)$ при $p \in (1,\infty)$, так и в виде $\hat{T}(t,\tilde{A}) = \hat{T}_{(\delta)}(t,\tilde{A}) + \hat{T}_{(0)}(t,\tilde{A})$, где $r_\sigma(\tilde{T}_{(0)}(t)) = r_\sigma(\tilde{T}(t))$, $\tilde{T}_{(0)}(t) \in Q(L_D^p)$, а $\omega_0(\tilde{T}_{(\delta)}(t)) \leq \delta + \omega_0(\hat{T}(t,\tilde{L}_0))$, то есть они являются квазикомпактными операторами.

10. Для точек спектра $\tilde{A}$ из $\pi_{a_s}^+$ в случае счетного их множества из стремления $|\lambda_i| \to \infty,\ i \to \infty$ следует, что $\mathrm{Re}\lambda_i \to a_s$.

11. Нормы операторов критичности $\tilde{A}(\beta)$ и $\hat{A}(\beta)$ в случае их положительности в пространствах L_D^1, L_D^∞ и L_D^2 вычисляются по формулам (6) и (8), с помощью которой легко получить нижнюю оценку норм резольвент $\tilde{l}(\lambda)$ при $Im(h+\lambda)=0$: $\|\tilde{l}(\lambda)\|_2 \geq s_M(\hat{A}^*(\lambda)) / \|\hat{K}^*\|_2$, где $\hat{A}^*(\lambda) = \hat{l}(\lambda)\hat{K}^*$, $K^*(\vec{r},\vec{\upsilon}' \to \vec{\upsilon}) \equiv 1$. Ядро оператора $\hat{A}'^*(\lambda)\hat{A}^*(\lambda)$ определяется формулой (7), и его ведущее собственное число s_M^2 эффективно задаётся через (8); $\|\hat{K}^*\|_2 = 4\pi/3$.

II. Результаты п.п.1,2,4-8,10 обобщают известные ранее в том случае, когда коэффициенты оператора $\hat{\Lambda}$ удовлетворяют требованиям «газовой модели» вещества; результаты п.п.3, 9 (формула (13)) и 11 – новые.

Повторяя рассуждения теорем данной работы и работы [2], получаем, что при соблюдении условия (0) на функции h и k, но для интервала скоростей $0 < v_{min} \le v \le 1$, спектры операторов $\tilde{A}_p(\lambda)$ и $\tilde{\mathcal{A}}_p(\lambda)$ не претерпевают качественных изменений (данные операторы u_0-положительны при $Im(h + \lambda) = 0 < k_0$ и компактны в $L^p_{D_{E,1}}$ при $p \in (1,\infty)$; $\forall E > 0$; $\lambda \in \pi^+_{a_s}$ а спектры операторов $-\widehat{L}$, $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{U}$ и $\widehat{T}(t)$ изменяются следующим образом.

1) $\sigma(-\widehat{L}) = \{\lambda_\infty\} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}$ оператор $\widehat{l}(\lambda)$ – квазинильпотентен.

2) $\mu(\widehat{\Lambda}) = \varnothing$, $\sigma_e(\widehat{\Lambda}) = \{\lambda_\infty\}$.

3) $\sigma_e(\widehat{U}) = \left(\bigcup_j Z(\lambda_j(\vec{r}))\right) \cup \sigma_e(\widehat{\Lambda})$.

4) $\sigma(\widehat{T}(t)) = P\sigma(\widehat{T}(t)) \cup \sigma_e(\widehat{T}(t))$, а $P\sigma(\widehat{T}(t))$ получается из точечного спектра оператора, производящего полугруппу при экспоненциальном преобразовании. $\widehat{T}(t, -\widehat{L})$ нильпотентна при $t > d/v_m$, а $\widehat{T}(t, \widehat{\Lambda})$ компактна при данных t в $L^p_{D_{E,1}}$, при $p \in (1,\infty)$; $\forall E > 0$.

5) При любых размерах тела V: $d = diam(V) < \infty$ $\rho(\widehat{\Lambda}) \ne \mu(\widehat{\Lambda})$. Это означает, что $\forall E > 0$ гипотеза Нелкина в форме, приведенной в [10] (формула (1)), не справедлива.

6) $\mathcal{K} \mid L^\infty_{D_{E,1}} = L^\infty_{D_{E,1}}$ $\forall E > 0$

Исходя из того, что одновременно с полугруппой $\widehat{T}_0(t)$ нильпотентны и все полугруппы $\widehat{T}_n(t)$, но при $t > (n + 1)d/v_m$, соответственно, получаем, что при данных t справедлива формула: $\int_0^t \widehat{T}_n(\tau) K \widehat{T}(t-\tau) d\tau = \widehat{T}(t)$, из которой, ввиду формулы 13.2.6 монографии [12], следует оценка для величины β_0 – ведущего собственного числа нестационарной задачи: $\beta_0 \le \{1 + ln[d^*||K||/v_m]\}d/v_m - a$, поскольку она справедлива для $\omega_0(\widehat{T}(t, \widehat{\Lambda})) \ge \beta_0$.

Полугруппа $\widehat{T}(t)$ при $v_m > 0$ представляет собой интересный пример оператора, являющегося пределом последовательном нильпотентных операторов $\sum_0^N \widehat{T}_n(t)$ (по равномерной норме), но имеющего точки спектра, отличные от 0, так как $P\sigma(\widehat{\Lambda}) \ne \varnothing$ ибо $1 \in P\sigma(\widehat{T}(t))$, например, в случае наличия нетривиального решения n_0 у квазикритической задачи $\widehat{L}n = \widehat{K}n$.

III. Рассмотрим вариант применения метода добавочного поглощения при спектральном анализе операторов $\widehat{\Lambda}$ с симметризуемым оператором $\widehat{K}$. Известно, что перенос нейтронов с энергией меньшей $0,5МэВ$ в неразмножающих средах подчиняется принципу детального равновесия, который записывается (в терминах дифференциальных сечений) следующим образом: $\sigma_{s,l}(E' \to E, \boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega})/F(E) = \sigma_{s,l}(E \to E', \boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{\Omega}')/F(E')$ ([1], с.29), где $F(E) = E/e^{-E}$, если для E выбрана безразмерная шкала. В этом и аналогичных случаях, замена $n = M(v)N$, приводит уравнение Больцмана с оператором $\widehat{\Lambda}$ к виду $\dot{N} = -\widehat{L}N + \widehat{K}_s N$ с самосопряжённым оператором $\widehat{K}_s = M^{-1}(v)\,\widehat{K}\,M(v)$ ($M(v)$ – аналог $F(E)$). Такой вывод, однако, справедлив лишь в случае $M \ne M(\mathbf{r})$. Иначе в это уравнение войдет ещё одно слагаемое $-((\mathbf{v}, \nabla_{\vec{r}} M)/M)N$ или, что эквивалентно, полное сечение Σ_t заменяется на величину $(\Sigma_t + (\boldsymbol{\Omega}, \nabla_{\vec{r}} M)/M)$. Подобные эффекты следует учитывать, например, при симметризации оператора $\widehat{K}$, описывающего процесс генерации частиц в неравномерно нагретом или неоднородном теле. В этом случае нельзя также применять как и выше безразмерную шкалу энергии, так как в показатель экспоненты входят как A_l – атомная масса, так и $T = T(\mathbf{r})$, и при симметризации ядра оператора $\widehat{K}$ с помощью функции максвелловского распределения в полном сечении следует делать поправку на величину $-(\boldsymbol{\Omega}, \nabla_{\vec{r}}\, T)/T^2$, даже если рассматривается процесс переноса нейтронов в однородном, но неравномерно нагретом теле.

IV. Отметим, что исследование спектральных свойств оператора $\widehat{\Lambda}$ с помощью оператора $\hat{A}(\lambda)$, $\lambda \in \pi^{+}_{a_s}$ на основании леммы Альбертони-Монтаньини, не может быть непосредственно применено к анализу свойств сплошного спектра оператора $\widehat{\Lambda}$. Легко показать, что для достаточно больших n, интегральный оператор с ядром $A_n(\lambda, x'\to x)$ не может иметь собственных функций при $\lambda \in \pi^{-}_{a_s}$, поскольку в этом случае его ядро $A_n(\lambda, x'\to x)$ почти при всех (x',x) бесконечно. Но отсюда не следует неразрешимость уравнения $\varphi = \hat{A}(\lambda)\varphi$ при $\lambda \in \pi^{-}_{a_s}$ а, следовательно, и отсутствие собственных чисел в левой полуплоскости у оператора $\widehat{\Lambda}$. Дело в том, что для доказательства того, что $\hat{A}^n(\lambda)$ – есть интегральные операторы (для нахождения их ядер) при $n > 1$ требуется поменять порядок интегрирования. Операция эта производится на основании теоремы Фубини, которая как раз и оказывается справедливой только по отношению к интегралам $\hat{A}^n(\lambda)F$ при $\lambda \in \pi^{+}_{a_s}$.

V. Доказательство того, что оператор $\widehat{\Lambda}$ имеет ведущее собственное значение, если не пуст его точечный спектр в $\pi^{+}_{a_s}$, основанное на том, что полугруппа $\widehat{T}(t,\widehat{\Lambda}_\infty)$ является u_0-положительным оператором при достаточно больших t, нуждается в следующем дополнении. Полугруппа $\widehat{T}(t,\widehat{\Lambda}_\infty)$ не является (C_0)-полугруппой, поэтому, следовало бы доказывать u_0-положительность полугруппы $\widehat{T}(t,\widehat{\Lambda}_1')$ и отсюда уже делать вывод о наличии у операторов $\widehat{\Lambda}_1'$ и $\widehat{\Lambda}_p$ при $p \in [1,\infty]$ ведущего собственного значения.

Можно, однако, обойтись и u_0-положительностью полугруппы $\widehat{T}(t,\widehat{\Lambda}_\infty)$. В самом деле, отсюда с учетом результатов §§ 1-2 об инвариантности спектра операторов $\widehat{\Lambda}_p$ следует, что ведущего собственного значения может не быть разве лишь у оператора $\widehat{\Lambda}_1'$. Но поскольку все собственные и присоединенные функции f_n, отвечающие собственным значениям операторов $\tilde{\Lambda}_p$ из $\pi^{+}_{a_s}$, лежат в $\mathcal{R}^{\infty}_D \subset L^{\infty}_D$, $(f_n \in D(\widehat{\Lambda}_\infty))$, а сами $\mathcal{R}^{\infty}_D$ включаются в $D(\tilde{\Lambda}_1')$, то ведущее собственное значение β_0 оператора $\widehat{\Lambda}_\infty$ может не быть таковым для оператора $\widehat{\Lambda}_1'$ только за счет появления у последнего дополнительных собственных (или присоединенных) функций из $D(\widehat{\Lambda}_1')$, отвечающих тому же самому значению β_0. Но это невозможно, так как $D(\widehat{\Lambda}_1') \subset L^{\infty}_D$, то есть для выделения ведущего собственного значения у газокинетического оператора достаточно доказать u_0-положительность его полугруппы в L^{∞}_D.

VI. В реальных средах, обычно состоящих из большого числа зон, заполненных различными веществами, нагретыми неравномерно, возможны аномалии в скорости взаимодействия нейтронов со средой, связанные как с макроскопическими (плотностными, температурными) эффектами, так и с микроскопическими – отличиями от закона $1/\upsilon$ в полном эффективном нейтронном сечении некоторых нуклидов. Включение в рассмотрение произвольных функций $h \in L^{\infty}_D$, а не использование только кусочно-непрерывных их, позволяет получать устойчивые результаты спектрального анализа операторов $\widehat{\Lambda}$ и $\widehat{A}$ по отношению к уточнениям математических моделей неоднородных объектов, в которых происходит перенос нейтронов.

1) Исследование задач переноса нейтронов в условиях (0) позволяет автоматически включать в рассмотрение при спектральном анализе соответствующих операторов два следующих случая. Первый из них связан с тем, что макроскопические сечения $\sum(\vec{r},E)$ могут

оказаться непредставимыми конечными суммами вида $\sum_j N_j(\vec{r})\sigma_j(E)$ (невырожденными). Подобная форма записи величины $\sum(\vec{r},E)$ предполагает выполнение принципа аддитивности для сечений σ_j, что справедливо для модели тяжелого газа, но, из-за проявления различий в эффектах взаимодействия нейтронов с ядрами атомов, включенных в молекулу или в кристаллическую решетку по сравнению со свободными [21], может оказаться неприменимым для жидкостей и твердых тел. Спектральный анализ задач с вырожденными коэффициентами дает важные результаты при рассмотрении переноса нейтронов с помощью *газовой модели* вещества, хотя в реальных газах также обнаруживаются аномалии (по давлению) в поведении полных сечений взаимодействия нейтронов с ядрами атомов их молекул [22]. Второй случай – это перенос нейтронов в неравномерно нагретых телах. Даже если среда, заполняющая тело, однородна $N(\vec{r}) = const$, например, в силу эффекта доплеровского уширения в полном микросечении возникает зависимость от $\vec{r}$: $\sigma_t = \sigma_t(T(\vec{r}),E) = \sigma_t(\vec{r},E)$, которая может быть описана вырожденными функциями только приближенно ([23], с.60).

2) В условиях (11) на коэффициенты оператора запаздывания $\widehat{M}$ учтена возможность зависимости $\lambda = \lambda(\vec{r})$ и появления полярных особенностей φ в ядрах операторов генерации предшественников запаздывающих частиц. При анализе переноса нейтронов это позволяет проводить математически корректный учет запаздывающих нейтронов, появляющихся не в результате процессов деления (например, в реакциях скалывания в меди и в неодиме). Предшественниками их могут быть также Li^9, N^{17}, Tl^{210} (см. работу [24], с.124). В этом плане был бы весьма интересен анализ динамики нейтронного поля с учетом **<u>всех</u>** (внутренних) каналов появления в рассматриваемом теле нейтронов, но такое исследование выходит за рамки настоящей работы, поскольку, например, для учета запаздывающих фотонейтронов в исходное газокинетическое уравнение потребуется ввести оператор $\widehat{P}$ вида[7] $\int_V\int_W K_\gamma(t,(\vec{r}',\vec{\upsilon}') \to (\vec{r},\vec{\upsilon})) \bullet d\vec{\upsilon}'d\vec{r}'$. А учет нейтронов, появляющихся в реакциях с заряженными частицами (например, в реакциях $Pu^{238} \to U^{234} + \alpha$; $O^{16} + \alpha \to Ne^{19} + n$), требует анализа уравнения для поля этих частиц, аналогично исходному уравнению для нейтронов, но с учетом потерь их энергии при взаимодействии с электронами вещества в теле V (подробнее см., например, [25]).

Использование в условиях (11) функций $R(\vec{r},\vec{\upsilon}' \to \vec{\upsilon})$ с неразделёнными в общем случае переменными $\vec{\upsilon}'$ и $\vec{\upsilon}$ является уточнением математической модели поля запаздывающих нейтронов в следующем плане. Шестигрупповое приближение, обычно используемое в практике нейтронных расчетов, предполагает, что предшественники C_K (дающие нейтроны с различными спектрами $f_K(E)$), получающиеся при β-распаде с близкими константами $\lambda_K \approx \bar{\lambda}$, объединяются в одну группу, описываемую уравнением $\frac{\partial R}{\partial t} = \int_W d\vec{\upsilon}'n(\vec{\upsilon}')K_R(\vec{r},\upsilon' \to \upsilon) - \bar{\lambda}R$. Здесь $R = \sum_K f_K C_K$, $K_R = \sum_K \beta_K \upsilon_f \sum_f f_K$. Таким образом, представить ядро оператора генерации предшественников $\widehat{R}$ в виде $\bar{\chi}(\upsilon)q(\vec{r},\upsilon')$, строго говоря, невозможно.

С другой стороны, детальное рассмотрение запаздывающих нейтронов от индивидуальных предшественников затруднительно, так как трудно связать получающиеся в процессе деления нуклиды с конкретными группами запаздывающих нейтронов [24], а в большинстве практически интересных случаях малыми различиями в λ_K можно пренебречь, так что задача описания запаздывающих нейтронов от индивидуальных предшественников представляет пока только теоретический интерес. При её решении следует также учитывать, "что

---

[7] **Данная форма записи оператора $\widehat{P}$ не учитывает конечности скорости распространения γ-квантов, то есть предполагает, что размеры тела V достаточно малы: $d < 3$ м, то есть $d/c < 1/a_0(h)$, $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.**

число возможных предшественников велико (более 50)" [24]. Поэтому в целях унификации рассмотрения подобных процессов желательно уметь анализировать операторы $\widehat{\Lambda}$ и $\widehat{M}$ с коэффициентами общего вида, а не только с вырожденными (у которых разделяются переменные).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. М.: Атомиздат, 1973.
2. Келлин Н.С. Спектральные свойства оператора переноса частиц и его плугруппы. В сб. тр. XII международной научной конференции, Москва, 22-23 апреля 2011 "Цивилизация знаний: проблема человека в науке XXI века", М.: РосНОУ, т. 2, 2011, сс. 57-87.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: "Наука", 1977.
5. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: "Наука", 1966.
6. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, Тр. МИАН СССР им. В.А.Стеклова, 1961, т.61.
7. Гермогенова Т.А. Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса, Препринт ИПМ АН СССР, М., 1967.
8. Dodds P.G., Fremlin D.H. Compact Operators in Banach Lattices. – Isr. J. Math., 1979, v.34, №4, p.287-320.
9. Aliprantis C.D., Burkinshaw O. Positive Compact Operators on Banach Lattices. – Math. Z., 1980, v.174, №3, p.289-298.
10. Келлин Н.С. Гипотеза Нелкина и гипотеза Корнголда в модели переноса Владимирова. В сб. тр. XI международной научной конференции, Москва, 23-24 апреля 2010 "Цивилизация знаний: проблемы модернизации России", М.: РосНОУ, т. 2, 2010, сс.25-40.
11. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.
12. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: "Мир", 1972.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: "Мир", 1972.
14. Шкурпелов А.А., Веселов В.П. Исследование влияния свойств оператора столкновений на спектральные характеристики краевой задачи для уравнения переноса нейтронов. Отчет НПО "Энергия" по теме №76086489. Гос.рег.№ Б-540222, М., 1976.
15. Montagnini B. The Eigenvalue Spectrum of the Linear Boltzmann Operator in $L^1(R^6)$ and $L^2(R^6)$. – Meccanica, 1979, v.14, №3, p.134-144.
16. Горбунов В.П., Шихов С.Б. Нелинейная динамика ядерных реакторов. (Анализ методами Ляпунова А.М.). М.: Атомиздат, 1975.
17. Келлин Н.С. К вопросу об определении асимптотической устойчивости решений возмущенного уравнения Больцмана, – В сб.: Физика тепловых и быстрых ядерных реакторов, М.: Энергоиздат, 1983, с.82-85.
18. Забрейко П.П., Красносельский М.А., Покорный Ю.В. Об одном классе линейных положительных операторов. Функц.анализ и его прил., 1971, т.5, №4, с.9-17.
19. Красносельский М.А., Соболев А.В. Спектральный зазор фокусирующего оператора. Функц.анализ и его прил., 1983, т.17, №1, с.73-74.
20. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А. Острые линейные операторы. Функц.анализ и его прил., 1984, т.18, №3, с.82-84.
21. Hughes D.J., Schwartz R.B. Neutron Cross Section. Sec. Ed., 1.07.1958, BNL UPTON New York, Associated Univ. Inc. under contract with the US AEC.
22. Житарев В.В., Степанов С.Б. Влияние давления в парах легкой воды и бензола на полное сечение взаимодействия для холодных нейтронов. "Атомная энергия", 1977, т.42, №1, с.53-55.
23. Лукьянов А.А. Структура нейтронных сечений. М.: Атомиздат, 1978.
24. Кипин Дж.Р. Физические основы кинетики ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1967.
25. Hoffman T.G. and Others. Charged Particle Calculations Using Boltzmann Transport Methods. – Proc.Int.Top.Meet.Adv.Math.Mech. Munchen, Apr.,22-29, 1981, v.2, Karlsruhe, s.a., p.447-461.