



Чеванин В.С.

Численное моделирование
задач турбулентного
перемешивания на основе
квазимонотонной схемы
повышенного порядка
точности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Чеванин В.С. Численное моделирование задач турбулентного перемешивания на основе квазимонотонной схемы повышенного порядка точности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 32. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-32>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

В.С. Чеванин

**Численное моделирование задач
турбулентного перемешивания на
основе квазимонотонной схемы
повышенного порядка точности**

Москва — 2011

Чеванин В.С.

Численное моделирование задач турбулентного перемешивания на основе квазимонотонной схемы повышенного порядка точности

В данной работе предложен вариант разностной схемы повышенного порядка точности для моделирования развития гидродинамических неустойчивостей. На основе предложенной схемы был построен эффективный параллельный расчетный алгоритм, использующий гибридный интерфейс MPI+OpenMP. С использованием этого алгоритма были произведены расчеты задач развития неустойчивостей Рихтмайера-Мешкова и Рэля-Тейлора.

Ключевые слова: гидродинамическая неустойчивость, схема повышенного порядка точности, параллельное программирование, MPI, OpenMP, неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, неустойчивость Рэля-Тейлора

Valeriy Sergeevich Chevanin

Numerical simulation of turbulent mixing problems on basis of high order accuracy quasimonotone scheme

Variant of high order accuracy difference scheme for hydrodynamic instability modelling is proposed in this paper. Efficient parallel calculation algorithm, using hybrid MPI+OpenMP, is built on basis of proposed scheme. With this algorithm calculations of Richtmyer-Meshkov and Rayleigh-Taylor instabilities were made .

Key words: hydrodynamic instability, high order accuracy scheme, parallel programming, MPI, OpenMP, Richtmyer-Meshkov instabilty, Rayleigh-Taylor instabilty

Оглавление

Введение	3
Метод повышенного порядка точности	3
Сравнение разработанного метода с существующими.....	7
Параллельный численный алгоритм	12
Моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова	18
Моделирование развития неустойчивости Рэля-Тэйлора	22
Список литературы	25

Введение

Современные требования к качеству математического моделирования задач гидродинамики делают необходимыми разработку и внедрение новых численных методов повышенного порядка точности.

Одновременно с этим зачастую необходимо проводить расчеты на достаточно больших пространственных и временных интервалах, что в свою очередь приводит к большим затратам вычислительных ресурсов.

Все вышесказанное свидетельствует о необходимости создания эффективных параллельных алгоритмов, основанных на методах повышенного порядка точности.

Также следует отметить, что в последнее время появились новые типы архитектур процессоров, входящих в многопроцессорные системы (например, многоядерные процессоры), что также вносит свои требования в разработку параллельных расчетных алгоритмов.

Данная работа посвящена разработке метода повышенного порядка точности, эффективного трехмерного параллельного алгоритма с использованием гибридного интерфейса межпроцессорных обменов MPI+OpenMP, исследованию эффективности построенного алгоритма (в том числе на современных многоядерных процессорах) и расчету двух задач, моделирующих турбулентное перемешивание газов (развитие неустойчивостей Рихтмайера-Мешкова и Рэля-Тейлора).

Метод повышенного порядка точности

Первыми численными методами для решения задач гидродинамики с ударными волнами были методы первого порядка. Среди таких методов можно отметить метод на основе решения задачи о распаде произвольного разрыва, предложенный С.К. Годуновым. Однако из-за своих диссипативных свойств методы первого порядка оказались неэффективны в силу необходимости использования большого количества расчетных ячеек, поэтому дальнейшее развитие в этой области было направлено на повышение порядка аппроксимации.

Однако, согласно теореме Годунова, в линейном случае невозможно обеспечить монотонность в разностных схемах выше первого порядка точности.

Одним из способов решения этой проблемы является применение нелинейных разностных схем (первый порядок вблизи разрывов, более высокий в гладких областях), например, TVD схем с «лимитером».

Среди таких схем можно отметить схемы типа MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws – монотонные противопоточно-центрированные схемы для законов сохранения) [1]. Схемы типа MUSCL появились в результате развития схемы Годунова, основанной на аппроксимации аргументов численных потоков в гиперболических законах

сохранения кусочно-линейными функциями. Необходимо отметить, что для достижения требуемой монотонности при построении схем типа MUSCL следует выбирать ограничение наклонов кусочно-линейных функций, в том числе основываясь на соблюдении условия TVD.

Дальнейшее развитие TVD-подхода привело к созданию популярных на данный момент схем ENO [2], которые способны обеспечить достаточную монотонность решения при произвольном порядке точности в областях гладкости.

Для повышения эффективности схем такого типа был разработан метод WENO [3-10], идея которого заключается в использовании не конкретного полинома над шаблоном, выбранным на основе анализа гладкости решения, а в использовании комбинации полиномов над всеми возможными для данной ячейки, взятых с весами, определяемыми на основе анализа гладкости решения.

Методы ENO и WENO завоевали популярность благодаря своей простоте и универсальности, о чем может свидетельствовать достаточно большое количество модификаций этих методов [3] [11].

Однако методы ENO и WENO не всегда способны обеспечить необходимую монотонность решения.

Для обеспечения достаточной монотонности в работе [12] был предложен метод повышенного порядка точности, основанный на повышении монотонности численного решения.

Идея описанного в работе [12] метода заключается в построении интерполяционного полинома таким образом, чтобы норма его отклонения от интегрального среднего внутри ячейки была минимальной. Такой подход способен обеспечить большую монотонность по сравнению с традиционными методами ENO и WENO соответствующего порядка.

Рассмотрим идею метода на примере численного решения одномерного закона сохранения

$$u_t(x, t) + f_x(u(x, t)) = 0. \quad (1)$$

После введения сетки $a = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = b$ и расчета

интегральных средних $\bar{u}_i(x_i, t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(\xi, t) d\xi$ по ячейкам $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ для этой

сетки (для простоты будем считать сетку равномерной), можно написать следующую разностную схему для уравнения (1):

$$\frac{d\bar{u}(x_i, t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} [f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))]. \quad (2)$$

Для построения эффективного численного алгоритма необходимо как можно более точно рассчитать численные значения потоков ($f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) \approx f_{i+\frac{1}{2}}^1$) на границах ячеек $f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t))$ и $f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))$.

Значения $f_{i+\frac{1}{2}}^1$ будем вычислять используя значения интегральных средних $\bar{u}(x_i, t)$ в расчетной ячейке и прилегающих к ней. Таким образом, значение $f_{i+\frac{1}{2}}^1$ можно искать в виде $f_{i+\frac{1}{2}}^1 = h(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+)$, причем для выполнения условий аппроксимации и монотонности расчетного алгоритма функция $h(a, b)$ должна удовлетворять условию $h(a, a) = f(a)$, являться неубывающей по первому аргументу и невозрастающей по второму, а также непрерывной по Липшицу по обоим аргументам. Среди наиболее часто используемых способов выбора потоковой функции, удовлетворяющей вышеописанным условиям, отметим поток Годунова и Лакса-Фридрикса.

Далее, необходимо с достаточной точностью определить значения $u_{i+\frac{1}{2}}^-$ и $u_{i+\frac{1}{2}}^+$. Для повышения точности в алгоритмах типа ENO и WENO [2] [13-14] $u_{i+\frac{1}{2}}^-$ и $u_{i+\frac{1}{2}}^+$ вычисляются с использованием интерполяционного полинома соответствующего порядка, а именно, в ячейке $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ строятся k интерполяционных полиномов k -ого порядка, используя шаблоны $(x_{i-k+1}, x_i), (x_{i-k+2}, x_{i+1}), \dots, (x_{i-1}, x_{i+k-2}), (x_i, x_{i+k-1})$.

В методе ENO из этих полиномов выбирается один, по принципу наибольшей локальной гладкости, а в методе WENO используется линейная комбинация этих полиномов с весами. В качестве значений $u_{i-\frac{1}{2}}^+$ и $u_{i+\frac{1}{2}}^-$ берутся значения этого выбранного полинома в точках $x_{i-\frac{1}{2}}$ и $x_{i+\frac{1}{2}}$ соответственно.

Следует отметить, что данный подход не всегда способен обеспечить достаточную точность численного решения. Для достижения большей точности будем искать нужный полином в виде выпуклой оболочки базисных полиномов $p_1(x), \dots, p_k(x)$:

$$p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \dots + (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{k-1}) p_k(x),$$

где $0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, \dots, k-1$ и $\sum_{i=1, k-1} \alpha_i \leq 1$.

Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ выберем из условия минимизации квадратичного отклонения $p(x)$ от постоянного значения \bar{u}_i :

$$\delta = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (p(x) - \bar{u}_i)^2 dx = \min.$$

Результаты расчетов, представленные в этой работе, были получены с использованием схем 3-го порядка точности ($k = 3$):

$$p_i(x) \equiv p(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + (1 - \alpha - \beta) p_3(x), \quad (3)$$

где $0 \leq \alpha, \beta \leq 1, 0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ – некоторые коэффициенты, подлежащие определению. В качестве базисных полиномов $p_{1,2,3}(x)$ были выбраны производные полиномов Ньютона.

Для искомого полинома $p_i(x)$ можно получить следующее выражение [12]:

$$p_i(x) = Ay_i^2 + By_i + C, \quad (4)$$

где $y_i = x - x_i$,

$$\begin{aligned} A &= \alpha A_1 + \beta A_2 + (1 - \alpha - \beta) A_3 \\ B &= \alpha B_1 + \beta B_2 + (1 - \alpha - \beta) B_3, \end{aligned} \quad (5)$$

$$C = \alpha C_1 + \beta C_2 + (1 - \alpha - \beta) C_3$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\bar{u}_{i-2} - 2\bar{u}_{i-1} + \bar{u}_i}{2\Delta x^2}, B_1 = \frac{\bar{u}_{i-2} - 4\bar{u}_{i-1} + 3\bar{u}_i}{2\Delta x}, C_1 = \bar{u}_i - \frac{\Delta x^2}{12} A_1 \\ A_2 &= \frac{\bar{u}_{i-1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}}{2\Delta x^2}, B_2 = \frac{\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_{i-1}}{2\Delta x}, C_2 = \bar{u}_i - \frac{\Delta x^2}{12} A_2 \\ A_3 &= \frac{\bar{u}_i - 2\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i+2}}{2\Delta x^2}, B_3 = \frac{4\bar{u}_{i+1} - 3\bar{u}_i - \bar{u}_{i+2}}{2\Delta x}, C_3 = \bar{u}_i - \frac{\Delta x^2}{12} A_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Для определения α и β будем использовать условие минимума

функционала $\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \{p_i(x) - \bar{u}_i\}^2 dx$:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \{p_i(x) - \bar{u}_i\}^2 dx &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p_i^2(x) dx - 2\bar{u}_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p_i(x) dx + \Delta x \bar{u}_i^{-2} = \\ &= C^2 \Delta x + \frac{2AC + B^2}{12} \Delta x^3 + \frac{A^2}{80} \Delta x^5 - \\ &- 2\bar{u}_i \left\{ C \Delta x + \frac{A}{12} \Delta x^3 \right\} + \\ &+ \Delta x \bar{u}_i^{-2} \end{aligned} \quad (7)$$

Окончательное условие минимума указанного выше функционала с учетом формул (5) и (6), а также равенства нулю производных $\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \{p_i(x) - \bar{u}_i\}^2 dx$ по

параметрам α и β можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \{p_i(x) - \bar{u}_i\}^2 dx \right) &= \frac{\Delta x^3}{2} \left\{ \alpha \left[\frac{1}{3} (B_1 - B_3)^2 + \frac{\Delta x^2}{45} (A_1 - A_3)^2 \right] + \right. \\ &+ \beta \left[\frac{1}{3} (B_1 - B_3)(B_2 - B_3) + \frac{\Delta x^2}{45} (A_1 - A_3)(A_2 - A_3) \right] + \frac{1}{3} B_3 (B_1 - B_3) + \frac{\Delta x^2}{45} A_3 (A_1 - A_3) \left. \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \{p_i(x) - \bar{u}_i\}^2 dx \right) &= \frac{\Delta x^3}{2} \left\{ \beta \left[\frac{1}{3} (B_2 - B_3)^2 + \frac{\Delta x^2}{45} (A_2 - A_3)^2 \right] + \right. \\ &+ \alpha \left[\frac{1}{3} (B_1 - B_3)(B_2 - B_3) + \frac{\Delta x^2}{45} (A_1 - A_3)(A_2 - A_3) \right] + \frac{1}{3} B_3 (B_2 - B_3) + \frac{\Delta x^2}{45} A_3 (A_2 - A_3) \left. \right\} = 0. \end{aligned}$$

В случае существования отличного от нуля детерминанта системы, искомые α_{\min} и β_{\min} находятся явно. Факт равенства нулю детерминанта системы означает линейную зависимость полиномов, входящих в выражение (3). В таком случае задача определения α_{\min} и β_{\min} разбивается на ряд более простых задач, подробно изложенных в работе [12]. Также в работе [12] подробно описан способ выбора α_{\min} и β_{\min} в случае несоблюдения условия $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ для полученных значений α и β .

Сравнение разработанного метода с существующими

С использованием описанного метода были проведены сравнительные тестовые одномерные расчеты задач ударной газовой динамики, в том числе – на движение ударной волны по неоднородному фону (задача Woodward-Colella blast waves” [9] [15]).

В качестве численной модели для расчета эволюции газодинамической системы была выбрана следующая система:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) + p u \right] &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где ρ, u, ε – безразмерные плотность, скорость и потенциальная энергия, $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ – давление, а γ – адиабатический показатель. В качестве граничных условий во всех рассмотренных ниже примерах были использованы условия

отражения. Для интегрирования по времени в нижеприведенных примерах использовалась TVD схема Рунге-Кутты третьего порядка.

Рассмотрим в качестве первого примера сравнительные расчеты задачи Римана (задаче о распаде разрыва) с использованием схем ENO-3, WENO-3 и изложенного выше метода третьего порядка (минимизации нормы в L_2):

$$\begin{aligned} \rho(t=0) &= \begin{cases} 2 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 & \text{при } 0.5 < x \leq 1 \end{cases} \\ u(t=0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1. \\ \varepsilon(t=0) &= \begin{cases} 3 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1.5 & \text{при } 0.5 < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Результаты расчетов в момент времени $t=0.2$ приведены на рисунках 1-3.

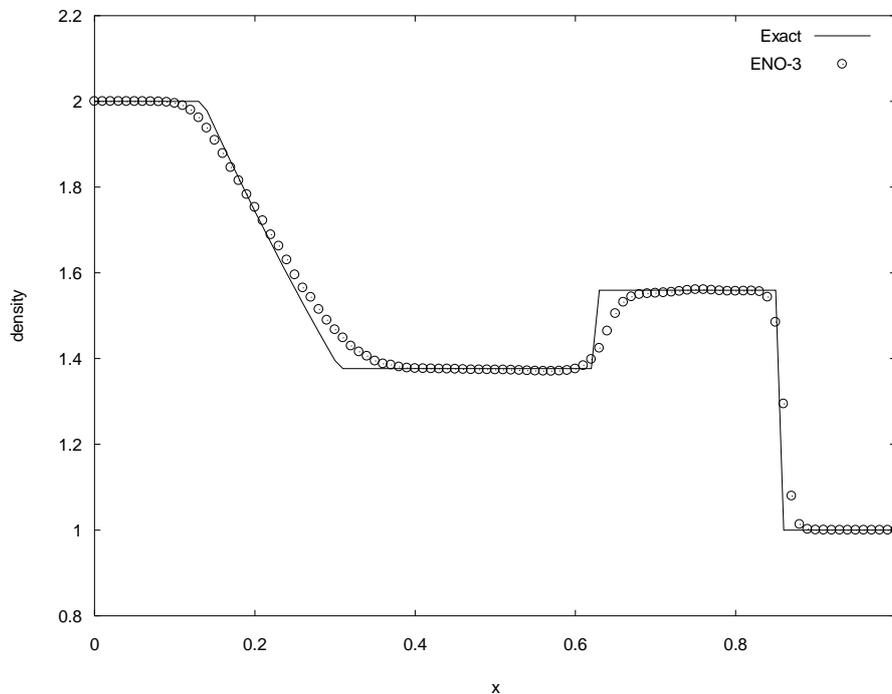


Рис. 1. Результат расчета распределения плотности с помощью метода ENO-3 в момент времени $t=0.2$

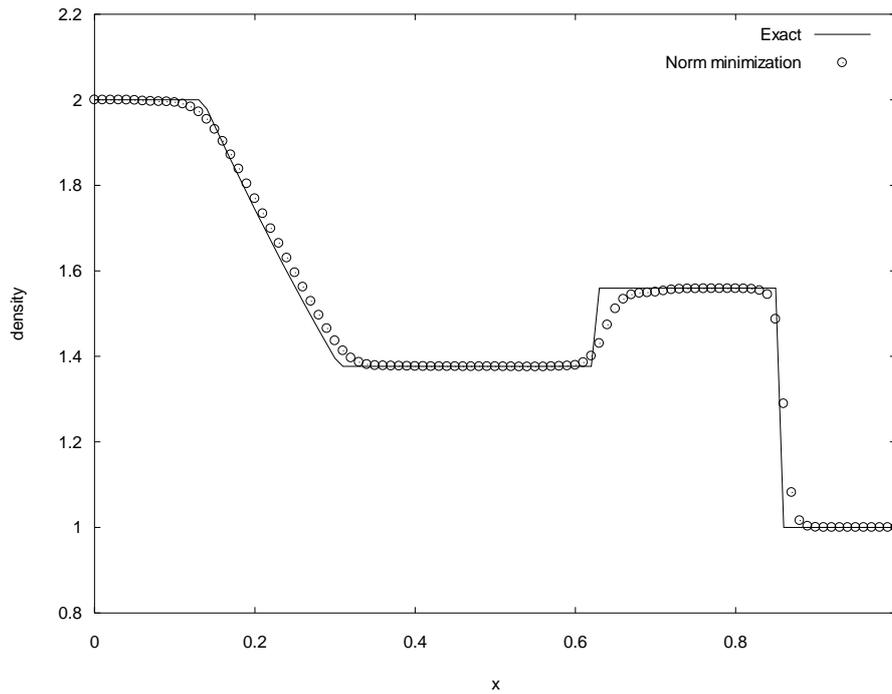


Рис. 2. Результат расчета распределения плотности с помощью метода WENO-3 в момент времени $t=0.2$

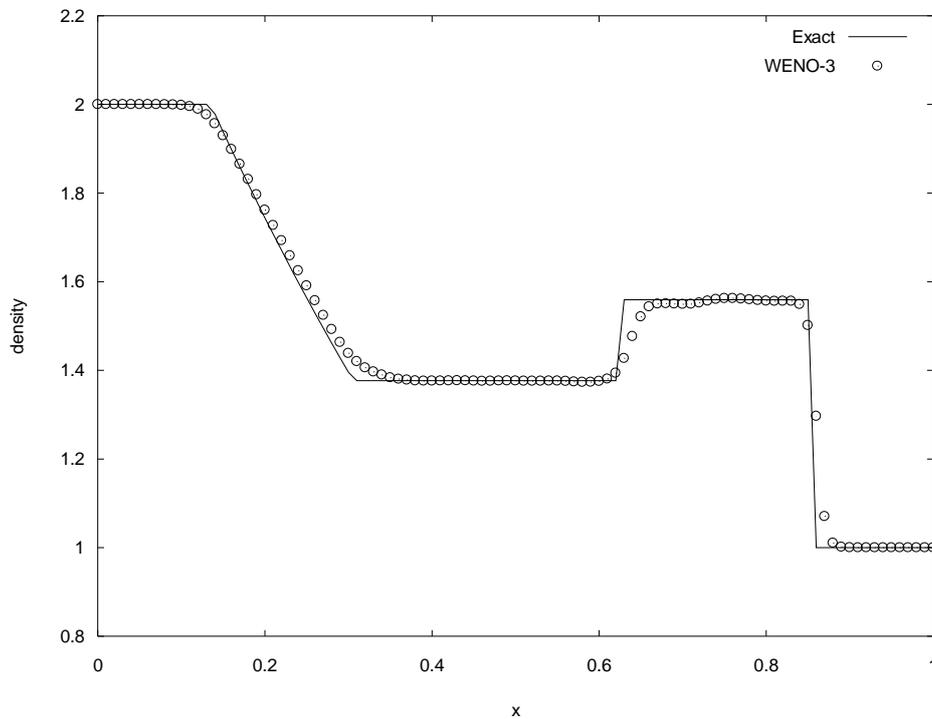


Рис. 3. Результат расчета распределения плотности с помощью метода минимизации нормы в L_2 в момент времени $t=0.2$

Приведенные выше графики свидетельствуют о сопоставимом порядке точности методов ENO-3, WENO-3 и минимизации нормы в L_2 , причем последний в некоторых случаях дает визуально более точный результат.

Точное решение для данной задачи было получено с помощью аналитического расчета задачи о распаде произвольного разрыва.

Приведем также сравнительные результаты расчетов для более интересной с физической точки зрения задачи - задачи “Woodward-Colella blast waves” [9] [15], полученные с помощью методов ENO-3, WENO-3 и минимизации нормы в L_2 . Данная задача представляет собой модель взаимодействия 2-х ударных волн и является одним из общепринятых тестов для проверки работоспособности численных методов решения задач газовой динамики.

Для задачи “blast waves” начальные условия для системы (9) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(t=0) &= 1 \\ u(t=0) &= 0 \end{aligned} \quad , \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (11)$$

$$\varepsilon(t=0) = \begin{cases} 1500 & \text{при } 0 \leq x \leq 0.1 \\ 0.015 & \text{при } 0.1 < x \leq 0.9 \\ 150 & \text{при } 0.9 < x \leq 1 \end{cases}$$

При этом численное моделирование производится на достаточно большом количестве пространственных ячеек (в нашем случае – на 1000).

На рисунках 4, 5 и 6 приведены соответствующие результаты расчетов плотности для методов ENO-3, WENO-3 и минимизации нормы в L_2 с использованием 1000 пространственных ячеек. В качестве формы записи потока на границах ячеек выбрана схема Роу разбиения потоков с фиксацией энтропии [15-16]. В качестве точного решения взят «эталонный» расчет, выполненный с помощью метода ENO-3 с использованием 4000 пространственных ячеек (сплошная линия на рисунках).

Приведенные на рисунках 4, 5 и 6 результаты показывают, что все 3 метода могут быть пригодны для расчета подобного класса задач, причем в данном случае наилучшие результаты показывают стандартный метод ENO-3 и метод минимизации нормы в L_2 . Также следует отметить, что решение, полученное с использованием метода минимизации нормы, является более монотонным, что вполне отражает основную идею метода.

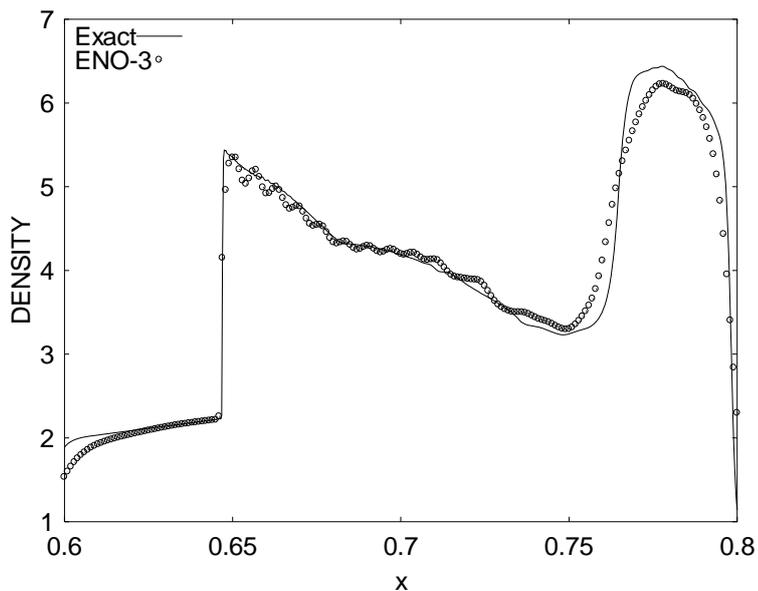


Рис. 4. Результат расчета распределения плотности с помощью метода ENO-3 в момент времени $t=0.038$ (1000 пространственных ячеек)

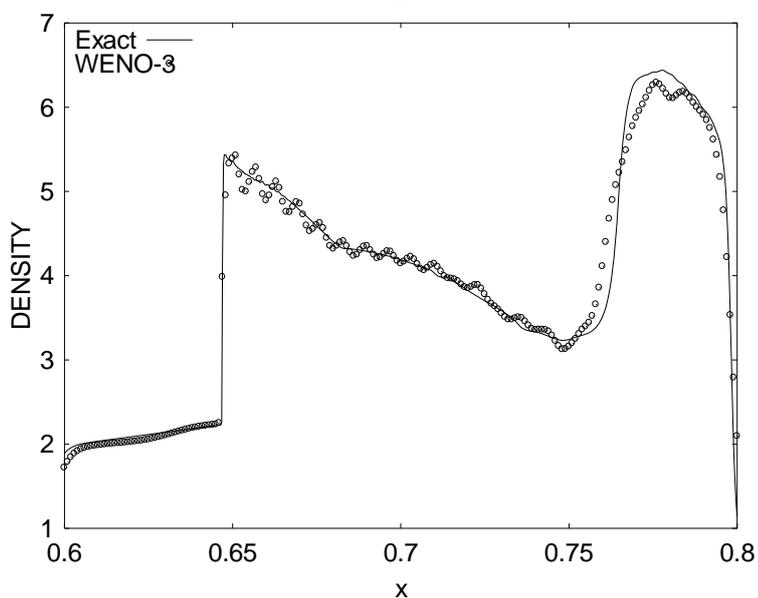


Рис. 5. Результат расчета распределения плотности с помощью метода WENO-3 в момент времени $t=0.038$ (1000 пространственных ячеек)

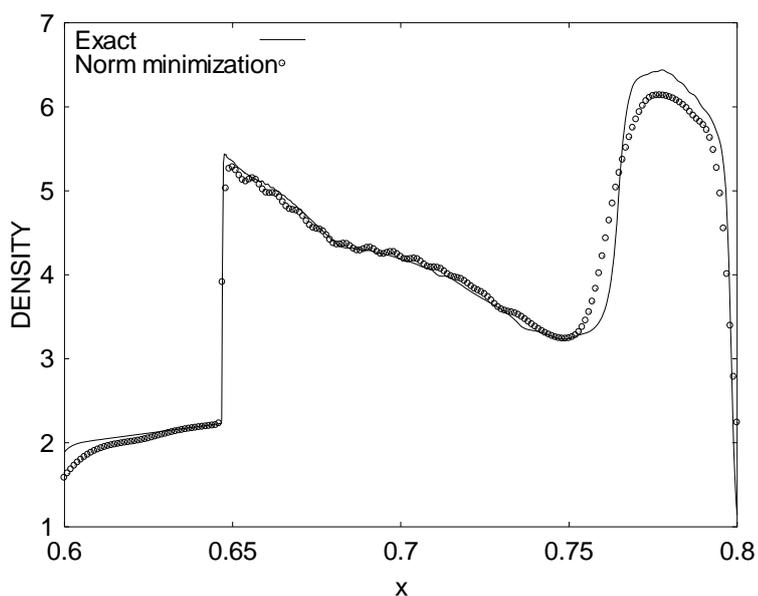


Рис. 6. Результат расчета распределения плотности с помощью метода минимизации нормы в L_2 в момент времени $t=0.038$ (1000 пространственных ячеек)

Параллельный численный алгоритм

Представленные выше одномерные тесты показали эффективность применения методов повышенного порядка точности при численном решении задач газовой динамики, содержащих разрывы. Таким образом, было предложено использовать эти методы для исследования более сложных задач – в частности, трехмерных задач турбулентного перемешивания.

Для полноценного использования представленного выше метода применительно к трехмерным разрывным задачам, необходимо построить трехмерный алгоритм, а также, в силу большого числа предполагаемых операций, целесообразно сделать алгоритм распараллеленным.

Рассмотрим более подробно трехмерную систему уравнений газовой динамики [17]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\
 \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} &= \vec{F}, \\
 \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}e) &= -\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + Q + (\vec{F} \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{W}, \\
 p &= p(\rho, T), \\
 \varepsilon &= \varepsilon(\rho, T),
 \end{aligned} \tag{12}$$

где ρ – плотность газа, p – давление газа, $\vec{v} = \{u, v, w\}$ – вектор скорости, ε – внутренняя энергия на единицу массы, $e = \rho \left(\varepsilon + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right)$ – полная энергия, $\vec{\Pi} = \rho \vec{v} \times \vec{v} + p \vec{I}$ – тензор плотности потока импульса (\vec{I} – единичный тензор), Q – мощность тепловых источников, \vec{F} – внешние силы, \vec{W} – вектор плотности теплового потока.

Предположим, что влиянием теплопроводности можно пренебречь, а в рассматриваемой области не существует тепловых источников и не действует объемная сила. Также предположим, что уравнение состояния будет соответствовать идеальному газу:

$$p = (\gamma - 1)\varepsilon\rho, \tag{13}$$

где γ – показатель адиабаты.

Учитывая вышеупомянутые предположения, систему уравнений (12) можно переписать в векторном виде:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_1(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_2(\vec{U})}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_3(\vec{U})}{\partial z} = 0, \tag{14}$$

где

$$\vec{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{Bmatrix}, \quad \vec{F}_1 = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(e+p) \end{Bmatrix}, \quad \vec{F}_2 = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(e+p) \end{Bmatrix}, \quad \vec{F}_3 = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(e+p) \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Системе (14) поставим в соответствие разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^n}{\Delta t} + \frac{H_{i+1/2,j,k}^{(1)} - H_{i-1/2,j,k}^{(1)}}{\Delta x} + \\ & + \frac{H_{i,j+1/2,k}^{(2)} - H_{i,j-1/2,k}^{(2)}}{\Delta y} + \frac{H_{i,j,k+1/2}^{(3)} - H_{i,j,k-1/2}^{(3)}}{\Delta z} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где $H_{i\pm 1/2,j,k}^{(1)}, H_{i,j\pm 1/2,k}^{(2)}, H_{i,j,k\pm 1/2}^{(3)}$ – численные потоки:

$$\begin{aligned} H_{i\pm 1/2,j,k}^{(1)} &= H^{(1)}(U_{i\pm 1/2,j,k}^-, U_{i\pm 1/2,j,k}^+), \quad H^{(1)}(U_{ijk}, U_{ijk}) = F_1(U_{ijk}), \\ H_{i,j\pm 1/2,k}^{(2)} &= H^{(2)}(U_{i,j\pm 1/2,k}^-, U_{i,j\pm 1/2,k}^+), \quad H^{(2)}(U_{ijk}, U_{ijk}) = F_2(U_{ijk}), \\ H_{i,j,k\pm 1/2}^{(3)} &= H^{(3)}(U_{i,j,k\pm 1/2}^-, U_{i,j,k\pm 1/2}^+), \quad H^{(3)}(U_{ijk}, U_{ijk}) = F_3(U_{ijk}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $U_{i\pm 1/2,j,k}^-, U_{i\pm 1/2,j,k}^+$ – значения, соответственно, слева и справа от соответствующей грани ячейки (в данном случае, в направлении оси Ox).

Для расчета значений $U_{i\pm 1/2,j,k}^-, U_{i\pm 1/2,j,k}^+$ в рамках работы были использованы 2 схемы с «лимитером» [18], методы ENO-3, WENO-3 [2] [11] [9], а также описанная выше схема повышенной монотонности [12].

В рассмотренных задачах на границе задавались условия «отражения» (вещество не покидает границу рассматриваемой области, газодинамические параметры непрерывно примыкают к границе).

Начальные условия задавались для каждой задачи отдельно – подробнее будет показано, как именно.

Для полноценного исследования современных задач газовой динамики зачастую необходимо проводить расчеты на большом числе пространственных узлов сетки и на большом числе временных слоев, что приводит к значительному увеличению количества вычислительных операций. Также количество операций увеличивается при использовании методов повышенного порядка точности. Эти факты в целом приводят к необходимости использования мощных многопроцессорных систем [19-21].

Наиболее логичным в данном случае, как и для большинства гиперболических систем, является геометрическое распараллеливание [22-23].

В рассматриваемых в данной работе задачах расчетные области представляют собой прямоугольные параллелепипеды, что позволяет осуществить разбиение расчетной области на подобласти, обрабатываемые параллельно, плоскостями, параллельными плоскостям OXY , OXZ и OYZ . Таким

образом, разностная схема для каждой из полученных подобластей будет одинаковой. Более подробно алгоритм декомпозиции, использованный в данной работе, описан в работе [18].

Наиболее часто используемым интерфейсом межпроцессорных обменов является MPI [24-26]. Такой выбор обеспечивает возможность запуска программы на большинстве доступных многопроцессорных систем и является наиболее подходящим для расчетов на системах с разделенной памятью.

Для повышения эффективности использования ресурсов многопроцессорных систем иногда целесообразно использование альтернативных интерфейсов межпроцессорных обменов. Одним из таких интерфейсов является OpenMP [27].

OpenMP особенно эффективен при работе на системах с общей памятью или многоядерными процессорами при распараллеливании по ядрам внутри процессора. В таком случае аналогом общей памяти является кэш-память процессора и обмены между процессорами происходят целиком в кэш-памяти [28].

Следует отметить, что из-за того что кэш памяти процессора сравнительно невелика, существуют естественные ограничения на размерность и тип данных массивов, используемых в программе, что, в свою очередь, требует должным образом модифицировать программу для сохранения пересылок в общей памяти.

В большинстве случаев решением описанной проблемы ограниченности области применения интерфейса OpenMP является применение гибридных способов распараллеливания с помощью MPI и OpenMP [29-30], при котором «основное» распараллеливание происходит с помощью MPI, а «более глубокое» распараллеливание достигается уже с использованием OpenMP [31].

При этом один параллельный поток MPI содержит в себе несколько потоков OpenMP и представляет собой «расширенный» вычислительный узел, ассоциирующийся с некоторым физическим доменом вычислительной системы (node, socket, cache L1, L2, L3).

Рассмотрим эффективность описанной гибридной технологии распараллеливания.

Для оценки эффективности распараллеливания вычислений принято использовать ряд общепризнанных численных показателей, основным из которых можно назвать ускорение (speedup) параллельного алгоритма

$$S = \frac{T_1}{T_{Np}}, \quad (18)$$

где T_1 – время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре, T_{Np} – время выполнения параллельного алгоритма на Np

процессорах. Также среди основных показателей можно отметить эффективность параллельного алгоритма:

$$E_{Np} = \frac{S}{Np}. \quad (19)$$

Приведенные параметры оценки эффективности распараллеливания (ускорение, эффективность) являются достаточными для сравнительного исследования целесообразности применения интерфейса MPI или гибрида MPI и OpenMP.

Расчеты в данном случае проводились с использованием «упрощенного» теста – одномерной программы, выполняющей расчет производной простой функции заданное количество раз в каждой точке расчетной области, а также с помощью «сложной» трехмерной программы, моделирующей развитие неустойчивости Рэля-Тэйлора.

На рисунках 7-8 приведены усредненные результаты измерения ускорения и эффективности распараллеливания с использованием MPI и гибрида MPI и OpenMP для «упрощенной» программы при условии сохранения общего количества вычислительных точек ($N_x = 10^6$).

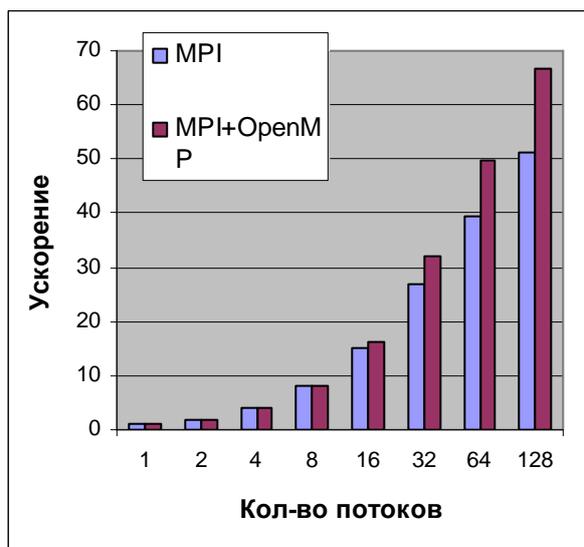


Рис. 7. Сравнительные показатели ускорения при распараллеливании с помощью MPI и MPI+OpenMP для «упрощенной» программы

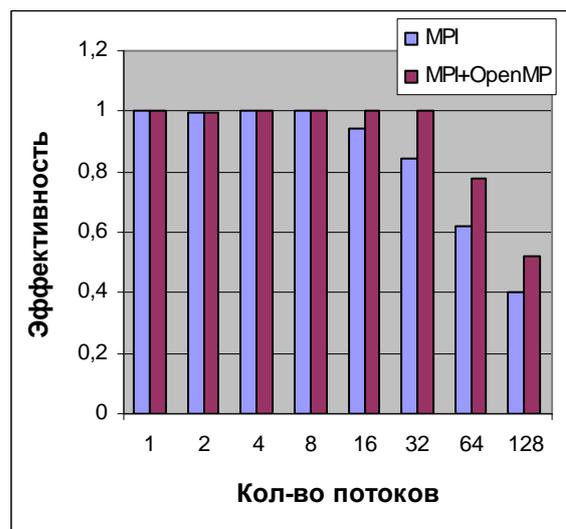


Рис. 8. Сравнительные показатели эффективности распараллеливания с помощью MPI и MPI+OpenMP для «упрощенной» программы

Приведенные на рисунках 7-8 сравнительные диаграммы свидетельствуют о том, что гибридный способ использования интерфейсов MPI и OpenMP не уступает по показателю ускорения и эффективности чистому MPI, а в случае достаточно большого числа использованных ядер дает лучший результат, что вполне соответствует высказанным выше предположениям.

Достаточно резкое падение эффективности распараллеливания начиная с 16-и узлов MPI и 32 узлов гибридной схемы на рисунке 8 можно объяснить резким возрастанием межпроцессорных обменов MPI при увеличении количества процессоров и неизменном числе расчетных.

В качестве подтверждения высказанного выше утверждения на рисунках 9-10 приведены результаты масштабированных расчетов для той же самой программы.

Масштабированные расчеты проводились при условии постоянства количества расчетных точек на каждом из узлов ($N_x^1 = 100000$). В таком случае ускорение при использовании N_p процессоров можно вычислить следующим образом:

$$S = \frac{T_1^{N_p}}{T_{N_p}} = N_p \frac{T_1}{T_{N_p}},$$

где T_{N_p} – расчетное время на N_p процессорах, а эффективность

$$E = \frac{S}{N_p} = \frac{T_1}{T_{N_p}}.$$

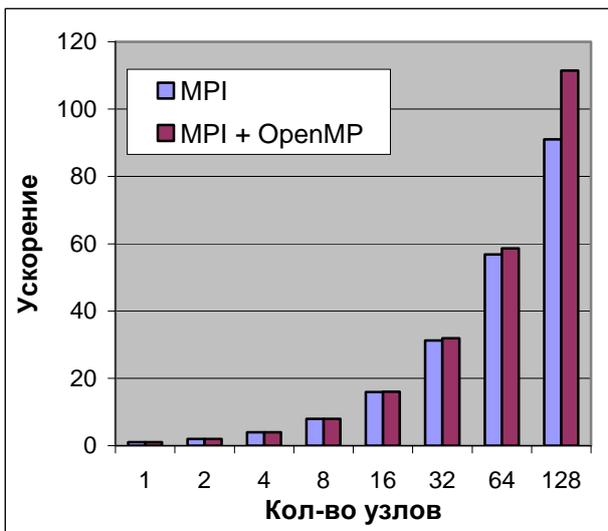


Рис. 9. Сравнительные показатели ускорения масштабированных расчетов при распараллеливании с помощью MPI и MPI+OpenMP для «упрощенной» программы

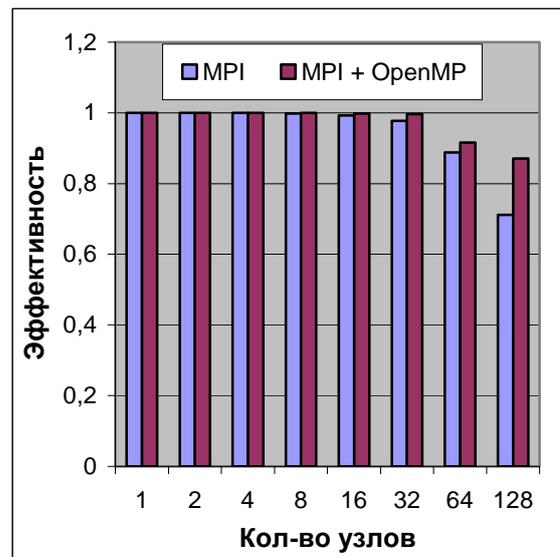


Рис. 10. Сравнительные показатели эффективности масштабированных расчетов с помощью MPI и MPI+OpenMP для «упрощенной» программы

Представленные выше результаты измерения ускорения и эффективности для масштабированных расчетов демонстрируют сохранение эффективности распараллеливания обоими способами при сохранении отношения количества расчетных точек на узле к количеству межпроцессорных обменов MPI.

Также следует отметить, что гибридная схема в случае масштабированных расчетов также более эффективна по сравнению с чистым MPI.

Рассмотрим приложение гибридной схемы в сравнении с чистым MPI для более сложной физической задачи – моделирования развития неустойчивости Рэля-Тейлора.

На рисунках 11-14 приведены результаты измерения ускорения и эффективности для масштабированных и немасштабированных расчетов вышеуказанной задачи.

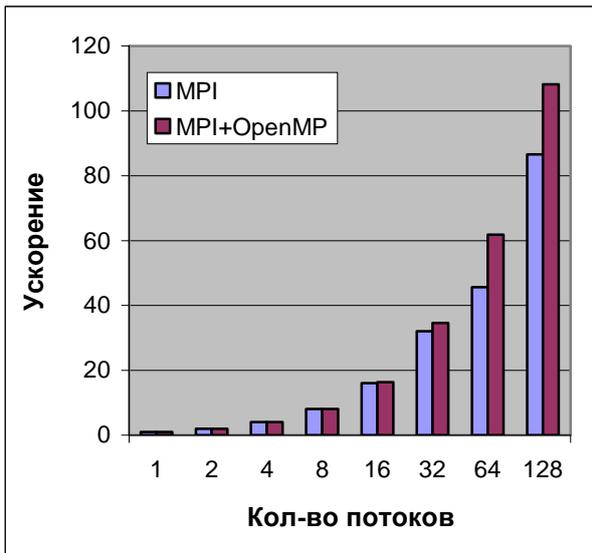


Рис. 11. Ускорение немасштабированных расчетов с помощью MPI и MPI+OpenMP для Рэлей-Тейлоровской неустойчивости

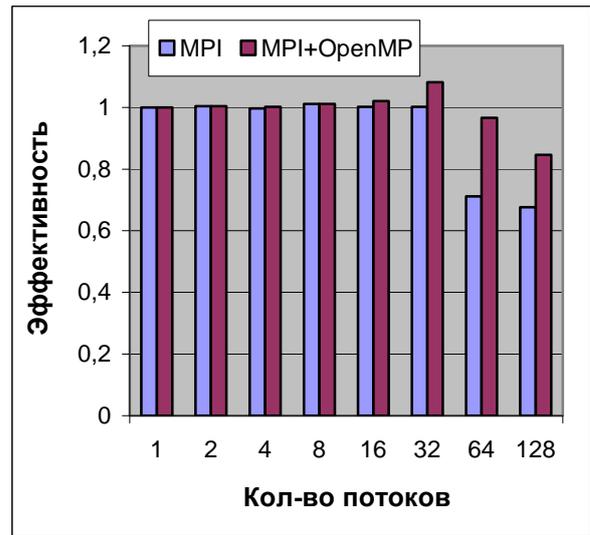


Рис. 12. Эффективность немасштабированных расчетов с помощью MPI и MPI+OpenMP для Рэлей-Тейлоровской неустойчивости

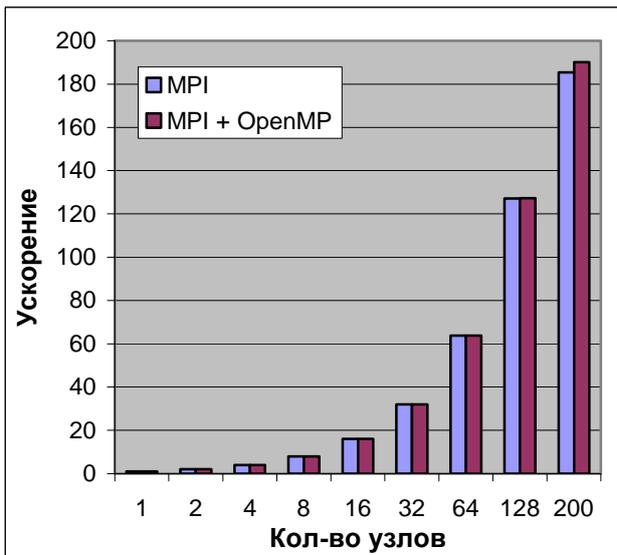


Рис. 13. Ускорение масштабированных расчетов с помощью MPI и MPI+OpenMP для Рэлей-Тейлоровской неустойчивости

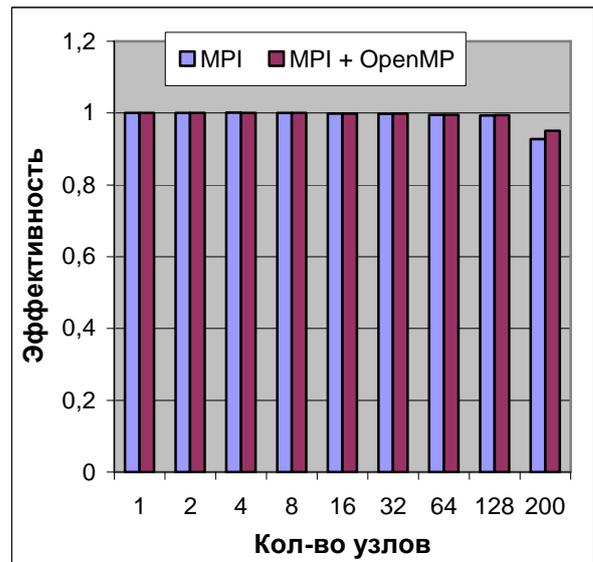


Рис. 14. Эффективность масштабированных расчетов с помощью MPI и MPI+OpenMP для Рэлей-Тейлоровской неустойчивости

Данные, представленные на диаграммах 11-14, также подтверждают сравнительное превосходство эффективности гибридной схемы, что означает возможность применения гибридной схемы для реальных модельных расчетов.

Моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

Представленные выше схема повышенного порядка точности и гибридный механизм распараллеливания были применены при расчетах реальных задач турбулентного перемешивания. Рассмотрим более подробно 2 из них.

Рассмотрим задачу, предложенную Погги [32], более детально описанную в работах [32-35]. Задача Погги представляет собой задачу о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова [36-37].

Данная задача представляет собой эволюцию движения ударной волны в 3-хмерной области ($0 \leq x \leq 80\text{мм}$, $0 \leq y \leq 80\text{мм}$, $-100\text{мм} \leq z \leq 300\text{мм}$). При этом рассматриваемая область заполнена двумя газами с различными значениями показателя адиабаты (воздух и элегаз - SF6), а также состоит из 2-х камер – высокого и низкого давления [38]. В рамках данной задачи будем считать, что показатель адиабаты для элегаза $\gamma=1,094$ и для воздуха - $\gamma=1,4$.

В начальный момент времени существуют 3 области с различными значениями газодинамических величин (рисунок 15):

- 1) область, заполненная SF6 под высоким давлением ($-100\text{мм} \leq z \leq -3\text{мм}$);
- 2) область, заполненная SF6 под низким (атмосферным) давлением ($-3\text{мм} \leq z \leq 0\text{мм}$);
- 3) область, заполненная воздухом под низким давлением ($0\text{мм} \leq z \leq 300\text{мм}$).

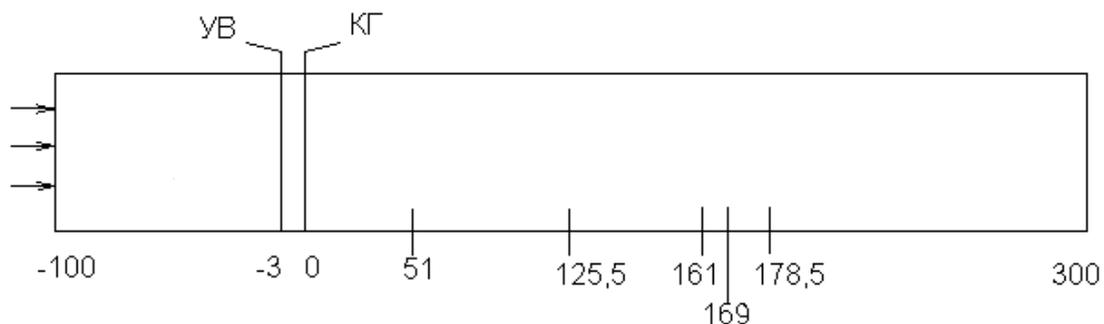


Рис. 15. Начальное положение ударной волны и контактного разрыва, а также положение датчиков в принятой постановке задачи

Три полученные области трубы в начальный момент времени разделены двумя тонкими мембранами. Таким образом, в данной задаче присутствуют 2 типа разрывных условий для газодинамических величин – ударная волна (УВ), которая возникает при прорыве мембраны, разделяющей камеры с SF6 под

высоким и низким давлением, а также контактный разрыв (КР), возникающий на границе, разделяющей элегаз под низким давлением и воздух.

Также в данной задаче рассматриваются случайные начальные возмущения контактной границы (КГ), заключающиеся в прогибе мембраны небольшим избытком давления в элегазе (1.44 мбар). Этот «прогиб» обеспечивает начальные возмущения, благодаря которым появляется неустойчивость Рихтмайера-Мешкова.

Для численного моделирования описанного процесса распространения ударной волны при указанных начальных данных необходимо учесть наличие газов с различным значением показателя адиабаты [18].

При расчетах данной задачи для повышения порядка точности были использованы метод с «лимитером» и метод минимизации нормы в L_2 .

В качестве потока будем использовать классический Годуновский поток.

Для исследования точности и монотонности предложенной схемы, а также для сравнения ее с ранее полученными были проведены несколько серий расчетов с различными значениями начальных параметров и различной шириной ячеек расчетной области (рисунки 16-17).

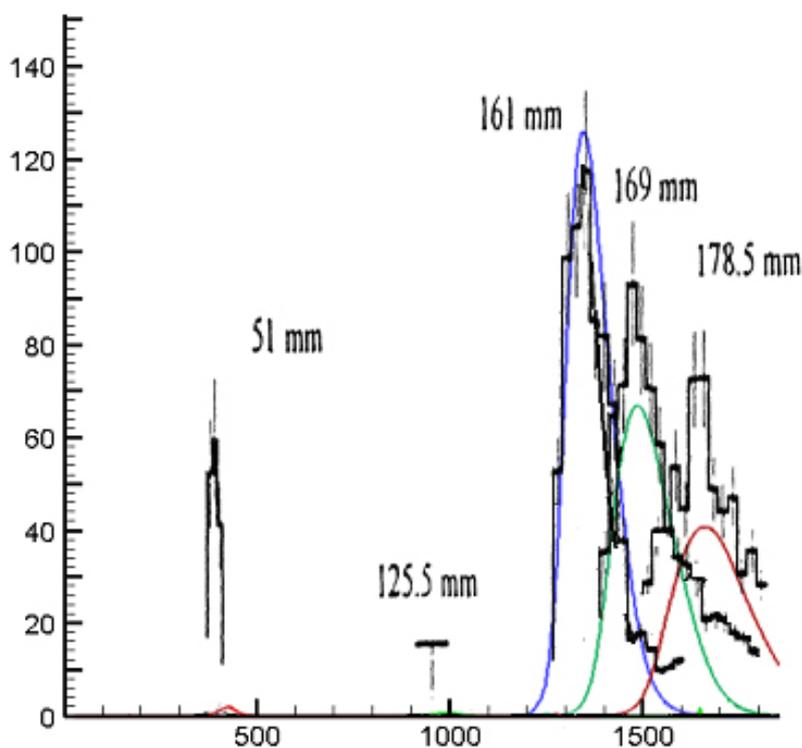


Рис. 16. Сравнение результатов расчетов с использованием метода минимизации вариации с экспериментом

На рисунке 16 приведен сравнительный график результатов эксперимента с использованием LDA датчиков, расположенных в определенных местах экспериментальной установки, а также расчетов временных зависимостей

пульсаций продольной компоненты скорости $\langle w^2 \rangle - \langle w \rangle^2$ в соответствующих эксперименту местах исследуемой области.

Можно отметить, глядя на рисунок 16, что наша модель дает достаточно неплохое соответствие эксперименту. Следует отметить, что в данном случае показателем точности результатов численного моделирования к эксперименту можно считать сходный «закон затухания» амплитуды пульсаций на каждом из датчиков, то есть положения максимумов кривых, аналогичных представленным на рисунке 16 для разных методов.

Для сравнения результатов расчетов с методом минимизации вариации с результатами, полученными с помощью схемы с «лимитером», были проведены несколько расчетов. Нормированные максимумы амплитуд пульсаций для проведенных расчетов, а также данные эксперимента приведены на рисунке 17.

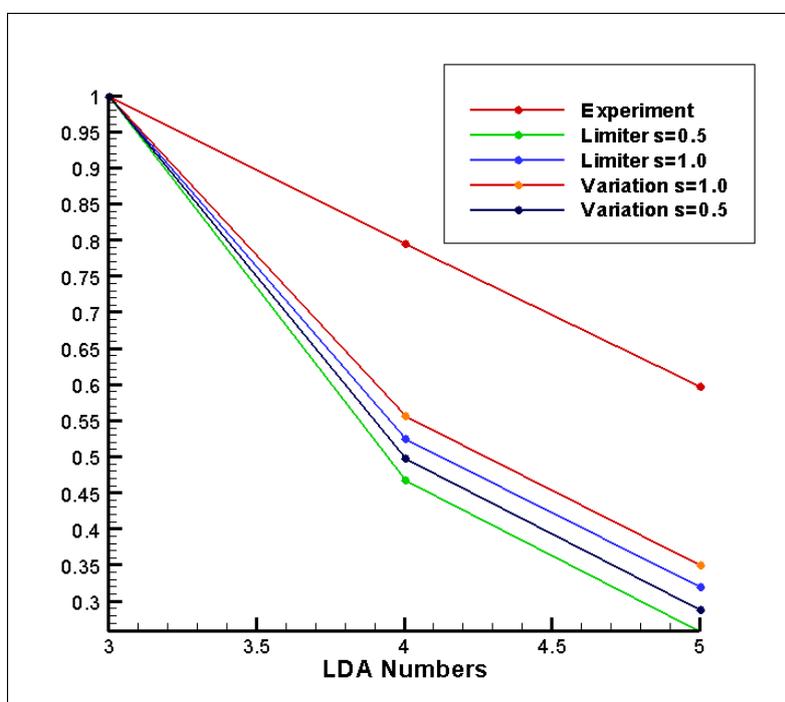


Рис.17. Сравнение нормированных максимумов амплитуд пульсаций схемы с лимитером, схемы с минимизацией вариации и эксперимента

Как видно из рисунка 17, «закон затухания» пульсаций в случае использования метода минимизации вариации немного более соответствует экспериментальному закону.

Также использование метода минимизации вариации дает неплохие результаты для границ зоны турбулентного перемешивания (рисунок 18).

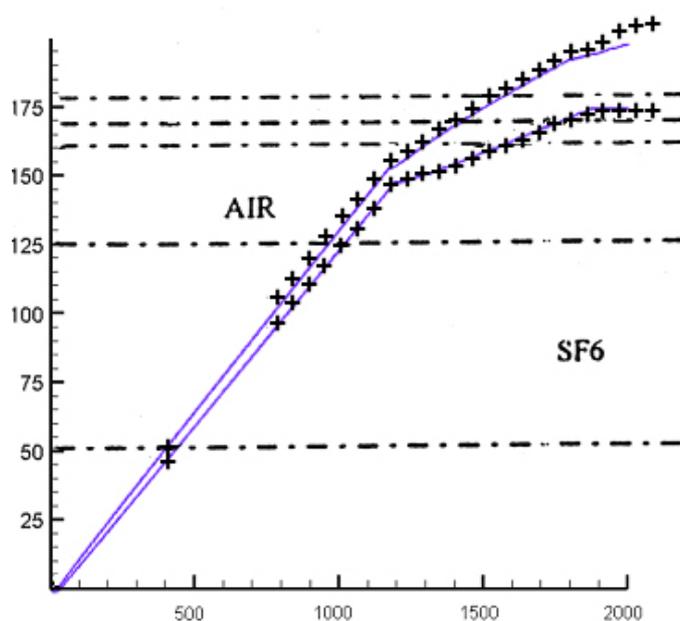


Рис. 18. Сравнительная $Z-t$ диаграмма движения границ зоны турбулентного перемешивания. Сплошная линия – результаты расчетов, крестики – эксперимент. Размеры по вертикальной оси (Z) в мм, по горизонтальной оси (время t) в мкс

Представленная на рисунке 18 $Z-t$ диаграмма движения границ зоны турбулентного перемешивания имеет 3 достаточно четко выраженные стадии, переходы между которыми обусловлены максимальным сжатием первичной и вторичной (отраженной) ударных волн.

Также достаточно важным показателем турбулентности является спектральная плотность кинетической энергии [18].

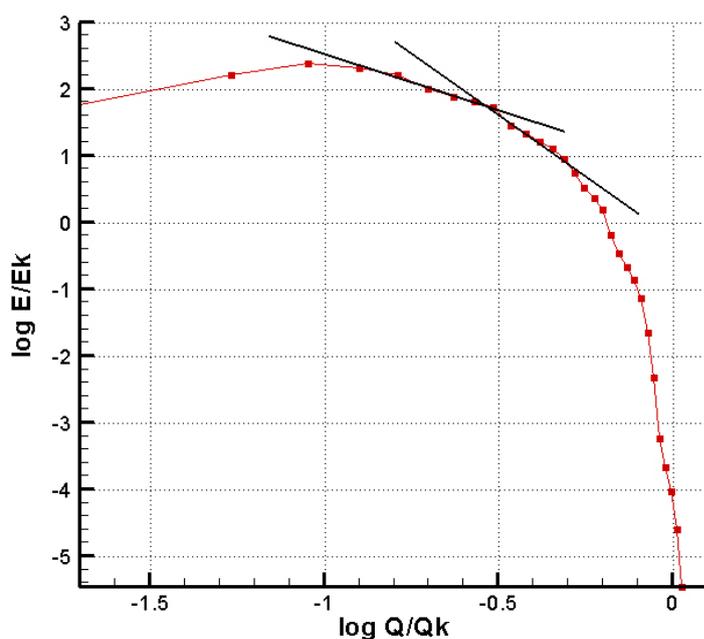


Рис. 19. Спектральная плотность кинетической энергии. Прямые линии на графике проведены с наклоном к осям $-5/3$ и $-11/3$

Спектральная плотность кинетической энергии представлена на рисунке 19. Необходимо отметить, что полученный график $E(q)$ имеет вид, общий для всех расчетов как этой работы, так и работ [39-40]. Начиная с некоторого момента (в данных расчетах практически с начала второй стадии), спектр $E(q)$ приобретает установившийся характер и в нем можно выделить инерционный интервал $E \sim q^{-5/3}$ и интервал в области диссипации $E \sim q^{-11/3}$. Эти интервалы пересекаются при некоторых значениях E_0 и q_0 , точка q_0 соответствует положению максимума диссипативной функции $q^2 E(q)$. Заметим, что различные экспериментальные данные (упомянутые выше рисунки из [41-42]) также имеют тот же вид.

Как и в случаях максимумов амплитуд пульсаций и ширины зоны турбулентного перемешивания, метод минимизации нормы в L_2 обеспечил достаточно высокую точность и соответствие теоретическим предположениям и экспериментальным данным.

Моделирование развития неустойчивости Рэлея-Тейлора

Также одной из достаточно важных задач исследования турбулентного перемешивания является моделирование развития гидродинамической неустойчивости Рэлея-Тейлора.

Данный вид неустойчивости возникает на границе раздела тяжелого газа в верхней части рассматриваемой области и легкого газа в нижней, в поле силы тяжести. При этом контактная граница имеет в начальный момент возмущения, которые увеличивают свою амплитуду с течением времени, вследствие чего вблизи границы раздела возникают области «провалов» тяжелого газа в виде струй и области «подъемов» легкого газа в виде пузырей. При этом развитие неустойчивости проходит линейную, промежуточную регулярную асимптотическую и турбулентную стадии. Наибольший интерес для нас представляет исследование турбулентной стадии развития.

В качестве примера реализации алгоритма расчета трехмерной эволюции РТН рассмотрим систему 2-х идеальных изотермических газов с уравнением

состояния $p = \rho \frac{c_{0\alpha}^2}{\gamma}$, $\alpha = 1, 2$, $c_{0\alpha}$ – скорость звука для соответствующего газа

(предполагаем, что скорость звука всюду одинакова), $\gamma = 5/3$ – показатель адиабаты в наших расчетах. Как уже было отмечено, в условиях данной задачи мы предполагаем постоянство температуры по высоте (оси OZ).

Предположим, что рассматриваемая область представляет собой прямоугольный параллелепипед $\{0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, Z_{min} \leq z \leq Z_{max}\}$, $L_x = 1$, $L_y = 1$, $L_z = Z_{min} - Z_{max} = 2$, $Z_{min} = -1.125$, $Z_{max} = 0.875$, в котором в начальный момент времени газы заключены в областях, разделенных плоскостью $z=0$,

причем, как уже упоминалось выше, тяжелый газ расположен в верхней части рассматриваемой области.

В таком случае для распределения плотности и давления газов в начальный момент времени справедливы следующие соотношения:

для $z > 0$:

$$p = p_0 \exp\left(-\gamma \frac{gz}{c_{02}^2}\right), \rho = \rho_{02} \exp\left(-\gamma \frac{gz}{c_{02}^2}\right), \quad (20)$$

а для $z < 0$:

$$p = p_0 \exp\left(-\gamma \frac{gz}{c_{01}^2}\right), \rho = \rho_{01} \exp\left(-\gamma \frac{gz}{c_{01}^2}\right). \quad (21)$$

В формулах (20) и (21) p_0 – давление на поверхности раздела газов, $z=0$ непрерывно, а отношение плотностей газов $n = \rho_{02} / \rho_{01}$, плотность легкого газа $\rho_{01} = 1$, а ускорение силы тяжести $g = 1$.

Для создания начальных условий, обеспечивающих возникновение и развитие РТН, зададим на поверхности раздела газов начальные возмущения плотности следующим образом:

$$\rho_1 = \rho_{01} (1 + 0.1 \text{sign}(\xi - 1)) \exp\left(\gamma \frac{gh}{2c_{01}^2}\right), \quad (22)$$

где ξ – равномерно распределенное в интервале $(0,1)$ случайное число. Следует отметить, что возмущение задавалось в одном пространственном слое ячеек ($-0.01 \leq z \leq 0$ или $-0.005 \leq z \leq 0$ – в зависимости от конкретной сетки) и в легком газе.

Для численного решения данной задачи был использован аналогичный описанному при исследовании развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова численный алгоритм повышенного порядка точности. Результаты расчетов приведены ниже.

При расчетах ширины зоны турбулентного перемешивания было отмечено, что поперечные размеры возмущений уменьшаются пропорционально разрежению сетки, а следовательно, уменьшается и скорость роста возмущений [43]. Однако при выборе размеров возмущений независимо от шага сетки результат расчета будет следовать размерам возмущений, а не шагу сетки.

В проведенных ранее расчетах было дано теоретическое объяснение эффекту уменьшения скорости роста зоны перемешивания при переходе к расчетным сеткам, содержащим большое число узлов (порядка 10^7). Это объяснение также получило экспериментальное подтверждение в работах Кучеренко [44]. В рамках данной работы также были произведены соответствующие измерения динамики ширины ЗТП в расчетах на различных сетках. Динамика ширины ЗТП для расчетов на сетках $100 \times 100 \times 200$ и $200 \times 200 \times 400$ точек приведена на рисунке 20.

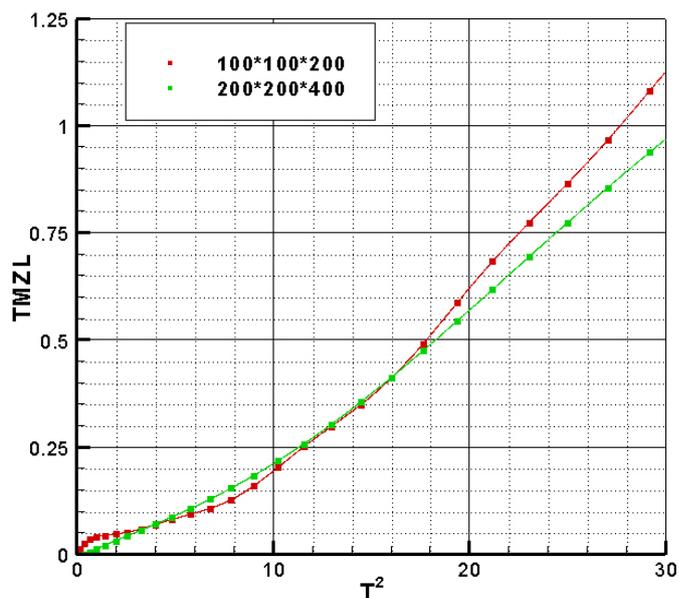


Рис. 20. Сглаженные графики зависимости ширины зоны турбулентного перемешивания от квадрата времени T^2 на сетках $100*100*200$ и $200*200*400$

Можно заметить, что зависимость ширины ЗТП, представленная на рисунке 1, имеет две четко выраженные стадии:

- установление процесса ($T^2 \leq 10$) – на данном этапе достаточно велика зависимость от начальных возмущений (для разных сеток различна амплитуда начальных возмущений);
- «автомодельная» стадия ($T^2 \geq 10$ на приведенном участке кривой) – на данном этапе развитие ширины ЗТП практически не зависит от начальных возмущений (наклон примерно одинаков для разных сеток).

Также в рамках данной работы были проведены расчеты спектра кинетической энергии и получен «колмогоровский спектр» (рисунок 21).

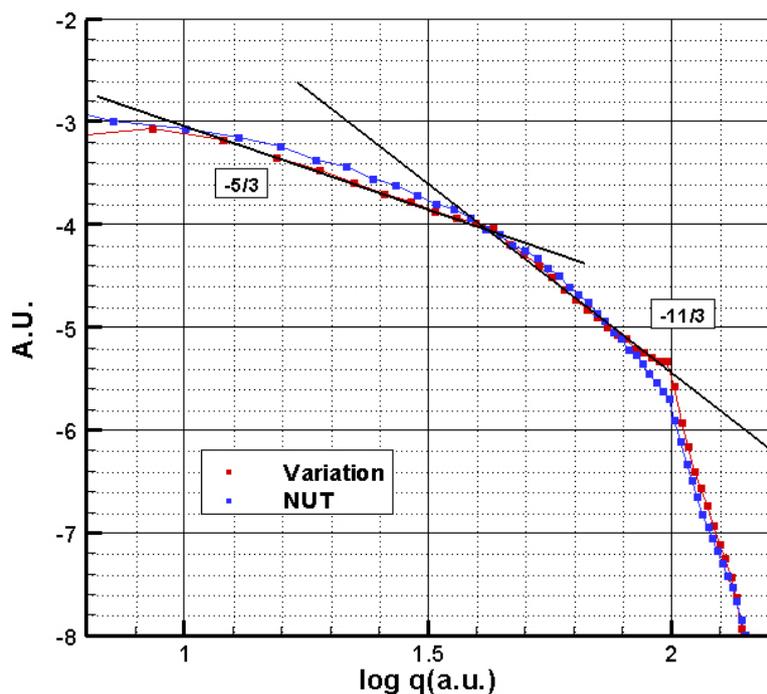


Рис. 21. Сравнительный график спектров кинетической энергии \tilde{E} в зависимости от волнового числа q в расчетах на сетке $100*100*200$ точек для момента времени $t=4.0$. Дополнительно построены наклонные линии $-5/3$ и $-11/3$

На рисунке 21 приведен также аналогичный расчет с использованием схемы с «лимитером» (синяя линия). Можно заметить, что в данном случае закон затухания спектра, построенного для расчета с помощью метода минимизации нормы в L_2 , дает более точное соответствие с теорией.

Следует дополнительно отметить, что резкое затухание спектра в области $q \geq 2$ не имеет физического смысла, а связано со спецификой усреднения и отсутствием всех гармоник для всех волновых чисел в дискретном представлении.

Таким образом, представленный метод минимизации нормы в L_2 обеспечил необходимую точность как при расчетах тестовых одномерных задач, так и в случае исследования реальных трехмерных задач турбулентного перемешивания.

Также следует отметить, что был реализован эффективный трехмерный параллельный алгоритм с использованием гибридной технологии распараллеливания (MPI+OpenMP).

Список литературы

- [1] - Osher, S., *Convergence of Generalized MUSCL Schemes*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 22, No. 5 (Oct., 1985), pp. 947-961.
- [2] - Chi-Wang Shu. *Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*. ICASE Report No. 97-65, 1997.
- [3] D. Gottlieb and S. A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, CBMS conference Series in Applied Mathematics 26, SIAM, 1977.
- [4] -Serna S, Marquina A: *Power ENO methods: a fifth-order accurate Weighted Power ENO method*, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 194 (2): 632-658 MAR 1 2004.
- [5] - Qiu JX, Shu CW: *On the construction, comparison, and local characteristic decomposition for high-order central WENO schemes*, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 183 (1): 187-209 NOV 20 2002.
- [6] - Shi J, Hu CQ, Shu CW: *A technique of treating negative weights in WENO schemes*, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 175 (1): 108-127 JAN 1 2002.
- [7] - Levy D, Puppo G, Russo G: *Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws*, ESAIM-MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS-MODELISATION MATHEMATIQUE ET ANALYSE NUMERIQUE 33 (3): 547-571 MAY-JUN 1999.
- [8] - Hu CQ, Shu CW: *Weighted essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes*, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 150 (1): 97-127 MAR 20 1999.
- [9] - Jiang GS, Shu CW: *Efficient implementation of weighted ENO schemes*, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 126 (1): 202-228 JUN 1996.

- [10] - Liu XD, Osher S, Chan T: *Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes*, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 115 (1): 200-212 NOV 1994.
- [11] - Bruno Costa, Wai Sun Don. *Multi-Domain Hybrid Spectral-WENO Methods for Hyperbolic Conservation Laws*. Journal of Computational Physics, Volume 224, Issue 2, 2007, Pages: 970-991.
- [12] - Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф., Чеванин В. С. *Об одном варианте существенно неосциллирующих разностных схем высокого порядка точности для систем законов сохранения // Математическое моделирование, том 21, номер 11, 2009 г., С. 19-32.*
- [13] - C.-W. Shu and S. Osher, *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes*, Journal of Computational Physics, v 77 (1988), pp.439-471.
- [14] - C.-W. Shu and S. Osher, *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II*, Journal of Computational Physics, v 83 (1989), pp.32-78.
- [15] – J. Naber, *Building your own shock tube*, REPORT MAS-E0502 JANUARY 2005.
- [16] – A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. R. Chakravarthy, *Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III*, Journal of Computational Physics, v 71 (1987), pp.231-303.
- [17] - А. А. Самарский, Ю. П. Попов, *Разностные методы решения задач газовой динамики*, М., Наука, 1980.
- [18] - Ладонкина М. Е. Численное моделирование турбулентного перемешивания с использованием высокопроизводительных систем: Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук.- М, 2005.
- [19] - D. Roose, R.V.Driessche, *Parallel computers and parallel algorithms for CFD: an introduction*, AGARD-R-807, 1995.
- [20] - *Proceedings of a Symposium "Computational Fluid Dynamics for the 21 st Century*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, vol. 78 - Springer-Verlag, 2001.
- [21] - *Book of Abstracts of the V International Congress on Mathematical Modelling*, September 30 - October 6, 2002, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia. М., Янус-К, 2002.
- [22] - В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин, *Параллельные вычисления*, СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
- [23] - М. В. Якобовский, *Распределенные системы и сети*, М.: Изд-во Станкин, 2000.
- [24] - William Gropp and Ewing Lusk. *A High-Performance, Portable Implementation of the MPI Message Passing Interface Standard*
<http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/mpich/papers/mpicharticle/paper.html>
- [25] - Marc Snir, Steve Otto, Steve Huss-Lederman, David Walker, Jack Dongarra. *MPI: The Complete Reference*
<http://www.netlib.org/utk/papers/mpi-book/mpi-book.html>

- [26] - Neil MacDonald, Elspeth Minty, Mario Antonioletti, Joel Malard, Tim Harding, Simon Brown. *Writing Message-Passing Parallel Programs with MPI* http://www.epcc.ed.ac.uk/epic/mpi/notes/mpi-course-epic.book_1.html
- [27] - А.С. Антонов, *Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP*, М.: Изд-во Мос. университета, 2009.
- [28] - Rolf Rabenseifner, Georg Hager, Gabriele Jost, *Hybrid MPI/OpenMP Parallel Programming on Clusters of Multi-Core SMP Nodes*, pdp, pp.427-436, 2009
Parallel, Distributed and Network-based Processing, 2009.
- [29] - Byoung-Do Kim, John Cazes, *Hybrid Programming on Multi-core, Multi-socket Cluster System*, Sept. 4th, 2009.
- [30] - Kushal Kedia, *Hybrid Programming with OpenMP and MPI*, Report: 18.337 Applied Parallel Programming, 2009.
- [31] - G. Mahinthakumar, *A Hybrid MPI-OpenMP Implementation of an Implicit Finite-Element Code on Distributed Shared Memory Architectures*, North Carolina State University, 2000.
- [32] - F.Poggi, M.-H.Thorembey, G.Rodriguez. *Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer-Meshkov instability.* // Physics of Fluids, 1998, Vol.10, No.11, pp.2698-2700.
- [33] - G.Lacassin, F.Poggi, G.Rodriguez. *Experiment and Numerical Computation on a Large-Scale Richtmyer-Meshkov Instability.* // Proc. of 6-th IWPCTM, Marseille, France, 1997, pp.289-294.
- [34] - F.Poggi, M.-H.Thorembey, G.Rodriguez, J.-F.Haas. // *Velocity Measurement in Turbulent Gaseous Mixture Induced by Richtmyer-Meshkov Instability.* // Ibid, pp.416-421.
- [35] - D.Souffland. O.Gregoire, S.Gauthier, F.Poggi, J.M.Koenig, *Measurements and Simulation of the Turbulent Energy Levels in Mixing Zones Generated in Shock Tubes.* // Ibid, pp.486-491.
- [36] - R. D. Richtmyer, *Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids*, Comm. Pure and Appl. Math, 13, #2, 297, 1960.
- [37] - Е. Е. Мешков, *Неустойчивость поверхности раздела двух газов, ускоренных ударной волной* // Известия Академии наук СССР / Механика жидкости и газа, №5, 151. 1969.
- [38] - I. G. Lebo, V. V. Nikishin, V. B. Rozanov, V. F. Tishkin, *On the development of instability near the contact boundary between two equal-density gases in passage of a shock wave*, Bulletin of the Lebedev Physics Institute (Kratkie Soobsheniya po Fizike), Allerton Press, Inc, New York, #2, 9, 1997.
- [39] - С.М.Гарина, Н.В.Змитренко, Н.Г.Прончева, В.Ф.Тишкин. *Динамика роста зоны перемешивания в прямом численном моделировании гравитационной неустойчивости* // ВАНТ, 2002, Сер.: Математическое моделирование физических процессов, 2002, вып.2, ,С.10-17.
- [40] - М.Гарина, Н.В.Змитренко, М.Е.Ладонкина, И.Г.Лебо, В.В.Никишин, Н.Г.Прончева, В.Б.Розанов, В.Ф.Тишкин. *Численное моделирование и анализ характеристик турбулентного перемешивания с помощью*

трехмерного кода NUT // Математическое моделирование, 2003, т.15, №5, С.3-11.

[41] - О.М. Belotserkovsky. *Turbulence and Instabilities*, М.: МИПТ, 1999 – 347 p.

[42] - А.С. Монин, А.М. Яглом. *Статистическая гидромеханика. / Часть 2. Механика турбулентности* // М., Наука, 1967 – 720 с.

[43] - Ю.Л. Левитан, И.М. Соболев. *О датчике псевдослучайных чисел для персональных компьютеров* // Математическое моделирование, 1990, т.2, №8, С.119-126.

[44] - Ю.А. Кучеренко, О.Е. Шестаченко, Ю.А. Пискунов и др., *Экспериментальное исследование автомоделного режима перемешивания разноплотных газов в поле тяжести Земли*, VI Забабахинские чтения, Снежинск, 2001.