ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 85 за 2010 г.

Парусников В.И.

Ряды Фарея и цепные дроби до ближайшего четного

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.И. Парусников

РЯДЫ ФАРЕЯ И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

ДО БЛИЖАЙШЕГО ЧЕТНОГО

Москва, 2010 г.

УДК 511.36

В.И. Парусников. Ряды Фарея и цепные дроби до ближайшего четного Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Подходящие дроби разложения чисел в цепную дробь до ближайшего четного числа имеют четный числитель и нечетный знаменатель для четных индексов и нечетный числитель и четный знаменатель для четных индексов. В работе исследуется, насколько типично такое сочетание четностей подходящих дробей в классической цепной дроби. Оказывается, что для конкретного индекса n с большой точностью треть n-х подходящих дробей имеют нечетные числитель и знаменатель, и по трети – четный числитель или четный знаменатль. Причем это свойство верно как по мере Лебега, так и для сингулярной меры, связанной с рядами Фарея. Функцией распределения этой меры служит так называемая функция "вопрос"$?(x)$ Минковского. Попутно устанавливается, что среднее значение n первых элементов цепной дроби по мере $?(x)$ не стремится к беконечности как $\ln n$, как в случае меры Лебега, а быстро сходится к 2.

V.I. Parusnikov. Farei deries and continued fractions to the nearest even number. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2010.

The evenness of the numerator and denominator of convergents of continued fraction to the nearest even number is opposite. We establish there that for nearly by 1/3 of almost all real numbers, convergents of its regular continued fraction expansion have either even numerator and odd denominator and eiter even denominator and odd numirator. This property holds for both the lebesque measure just as for the distribution function of the so called Minkowski question mark function $?(x)$. Incindentally we establish that for the measure that coresponds to the distribution $?(x)$, the mean of the n first elements of regular continued fraction tends to 2 as n tends to infinity.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00251, 08-01-00082).

E-mail: parus@keldysh.ru   Сайт: www.keldysh.ru

§ 1. Ряды Фарея

Определим на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ операцию "$\oplus$": если $r_1 = p_1/q_1,\ r_2 = p_2/q_2$ – два рациональных числа в несократимой записи, знаменатели которых положительны, то

$$\frac{p_1}{q_1} \oplus \frac{p_2}{q_2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}.$$

Из свойств этой операции будет использоваться, что число $r_1 \oplus r_2$ лежит между числами r_1, r_2, если $r_1 \neq r_2$, и совпадает с r_1, r_2, если $r_1 = r_2$.

Рядом Фарея обычно называют серию множеств $\tilde{F}_j, \tilde{G}_j,\ j \in \mathbb{N}$, состоящих из возрастающих последовательностей рациональных чисел $f_{j,k},\ k = 0, \ldots, 2^j$, отрезка $[0,1]$.

Множество $\tilde{F}_1$ состоит из двух точек $f_{1,0} = \dfrac{0}{1}$ и $f_{1,1} = \dfrac{1}{1}$, а множество $\tilde{G}_1$ – из одной точки $g_{1,1} = \dfrac{1}{1}$.

Очередное множество $\tilde{F}_j,\ j > 1$ получается объединением $\tilde{F}_{j-1}$ с множеством $\tilde{G}_j$ упорядоченных по возрастанию несократимых рациональных чисел $g_{j,k}$:

$$g_{j,k} = f_{j-1,k-1} \oplus f_{j-1,k};\quad f_{j-1,k-1} < g_{j,k} < f_{j-1,k},\ k = 1, \ldots, 2^{j-2}.$$

В $\tilde{F}_j$ точки множеств $\tilde{F}_{j-1}$ и $\tilde{G}_j$ чередуются:

$$\begin{array}{lcl} f_{j,2k} = & f_{j-1,k}, & k = 0, \ldots, 2^{j-2}, \\ f_{j,2k-1} = & g_{j,k} = f_{j-1,k-1} \oplus f_{j-1,k}, & k = 1, \ldots, 2^{j-2}. \end{array}$$

Будем использовать символ $\sharp$ для обозначения числа элементов множества. Для конечной (обрывающейся) ghfdbkmyjq цепной дроби

$$g = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_d}}}} = [b_0; b_1, \ldots, b_d], \qquad (1)$$
$$b_0 \in \mathbb{Z},\ b_1 \ldots, b_d \in \mathbb{N},$$

целое неотрицательное число $d = d(g)$ назовем *уровнем цепной дроби.* Введем также количетсва $d_k(g)$ b_j неполных равных k частных среди $b_1, \ldots, b_{d(g)}$:

$$d_k(g) = \sharp\{j \in \mathbb{N}:\ b_j = k\}.$$

Естественно,

$$d(g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(g).$$

Для конечной или бесконечной цепной дроби введем величины

$$\ell_k(g) = \sum_{j=1}^{k} b_j,\ k \in \mathbb{N}.$$

Сумму всех элементов цепной дроби, т.е. величину

$$h(g) = \lim_{k\to\infty} \ell_k(g) = \sum_{j=1}^{d(g)} b_j = \sum_{k=1}^{\infty} k\ d_k(g)$$

назовем *уровнем цепной дроби.*

Замечание. Для единственности разложения рационального числа g в цепную дробь обычно требуют, чтобы последний элемент $b_{d(g)}$ не был единицей: $b_{d(g)} \geq 2$. В (**??**) мы отказались от этого требования, получив для g ровно два разложения с разными уровнями разложений:

$$g = [b_0; b_1, \ldots, b_{d(g)-2}, b_{d(g)-1}, b_{d(g)}] = [b_0; b_1, \ldots, b_{d(g)-2}, b_{d(g)-1} - 1, 1].$$

Введем ряды Фарея цепных дробей F_j, G_j (в обозначениях нет волны) – множества различных по начертанию ценых дробей с $b_0 = 0$, отвечающих числам множеств $\tilde{G}_j, \tilde{F}_j$. При этом $F_j = F_{j-1} \cup G_j$, $F_1 = G_1 = \{[0; 1]\}$, но для $j > 1$ мощности множеств F_j, G_j будут вдвое больше, чем мнощности $\tilde{F}_j, \tilde{G}_j$.

Известным базисным свойством ряда Фарея является следующее.

Теорема 1. *Для $g \in G_j, F_j, j \in \mathbb{N}$ уровень цепной дроби характеризует индекс j множеств G_j, F_j:*

$$\begin{aligned} G_j &= \{g = [b_0; b_1, \ldots, b_k, \ldots] \in [0,1] :\ b_0 = 0,\ h(g) = j\},\\ F_j &= \{g = [b_0; b_1, \ldots, b_k, \ldots] \in [0,1] :\ b_0 = 0,\ h(g) \leq j\}. \end{aligned}$$

Наряду с наследуемым из $\mathbb{R}$ упорядочением по возрастанию, в F_j, G_j можно ввести лексикографическое упорядочение. Перечислим, к примеру, в этом порядке все 2^3 элементов множества G_4 и отвечающие им числа из $\tilde{G}_4$:

$$\{[0; 1, 1, 1, 1], [0; 1, 1, 2], [0; 1, 2, 1], [0; 1, 3], [0; 2, 1, 1], [0; 2, 2], [0; 3, 1], [0; 4]\};$$
$$\{\ \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\ \}.$$

Сформулируем несколько простых утверждений, относящихся к ряду Фарея, объединив их в следующее предложение.

Теорема 2.

1.1. $\sharp\{G_j\} = 2^{j-1}$,
1.2. $\sharp\{F_j\} = 2^j - 1$,
2.1. $d(G_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{g\in G_j} h(g) = (j+1)2^{j-2}$,
2.2. $d(F_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{g\in F_j} h(g) = j2^{j-1}$,
3.1. $\ell_1(G_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{g\in G_j} \ell_1(g) = \begin{cases} 1 & \text{при } j=1, \\ (j+2)2^{j-3} & \text{при } j>1, \end{cases}$
3.2. $\ell_1(F_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{g\in F_j} \ell_1(g) = \begin{cases} 1 & \text{при } j=1, \\ (j+1)2^{j-2} & \text{при } j>1, \end{cases}$
4.1. $\ell_t(G_{j+t-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{g\in G_{j+t-1}} \ell_t(g) = \ell_1(G_j),\ t\in\mathbb{N}$,
4.2. $\ell_t(F_{j+t-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{g\in F_{j+t-1}} \ell_t(g) = \ell_1(F_j),\ t\in\mathbb{N}$.

Хотя утверждение 1.1 очевидно и исходя из определения рядов Фарея с помощью операции $\oplus$, полезней отметить, что оно вытекает из комбинаторного определения множеств G_j. А именно, что из цепной дроби (последовательности неполных частных) $g \in G_{j-1}$ элементы $g^\times, g^+ \in G_j$ строятся двумя взаимоисключающими способами. Либо к последовательности g слева (справа) дописывается единица, либо к левому (правому) элементу последовательности g добавляют единицу:

$$g=[0;b_1,\ldots,b_{d(g)}] \to \{g^\times=[0;1,b_1,\ldots,b_{d(g)}],\ g^+=[0;b_1+1,\ldots,b_{d(g)}]\},$$
$$g=[0;b_1,\ldots,b_{d(g)}] \to \{g_\times=[0;b_1,\ldots,b_{d(g)},1],\ g_+=[0;b_1,\ldots,b_{d(g)}+1]\}.$$

При этом сумма уровней получившихся элементов равна $2d(g)+1$. Отсюда суммированием по G_{j-1} получаем

$$d(G_j) = 2d(G_{j-1}) + \sharp\{G_{j-1}\} = 2d(G_{j-1}) + 2^{j-2}.$$

Число b_k равных единице в элементах $g^\times$ и g^+ изменилось по закону

$$d_1(g^\times) = d_1(g)+1; \quad d_1(g^+) = \begin{cases} d_1(g)-1 & \text{при } b_1 = 1, \\ d_1(g) & \text{при } b_1 \neq 1, \end{cases}$$

поэтому

$$\ell_1(G_j) = \ell_1(G_{j-1}) + \sharp\{G_{j-1}\} + \ell_1(G_{j-1}) - \sharp\{G_{j-2}\} = 2\ell_1(G_{j-1}) + 2^{j-3}.$$

После этого формулы 2.1 и 3.1 легко проверяются. Также понятно, что при $t > 1$

$$d_t(g^\times) = 0, \quad d_t(g^+) = \begin{cases} d_t(g)+1 & \text{при } b_1 = t-1, \\ d_t(g)-1 & \text{при } b_1 = t, \\ d_t(g) & \text{при } b_1 \neq t-1, t. \end{cases}$$

Число последовательностей $g \in G_j$ с первым элементом b_1 равным $t \in \mathbb{N}, t \le j$, равно 2^{j-t-1} при $j - t > 1$ и равно 1 при $t - j = 1$. Откуда получаем

$$\ell_t(G_j) = 2\ell_t(G_{j-1}) + \sharp\{G_{j-t}\} - \sharp\{G_{j-t-1}\}$$

и формулу 4.1. Формулы, относящиеся к множествам F_j, следуют из установленных рекуррентных соотношений. Теорема доказна.

Для цепных дробей Хинчин доказал следующий результат (см. [1, § 14,2-3]). Для почти всех по мере Лебега μ чисел x отрезка $[0,1]$ среднее значение первых j коэффициентов разложения x в цепную дробь неограниченно растет как $\log_2 j$. Справедливо равенство

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{j\to\infty} \mu\{x \in [1,1] : \mid \frac{\ell_j(x)}{j \ \log_2 j} - 1 \mid > \varepsilon\} = 0.$$

Используя Теорему 2, можно сосчитать средние значение MG_j и MF_j элементов b_k цепных дробей g множеств G_j и F_j соответственно:

$$\begin{aligned} MG_j = \ & \frac{h(G_j)}{d(G_j)} = \frac{j2^{j-1}}{(j+1)2^{j-2}} = 2 - \frac{2}{j+1}, \\ MF_j = \ & \frac{h(F_j)}{d(F_j)} = \frac{(j-1)2^j}{j2^{j-1}} = 2 - \frac{2}{j}. \end{aligned}$$

Мы видим, что на множестве дробей Фарея ситуация в кардинально отличается от случая общего положения по мере Лебега.

Определим на отрезке $[0,1]$ кусочно постоянные функции, которые будут аппроксимировать так называемую функцию "вопрос- Минковского (Minkowski question mark function $?(x)$). Положим $?_j(x),\ j \in \mathbb{N}$, равной двоично - рациональному числу, зависящему от того, между какими точками ряда Фарея $\tilde{G}_j, \tilde{F}_j$ попала точка x:

$$?_j(x) = \begin{cases} \dfrac{2k}{2^{j+1}}, & \text{при } x = \tilde{f}_{j,2k}, \\ \dfrac{2k+1}{2^j}, & \text{при } \tilde{f}_{j,2k} < x < \tilde{f}_{j,2k+2}. \end{cases}$$

Последовательность ступенчатых функций распределения $\{?_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ аппроксимирует функцию "вопрос- Минковского $?(x)$, задающую сингулярную меру на отрезке $[0,1]$. Таким образом, справедливо утверждение:

Теорема 3. *Среднее значение элементов цепной дроби строки G_j ряда Фарея по функции распределения Минковского $?(x)$ стремится к двум.*

§ 2. Четность рациональных чисел в рядах Фарея

В работах [5, 6] исследовались цепные дроби до ближайшего четного. Разложение в них идет по алгоритму Евклида с той разницей, что получаемое на шаге разложения неполное частное b_j берется не взятием целой части числа, а взятием ближайшего четного числа. У подходящих дробей к таким цепным дробям (кроме, быть может, последней) будет либо четный числитель и нечетный знаменатель (для четных индексов), либо наоборот (для нечетных индексов). Случай нечетных числителя и знаменателя не встречается. В связи с этим можно поставить вопрос, насколько типична такая ситуация при разложении в классическую цепную дробь.

Пусть z_2 – отображение кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел в группу $Z_2 = \{\{0\}, \{1\}\}$ вычетов по модулю 2: $z_2(x) = x \bmod 2$. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел вложено в проективное пространство $\mathbb{ZP}^2 : \mathbb{ZP}^2 = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Зададим на $\mathbb{ZP}^2$ отображение $z_{2,2}$, сопоставив точкам $r \in \mathbb{Q}$ точки $(z_2(p), z_2(q)) \in Z_2^2$ и точке ∞ – точку $(z_2(1), z_2(0)) = (1, 0) \in Z_2^2$. Четыре компоненты полного прообраза Z_2^2 относительно $z_{2,2}$ обозначим

$$\mathbb{Q}_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} z_{2,2}^{-1}(i, j),\ i, j \in Z_2.$$

При этом $\mathbb{Q}_{0,0}$ пусто, а множества $\mathbb{Q}_{0,1}, \mathbb{Q}_{1,1}$ и $\mathbb{Q}_{1,0}$ содержат четные и нечетные целые числа и точку ∞ соответственно. Поэтому естественно назвать элементы $\mathbb{Q}_{1,1}$ нечетными рациональными числами, а $\mathbb{ZP}^2 \setminus \mathbb{Q}_{1,1}$ – четными рациональными числами, в свою очередь подразделяющиеся на $\mathbb{Q}_{0,1} \cup \mathbb{Q}_{1,0}$ – четные рациональные числа типов $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

Отобразим далее $\mathbb{ZP}^2$ в группу $Z_3 = \mathbb{Z} \bmod 3 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ вычетов по модулю 3, положив

$$z_3(\mathbb{Q}_{0,1}) = 0, \quad z_3(\mathbb{Q}_{1,1}) = 1, \quad z_3(\mathbb{Q}_{1,0}) = 2.$$

Заметим теперь, что для $r_1, r_2 \in \mathbb{ZP}^2$ таких, что $z_3(r_1) \neq z_3(r_2)$, выполнено

$$z_3(r_1 \oplus r_2) = 3 - z_3(r_1) - z_3(r_2) \neq z_3(r_k),\ k = 1, 2.$$

Установлена

Теорема 4. *Для элементов $f_{j,k}$ ряда Фарея верно:*

$$z_3(f_{j,k}) = (-1)^{j-1}(k \bmod 3),\ j \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots, 2^j.$$

Таким образом, члены последовательности $f_{j,k}, k = 1, \ldots, 2^j$, поочередно циклически попадают в множества $\mathbb{Q}_{0,1}, \mathbb{Q}_{1,1}, \mathbb{Q}_{1,0}, \mathbb{Q}_{0,1}, \mathbb{Q}_{1,1}, \ldots$ при нечетном j, и в множества $\mathbb{Q}_{0,1}, \mathbb{Q}_{1,0}, \mathbb{Q}_{1,1}, \mathbb{Q}_{0,1,\mathbb{Q}_{1,0}}, \ldots$ при четном j.

Доказательство – по индукции. Проверяем, что $z_3(f_{1,0}) = z_3(0:1) = 0 \neq 1 = z_3(1:1) = z_3(f_{1,1})$.

Для точек $f_{j,2k}$ множества F_j с четными номерами, так как $(k \bmod 3) + (2k \bmod 3) = 0$, то $z_3(f_{j,2k}) = z_3(f_{j-1,k})$. Далее, так как, по индукции, $z_3(f_{j-1,k-1}) \neq z_3(f_{j-1,k})$, то для точек с нечетными индексами $2k-1$ аналогично получаем $z_3(f_{j,2k-1}) = (-1)^{j-2}(3 - ((k-1) \bmod 3) - (k \bmod 3)) = (-1)^{j-1}((2k-1) \bmod 3))$.

Теперь можно сосчитать число членов рядов Фарея разной четности.

Следствие 1. *Для рядов Фарея* $F_j,\ j \in \mathbb{N}$, *верно*

$$\sharp\{F_j \cap \mathbb{Q}_{0,1}\} = \ \sharp\{F_j \cap \mathbb{Q}_{1,1}\} = \begin{cases} \dfrac{2^{j-1}+1}{3}, & j = 2s, \\ \dfrac{2^{j-1}+2}{3}, & j = 2s+1, \end{cases}$$

$$\sharp\{F_j \cap \mathbb{Q}_{1,0}\} = \begin{cases} \dfrac{2^{j-1}+1}{3}, & j = 2s, \\ \dfrac{2^{j-1}-1}{3}, & j = 2s+1. \end{cases}$$

Таким образом, среди дробей ряда Фарея F_j (как и среди G_j) примерно поровну – по одной трети – нечетных рациональных чисел и четных рациональных чисел типов $(0,1)$ и $(1,0)$. Мощности этих подмножеств совпадают или отличаются на единицу.

Напомним, как обстоят дела с точки зрения метрической теории чисел.

Шагу разложения в правильную цепную дробь отвечает преобразование Гаусса полуинтервал $[0,1[$

$$\phi(x) = \{\frac{1}{x}\}; \quad \phi : [0,1] \to [0,1].$$

Здесь $\{\ .\ \}$ – операция выделения дробной части числа.

Относительно преобразования Гаусса инвариантны некоторые меры на отрезке $[0,1]$, среди которых есть единственная мера ν, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега μ. Функцию распределения и плотность распределения меры ν равны соответственно $F(x) = \log_2(1+x)$ и $f(x) = \dfrac{1}{\ln 2(1+x)}$. Для измеримых множеств $X \in [0,1[$ их инвариантная мера $\nu(X)$ равна мере полного прообраза X:

$$\nu(X) = \nu(\phi^{-1}(X)).$$

Частота, с которой на j-м шаге разложения в правильную цепную дробь встретится неполное частное $b_j = k,\ k \in \mathbb{N}$, стремится к инвариантной мере $\nu(I_k)$ отрезка $I_k = [\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}]$, т.е к величине $-\log_2(1 - \dfrac{1}{(k+1)^2}) \neq$

0. Скорость сходимости может быть оценена величиной $Ce^{-\lambda j}$, где C, λ – положительные постоянные [4]. Из этого сильного результата следует, что с вероятностью, равной, с точностью до экспоненциально малых по j добавок,

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\log_2(1-\frac{1}{4k^2}) = \log_2 \frac{4}{\pi} = A \approx 0,651496,$$

неполное частное b_j будет нечетным числом. Погрешность не превосходит $Ce^{-\lambda j}$.

Множество $B_{j,k}$, определенное свойством, что j-е неполное частное b_j разложений точек x этого множества в цепную дробь равно k – борелевское измеримое множество. То же верно и для множества $H_{j,k}$, где j-я подходящая дробь к x принадлежит $\mathbb{Q}_k,\ k \in Z_2^2$.

Первое неполное частное b_1 будет нечетным числом с вероятностью, равной сумме длин интервалов I_k с нечетными индексами k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}) = \ln 2 \approx 0,693147.$$

Четность $(j+1)$-й подходящей дроби зависит от четностей b_{j+1} и j-й и $(j-1)$-й подходящих дробей r_j, r_{j-1}. Для комбинаций последних четностей есть 6 вариантов, вероятности которых P_j мы перенумеруем одним индексом с помощью следующей таблицы:

$$\begin{array}{lcll}
P_1(j) & \longleftrightarrow & r_j \in \mathbb{Q}_{1,0}, & r_{j-1} \in \mathbb{Q}_{0,1}, \\
P_2(j) & \longleftrightarrow & r_j \in \mathbb{Q}_{0,1}, & r_{j-1} \in \mathbb{Q}_{1,1}, \\
P_3(j) & \longleftrightarrow & r_j \in \mathbb{Q}_{1,1}, & r_{j-1} \in \mathbb{Q}_{1,0}, \\
P_4(j) & \longleftrightarrow & r_j \in \mathbb{Q}_{0,1}, & r_{j-1} \in \mathbb{Q}_{1,0}, \\
P_5(j) & \longleftrightarrow & r_j \in \mathbb{Q}_{1,0}, & r_{j-1} \in \mathbb{Q}_{1,1}, \\
P_6(j) & \longleftrightarrow & r_j \in \mathbb{Q}_{1,1}, & r_{j-1} \in \mathbb{Q}_{0,1}.
\end{array}$$

Остальные сочетания четностей не реализуются из-за унимодулярности матрицы, составленной из числителей и знаменателей подходящих дробей r_j, r_{j-1}.

Для чисел α полуинтервала $[0,1[$ подходящая дробь с номером 0 равна $0 = \dfrac{0}{1} \in \mathbb{Q}_{0,1}$. Поэтому

$$p_{(0,1)}(0) = 1,\ \ p_{(1,1)}(0) = 0,\ \ p_{(1,0)}(0) = 0.$$

Далее, числителем первой подходящей дроби всегда будет 1, а знаменателем – число b_1, четность которого определяет ситуацию. Поэтому

$$p_{(0,1)}(2) = 0,\ \ p_{(1,1)}(2) = \ln 2,\ \ p_{(1,0)}(2) = 1 - \ln 2.$$

Таким образом, начальный вектор $\mathbf{P}(\mathbf{0})$ равен

$$\mathbf{P}(0) = (\ln 2, 0, 0, 0, 0, 1 - \ln 2).$$

Переход от вектора $\mathbf{P}(j)$ к $\mathbf{P}(j+1)$ осуществляется (6×6)-матрицей $M(j)$, имеющей вид

$$M(j) = M + \mathcal{E}(j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B & A & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & B & 0 & 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & A & B & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{E}(j), \text{ где: } \begin{array}{l} A = \log_2 \dfrac{4}{\pi}, \\ A + B = 1, \\ B = \log_2 \dfrac{\pi}{2}, \end{array}$$

а $\mathcal{E}(j)$ – также (6×6)-матрица с экспоненциально малыми (по j) элементами.

Матрица $M(j)$ является марковской матрицей: все ее элементы неотрицательны а сумма элементов строки равна 1. Однако некторые ее элементы равны нулю. Легко проверить, что куб этой матрицы уже будет положительной марковской матрицей, т.е. все элементы этой матрицы будут положительны и больше некоторой абсолютной константы, точное выражение для которой здесь не важно.

Поэтому последовательность композиций матриц $M_j \stackrel{\text{def}}{=} M(3j)M(3j-1)M(3j-2),\ j \in \mathbb{N}$, преобразует начальный вектор $\mathbf{P}(0)$ в вектор вероятностей (частот) состояния

$$M_j M_{j-1} \dots M_1 \mathbf{P}(0).$$

Последние векторы при $j \to \infty$ сходятся (см. [7]) к старшему собственному вектору (с максиальным по модулю собственным значением) матрицы M (так же как и матрицы M^2).

Доказательство этого утверждения элементарно, но громоздко, и мы его не приводим. Можно оценить и скорость сходимости – она экспоненциальная, определяемая вторыми по модулю собственными значениями матрицы M.

Характеристический многочлен матрицы M равен

$$\begin{gathered}(x-1)\ \ (x^2 + (1-A)\ x + 1 - 2A)^2\ \ (x + 2A - 1) = \\ (x-1)\ \ (x^2 + \log_2 \frac{\pi}{2}\ \ x + \log_2 \frac{\pi^2}{8})^2\ \ (x - \log_2 \frac{\pi^2}{8}),\end{gathered}$$

а его корни равны

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 1,\\
&x_{3,4;5,6} = \log_2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \pm i\, \frac{\sqrt{-\log_2^2 \pi + 10 \log_2 \pi - 13}}{2} \approx 0,325748\ldots \pm\, i\; 0,443712\ldots,\\
&x_6 = \log_2 \frac{\pi^2}{8} = |x|^2_{3,4;5,6}.
\end{aligned}
$$

Абсолютные величины корней подчинены неравенству

$$x_1 = 1 \; > \; |x_2| = |x_3| = |x_4| = |x_5| = 0,550447\ldots \; > \; |x_6| = 0,302992\ldots$$

У куба M^3 матрицы M собственные значения будут кубами собственных значений матрицы M, и для модулей их собственных значений есть аналогичное неравенство.

Максимальное по модулю собственное значеник M равно 1, а отвечающий ему нормированный собственный вектор равен

$$\mathbf{P} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}).$$

Обозначим $p_r(j),\ r \in Z_2^2$ частоты встречаемости подходящих дробей уровня j, принадлежащие классам $\mathbb{Q}_r$.

Производя в $\mathbf{P}_k$ суммирование по вариантам четности r_{j-1}, получаем предельные вероятности p_r:

$$\lim_{j\to\infty} p_r(j) = \mathbf{p}_r = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

Установлена

Теорема 6. *Вероятности того, что j-я подходящая дробь к числу принадлежит $\mathbb{Q}_{(0,1)}, \mathbb{Q}_{(1,1)}, \mathbb{Q}_{(1,0)}$ стремятся к $1/3$:*

$$\lim_{j\to\infty} \mu(H_{j,(0,1)}) = \lim_{j\to\infty} \mu(H_{j,(1,1)}) = \lim_{j\to\infty} \mu(H_{j,(1,0)}) = \frac{1}{3}.$$

Список литературы

1. Хинчин А.Я. Цепные дроби // Гос. издат. физ.-мат. литературы, М., 1961, 112 с.

2. Khinchin A.Ya. Zur metrischen Kettenbruchtheorie // Compositio Mathematica, 1935, T. 3, N. 3, 275–285.

3. Levy P. Théorie de l'addition variables alèatoires // Paris, 1937, 320 p.

4. Lévy P. Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue // Bull. Soc. Math., 1929, 57, 178–194.

5. Парусников В.И. Цепные дроби до ближайшего четного. Препринт N 78. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Москва, 2008г., 29 с.

6. Парусников В.И. Цепные дроби до ближайшего четного. Короткий вариант. Препринт N 79. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Москва, 2008г., 14 с.

7. Беллман Р. Введение в теорию матриц // М., "Наука Главная редакция физ.-мат. литературы, 1976. 352. Гл. 14.