ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 64 за 2010 г.

Варин В.П.

Плоские разложения решений ОДУ вблизи особенности

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.П. Варин

ПЛОСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДУ ВБЛИЗИ ОСОБЕННОСТИ

Москва, 2010 г.

УДК 521.1+531.314

В.П. Варин. Плоские разложения решений ОДУ вблизи особенности. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Рассматриваются полиномиальные системы ОДУ на плоскости вблизи вырожденной немонодромной особой точки. Исследуются решения, входящие в особую точку, которые в первом приближении представлены степенным рядом с экспоненциальной добавкой. Эти решения однозначно определяются в виде отрезков рядов по плоским функциям с произвольным числом членов, что обобщает понятие экспоненциальной добавки. Эти ряды могут как сходиться, так и расходиться. Однако и в случае расходимости они обладают хорошими аппроксимационными свойствами.

V.P. Varin. Flat expansions of solutions to ODEs at singularities. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

We consider plane polynomial systems of ODEs at degenerate non-monodromial singularities. We investigate the solutions passing through the singularity which in the first approximation are given by power series with an exponential addition. These solutions are uniquely determined as truncated series of arbirtrary length in flat functions, which generalizes the notion of exponential addition. These series can converge or diverge. However even in the case of divergence they possess good approximative properties.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00082.

E-mail: varin@keldysh.ru
http: www.keldysh.ru
(см. электронная библиотека, каталог публикаций сотрудников ИПМ, препринт).

§ 1. Введение

Разложения решений ОДУ вблизи особой точки в ряды по элементарным функциям имеют не только теоретическое значение, но, в последнее время, приобрели и большое вычислительное значение. Это во многом связано с новыми возможностями, которые предоставляют методы компьютерной алгебры, реализованные на мощных компьютерах. Полученные ряды могут теперь содержать множество членов и эффективно использоваться для вычислений с очень большой точностью (тысячи десятичных разрядов) [1]. Однако существует ряд нерешенных проблем уже для простейшего случая вырожденной особой точки у полиномиальной системы на плоскости, которая может быть записана в виде одного уравнения первого порядка

$$p(x,y)\frac{dy}{dx} - q(x,y) = 0, \tag{1}$$

где p и q – полиномы от x, y.

Для монодромных особых точек – это проблема центра-фокуса, которая в общем случае остается практически неразрешимой. Мы не будем здесь ее обсуждать (см. [2]). Проблема транзитных траекторий (подходящих сколь угодно близко к особенности, но не входящих в нее), также мало исследована [3]. Оказалось также, что не существует исчерпывающего описания возможных типов разложений решения, входящего в особенность. Это могут быть степенные разложения, в том числе по дробным (рациональным) или иррациональным показателям степени, или разложения могут быть по квазирегулярным функциям, т.е. включать логарифмы.

Возможные типы разложений этим не исчерпываются, так как существует еще так называемая экспоненциальная добавка к степенному решению для некоторых типов уравнений (1). Классический пример Эйлера – уравнение

$$x^2\frac{d}{dx}y(x) = y(x) - x \tag{2}$$

имеет решение в виде формального степенного ряда

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)!\,x^k,$$

причем общее (формальное) решение уравнения (2) записывается в виде

$$y(x) = y_0(x) + C\mathrm{e}^{-1/x}, \tag{3}$$

где C – произвольная вещественная константа.

Уравнение (2) дает простейший пример экспоненциальной или плоской добавки к степенному решению. Очевидно, что если взять возмущение уравнения (2), добавив к нему нелинейные члены, то линейная часть общего решения (3) (включая экспоненциальную добавку) сохранится. Однако очевидно также, что одна экспоненциальная добавка к степенному решению возмущенного уравнения не может дать общее решение. Как будет показано, общее решение здесь представляется в виде формального ряда по плоским функциям, т.е. функциям убывающим быстрее любой степени. Ряды этого типа ранее не исследовались.

В этой работе мы дадим необходимое и достаточное условие существования формальных разложений решений уравнения (1) вблизи особенности (начала координат) по плоским функциям. Как мы покажем, такое разложение (если существует) – единственно, и записывается в следующем виде

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C^k \mathrm{e}^{kR(x)} y_k(x), \tag{4}$$

где C – произвольная вещественная константа; $y_0(x)$ – формальный степенной ряд по рациональным положительным степеням x; $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ – формальные степенные ряды по рациональным возрастающим степеням x, которые могут начинаться с отрицательной степени x (коэффициент при младшем члене ряда $y_1(x)$ равен 1 ввиду произвольности C); $R(x)$ – полином по рациональным отрицательным степеням x с отрицательным коэффициентом при младшей (наименьшей) степени.

Формальные степенные ряды $y_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, входящие в разложение (4), могут как расходиться, так и сходиться, а также обрываться (т.е. быть полиномами). Например, в уравнении (2): $y_0(x)$ – расходится, $y_1(x) = 1$, $y_k(x) = 0$, $k = 2, \ldots$

Более содержательный пример можно сконструировать следующим образом.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$y(x) = \frac{P(x)}{1 - C\,Q(x)\mathrm{e}^{R(x)}}, \tag{5}$$

где P и Q – рациональные функции, $P(0) = 0$, а $R(x)$ – полином по отрицательным степеням x. Разлагая правую часть уравнения (5) по степеням C, получим разложение вида (4), где все ряды сходятся, включая $y_0(x) = P(x)$. Если продифференцировать уравнение (5) по x и подставить туда константу C, найденную из уравнения (5), то в результате получается нелинейное уравнение вида (1), имеющее функцию (5) в качестве общего решения. ■

Таким образом, наличие экспоненциальной добавки не свидетельствует о расходимости степенного ряда $y_0(x)$.

В § 2 приводится необходимое и достаточное условие существования разложения (4). Необходимость при этом эквивалентна существованию полинома $R(x)$ нужного вида, который находится однозначно вместе с первой экспоненциальной добавкой. Условие существования экспоненциальной добавки является и достаточным, что доказывается построением разложения (4) по индукции.

В § 3 даются несколько примеров вычисления рядов (4). Ряды $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ вычисляются методом неопределенных коэффициентов. При этом результаты § 2 гарантируют разрешимость всех линейных уравнений для коэффициентов, и логарифмы в степенных разложениях $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ не возникают.

В § 4 на примере уравнения (2), для которого известно явное решение, выражаемое через интегральную экспоненту, показывается, что заведомо расходящиеся ряды могут давать хорошие приближения к точному решению, если уметь вычислять необходимое число членов.

§ 2. Существование и единственность плоских разложений

Предположим, что уравнение (1) имеет решение $y_0(x)$ в виде формального степенного ряда по возрастающим положительным рациональным степеням x. Пусть $y_0(x)$ является изолированным решением, т.е. разложение не включает произвольную константу. Коэффициенты решения $y_0(x)$, как правило, не могут быть выражены в общем виде, однако предполагается, что формальный ряд можно продолжить неограниченно.

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях уравнение* (1) *имеет решение вида* (4) *тогда и только тогда, когда степенное решение* $y_0(x)$ *имеет экспоненциальную добавку.*

Доказательство. Найдем сначала необходимое условие того, что решение $y_0(x)$ имеет экспоненциальную (плоскую) добавку. Для этого запишем решение в виде $y(x) = y_0(x) + z_1(x)$, где $z_1(x)$ – некоторая функция, убывающая быстрее любой степени x при $x \to 0$. Линеаризуя уравнение (1) на решении $y_0(x)$, получаем уравнение для функции $z_1(x)$

$$\mathcal{D}(z_1(x)) = p(x, y_0(x))z_1'(x) - \left(q_y(x, y_0(x)) - p_y(x, y_0(x))y_0'(x)\right) z_1(x) = 0, \quad (6)$$

где $p_y = \partial p/\partial y$, $q_y = \partial q/\partial y$. Уравнение (6) имеет решение

$$z_1(x) = C\exp\left(\int_0^x S(t)dt\right), \quad (7)$$

где C – произвольная вещественная константа, и

$$S(x) = \frac{q_y(x, y_0(x)) - p_y(x, y_0(x))y_0'(x)}{p(x, y_0(x))}.$$

Функция $S(x)$ является отношением двух рядов по возрастающим степеням x. Разложим ее в ряд. Пусть $S(x) = B_r x^{r-1} + \ldots$ Условие

$$r < 0 \tag{8}$$

является необходимым для существования плоской добавки, так как иначе при интегрировании в формуле (7) в показателе экспоненты будут только положительные степени x и, возможно, логарифм (при $r = 0$), т.е. $z_1(x)$ представляется в виде степенного ряда.

Проведем почленное интегрирование степенного ряда $S(x)$ и выделим члены с отрицательными степенями, которые оставим в экспоненте. Члены с положительными степенями и логарифм в экспоненте можно переразложить в степенной ряд. Таким образом,

$$z_1(x) = C\mathrm{e}^{R(x)}y_1(x), \tag{9}$$

как и требовалось согласно формуле (4). Здесь полином $R(x) = Bx^r + \ldots$ и ряд $y_1(x)$ определяются однозначно ($B = B_r/r$, см. Замечание 1).

Рассуждая по индукции, представим решение уравнения (1) в виде

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{l=1}^{k-1} C^l \mathrm{e}^{lR(x)} y_l(x) + C^k z_k(x) + o(C^k), \tag{10}$$

т.е. найдем k-ю плоскую добавку. Для этого подставим решение (10) в уравнение (1) и разложим его в ряд Тейлора по C.

Уравнение для $z_k(x)$ имеет вид

$$\mathcal{D}(z_k(x)) = \mathrm{e}^{kR(x)} F_k(x), \tag{11}$$

т.е. уравнение для $z_k(x)$ является неоднородным уравнением (6), где вместо $z_1(x)$ стоит $z_k(x)$ и вместо нуля в правой части стоит однородная функция от $\mathrm{e}^{R(x)}$ степени k с коэффициентами из степенных рядов, определяемых ранее найденными $y_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Последнее утверждение следует из того, что степень экспоненты не меняется при дифференцировании и равна k в k-м члене разложения уравнения (1) в ряд Тейлора по C. Таким образом, $F_k(x)$ – известный нам степенной ряд.

Будем решать неоднородное уравнение (11) методом вариации постоянной. Подставим функцию $z_k(x)$ в виде $z_k(x) = W_k(x)y_1(x)$ в уравнение (11) и учтем при этом формулу (6) для однородного уравнения. Тогда для функции $W_k(x)$ получим уравнение

$$W_k'(x) - R'(x)W_k(x) = \frac{e^{kR(x)}F_k(x)}{p(x, y_0(x))y_1(x)}. \tag{12}$$

Подставим в уравнение (12) функцию $W_k(x)$ в виде $W_k(x) = e^{kR(x)}w_k(x)$. Для функции $w_k(x)$ получим уравнение

$$w_k'(x) + (k-1)R'(x)w_k(x) = \frac{F_k(x)}{p(x, y_0(x))y_1(x)}. \tag{13}$$

Общее решение уравнения (13) включает одну экспоненциальную добавку $C_k \exp(-(k-1)R(x))$, которой следует пренебречь, так как эта компонента решения изменит только первую экспоненциальную добавку (9), которая уже найдена. Поэтому доказательство будет завершено, если доказать, что решение уравнения (13) однозначно находится в виде степенного ряда.

Сделаем в уравнении (13) сходящуюся степенную замену независимой переменной $x = u + o(u)$ таким образом, что полином $R(x) = Bx^r + \dots$ преобразуется в моном Bu^r. Такая замена, очевидно, существует и единственна. Тогда уравнение (13) записывается в виде

$$\frac{dw_k(u)}{du} + B(k-1)ru^{r-1}w_k(u) = (1 + o(1)(u))\frac{F_k(x(u))}{p(x(u), y_0(x(u)))y_1(x(u))}, \tag{14}$$

где $o(1)(u)$ – ряд по положительным рациональным степеням u.

Уравнение (14) линейно, и в правой части стоит степенной ряд. Поэтому достаточно доказать разрешимость уравнения (14) в виде степенного ряда, когда в правой части стоит моном u^s с произвольной степенью s. Эта разрешимость следует из Леммы 1. Доказательство закончено.

Лемма 1. *Пусть $r < 0$, $B \neq 0$, и s – произвольная вещественная константа. Тогда уравнение*

$$\frac{dw(x)}{dx} + Brx^{r-1}w(x) = x^{s-1}$$

однозначно разрешимо в виде формального степенного ряда

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{s-mr}}{B^m r^m} \prod_{k=1}^{m-1}(kr - s) = \frac{x^{s-r}}{Br\Gamma\left(1-\frac{s}{r}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + 1 - \frac{s}{r}\right) x^{-nr} B^{-n}. \tag{15}$$

При $s/r \in \mathbb{N}$ ряд (15) обрывается.

Доказательство проводится прямой подстановкой.

Замечание 1. В доказательстве Теоремы 1 предполагалось $B < 0$, что, очевидно, необходимо для того, чтобы функция $z_1(x)$ была плоской. Однако все выкладки остаются в силе и для $B>0$. Такие функции, возможно, описывают асимптотику транзитных траекторий вблизи решения $y_0(x)$, которое в этом случае может включать и отрицательные степени x.

§ 3. Примеры вычисления плоских разложений

В Примере 1 приводится первый интеграл уравнения, которое нетрудно восстановить, а разложение (4) легко получается из первого интеграла (5). Пример 1 легко обобщается, если взять первый интеграл в виде некоторой алгебраической функции от x, y и $C\exp(R(x))$, и, продифференцировав первый интеграл, исключить экспоненту. В этом случае, как оказалось, разложение решения проще получить прямо из дифференциального уравнения, следуя алгоритму § 2, нежели выделять решение из первого интеграла. В таких случаях, очевидно, все ряды будут сходиться.

Пример 2. Рассмотрим первый интеграл вида

$$y(x)=\frac{x^2(x^2+y(x)^2)}{2x-y(x)}\left(x^2+y(x)^2+C\exp((x-1)/x^2)\right)^{-1}. \tag{16}$$

Уравнение (16) записывается в виде уравнения 4-го порядка от $y(x)$ с коэффициентами из многочленов от x и экспоненты. При $C=0$ это уравнение имеет кратный корень $y(x)=x$, поэтому при $C\neq 0$ этот корень расщепляется таким образом, что не существует вещественного разложения решения по C. Тем не менее, общее решение дифференциального уравнения (которое мы не выписываем, так как оно довольно громоздко) легко вычисляется и имеет вид

$$y(x)=x+a-\frac{a^2}{2\,x}-\frac{a^3}{8\,x^2}+\frac{3\,a^4}{4\,x^3}-\frac{145\,a^5}{128\,x^4}+O(a^6),\quad a=1/2\,\sqrt{-2\,C}\exp\left(\frac{x-1}{2\,x^2}\right).\blacksquare$$

Следующий пример показывает, что для существования плоской добавки наличие горизонтального ребра ломаной Ньютона (как в уравнении (2)) не является необходимым.

Пример 3. Рассмотрим уравнение с одним ребром ломаной Ньютона

$$x^4y'=y^3-x^3. \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет одну степенную асимптотику $y(x)\asymp x$. Вычислим степенной ряд $y_0(x)$ и по нему определим полином $R(x)=-3/x$. Следуя алгоритму § 2, получаем плоское разложение решения

$$\begin{aligned}
&y=x+\tfrac{1}{3}\,x^2+\tfrac{1}{9}\,x^3+\tfrac{2}{81}\,x^4-\tfrac{2}{243}\,x^5-\tfrac{5}{243}\,x^6-\tfrac{181}{6561}\,x^7-\tfrac{760}{19683}\,x^8+\dots\\
&+a\left(x^2+x^3+\tfrac{37}{54}\,x^4+\tfrac{59}{162}\,x^5+\tfrac{775}{5832}\,x^6-\tfrac{79}{9720}\,x^7-\tfrac{426829}{4723920}\,x^8+\dots\right)\\
&+a^2\left(x^3+2\,x^4+\tfrac{58}{27}\,x^5+\tfrac{16}{9}\,x^6+\tfrac{782}{729}\,x^7+\tfrac{5956}{10935}\,x^8-\tfrac{42716}{295245}\,x^9+\dots\right)\\
&+a^3\left(\tfrac{7}{6}\,x^4+\tfrac{31}{9}\,x^5+\tfrac{142}{27}\,x^6+\tfrac{5641}{972}\,x^7+\tfrac{57637}{11664}\,x^8+\tfrac{37718}{10935}\,x^9+\dots\right)+\dots,
\end{aligned} \tag{18}$$

где $a = C\exp(-3/x)$. Вычисление последующих плоских добавок не представляет трудностей, так как все они вычисляются по одному алгоритму. ■

Ряды по плоским функциям легко обращаются, если взять y в качестве независимой переменной в дифференциальном уравнении и заново найти плоское разложение, в то время как непосредственное обращение ряда (4) не очевидно.

В заключение § 3 приведем пример системы с двумя ребрами ломаной Ньютона, имеющей две степенные асимптотики, одна из которых имеет экспоненциальную добавку. Этот пример также показывает, что главный член степенной асимптотики не определяет плоскую добавку.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$(y^3 - x^2)y' + x^3 = 0. \tag{19}$$

Уравнение (19) имеет два степенных решения, первое из которых

$$y(x) = 1/2\,x^2 + 1/48\,x^6 + \frac{1}{320}\,x^{10} + O(x^{14}),$$

как нетрудно убедиться, не имеет плоской добавки.

Второе степенное решение имеет вид

$$y_0(x) = x^{2/3} - 1/2\,x^2 - x^{10/3} + O(x^{14/3}),$$

причем главный член степенной асимптотики аннулирует полином $p(x, y)$, т.е. не позволяет определить полином $R(x) = -1/x^{4/3}$ плоской добавки.

Обозначим $w = x^{1/3}$, $a = C\exp(-1/w^4)$, тогда общее решение уравнения (19) имеет вид

$$\begin{aligned}
&y = w^2 - \tfrac{1}{2}\,w^6 - w^{10} - \tfrac{55}{12}\,w^{14}\ldots\\
&+a\left(w^{-16} - \tfrac{13}{2}\,w^{-12} - \tfrac{25}{24}\,w^{-8} - \tfrac{409}{12}\,w^{-4} - \tfrac{390377}{1152} - \tfrac{43060153}{11520}\,w^4 + \ldots\right)\\
&+a^2\left(2\,w^{-38} - 27\,w^{-34} + \tfrac{569}{6}\,w^{-30} - \tfrac{1009}{6}\,w^{-26} - \tfrac{8023}{18}\,w^{-22} + \ldots\right)\\
&+a^3\left(6\,w^{-60} - 126\,w^{-56} + \tfrac{11027}{12}\,w^{-52} - \tfrac{25649}{8}\,w^{-48} + \tfrac{847471}{192}\,w^{-44} + \ldots\right) +\\
&\ldots \blacksquare
\end{aligned} \tag{20}$$

В разложениях (18) и (20) нами вычислено около ста членов в каждой экспоненциальной добавке, которые, по понятным причинам, здесь не приводятся. Мы можем выслать их в электронном виде по запросу.

Вопрос о сходимости полученных рядов (кроме заведомо сходящихся, как в Примере 2) остается открытым. Согласно Лемме 1, коэффициенты рядов могут расти как $n!$, что и реализуется в примере Эйлера (2). Однако эти ряды могут обрываться или давать в сумме сходящиеся ряды. Этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании.

§ 4. Аппроксимационные свойства плоских разложений

В случае сходимости разложения (4) (т.е. сходимости всех входящих в него рядов) это семейство решений заполняет некоторый криволинейный сектор плоскости $\mathbb{R}^2$ вблизи особой точки, поскольку в решение входит произвольная вещественная константа $C \in (-\infty, +\infty)$. Пример Эйлера (2) показывает, что и в случае расходимости разложение (4) соответствует некоторому семейству функций, заполняющих криволинейный сектор. Мы не будем здесь обсуждать возможность суммирования заведомо расходящихся рядов (см. [4]), так как практически мы всегда имеем дело лишь с отрезками рядов.

Нас интересует применение рядов плоских функций к вычислению решения вблизи особенности с большой и контролируемой точностью. Вблизи сингулярности это, может быть, единственная возможность оценить решение, так как стандартные численные методы там не применимы.

Степенной ряд $y_0(x)$, будучи главным членом плоского разложения (4), играет основную роль в аппроксимации решения. Покажем на примере Эйлера, что расходящийся степенной ряд аппроксимирует решение почти столь же хорошо, как и сходящийся, если уметь вычислять нужное число членов.

Степенной ряд, представляющий решение уравнения (2), соответствует частному решению уравнения Эйлера:

$$y(x) = \mathrm{Ei}\left(x^{-1}\right) \mathrm{e}^{-1/x}, \tag{21}$$

где $\mathrm{Ei}(x)$ – интегральная экспонента. Поэтому эти два решения легко сравнить.

Как оказалось, абсолютная погрешность аппроксимации решения (21) отрезком степенного ряда $\varepsilon = \max|y(x) - y_0(x)|$ на интервале $x \in [0, x_0]$, $x_0 < 1$, равна по порядку величине последнего члена отрезка ряда $y_0(x)$ в крайней точке интервала x_0. Это означает, что погрешность ε можно сделать сколь угодно малой, правда, на сколь угодно малом интервале. Практически это означает, что чем меньше интервал, тем большее число членов степенного ряда можно использовать для аппроксимации решения.

Заметим, что пример Эйлера, в некотором смысле, является наихудшим для демонстрации аппроксимационных свойств степенных разложений, так как в нем реализуется наибольший рост коэффициентов (см. Лемму 1).

Теперь рассмотрим применение плоских добавок в вычислениях на примере уравнения (17) (Пример 3). Это уравнение сильно вырождено, поэтому следует ожидать, что разностные схемы будут малоэффективны вблизи нуля.

Будем использовать разложение (18) с четырьмя плоскими добавками, в каждой из которых оставлены степени x не превосходящие $n = 50$. Вычисленное решение в некоторой точке будем сравнивать с решением, полученным численным интегрированием уравнения (17).

Возьмем $x_0 = 0.1$. При $C = 10^{13}$ вычисляем y_0(C) = 0.115024120288660 по ряду (18) (оставляем 15 десятичных разрядов после точки и без округления). Взяв эти значения в качестве начальных данных, интегрируем уравнение (17) до значения $x_1 = 0.05$ и получаем y_1(C) = 0.050847373626596. Вычислим последнее значение по ряду (18) и сравним с численным. Ошибка составляет 1.088^{-13}.

При $C = -10^{13}$ получаем значение y_0(C) = 0.0940447563740414 по ряду (18) и y_1(C) = 0.050847373626595 в точке $x_1 = 0.05$ численным интегрированием. Сравнивая со значением, вычисленным по ряду (18), получаем ошибку 1.080^{-13}.

Таким образом, выбранный отрезок ряда (18) позволяет вычислять решения уравнения (17) на интервале $[0, 0.1]$ с абсолютной погрешностью 1.0^{-13} в интервале значений $C \in [-10^{13}, 10^{13}]$. Графики решений уравнения (17) на этих интервалах показаны на рис. 1. Заметим, что процедура численного интегрирования дает совершенно неверные результаты, либо отказ при попытке интегрирования от $x_1 = 0.05$ до $x_0 = 0.1$. Это явление легко объяснимо (см. рис. 1). Решения, различные при $x = 0.1$, слипаются при $x = 0.05$ со степенным решением и практически неразличимы, поэтому интегрировать по возрастающим значениям x – это примерно то-же, что решать обратную задачу для уравнения теплопроводности.

Литература

1. *D.H. Bailey, J.M. Borwein, N.J. Calkin, R. Girgensohn, D. Russell, L.H. Moll, V.H. Moll.* Experimental Mathematics In Action. Canada, A.K. Peters, 2006.

2. *Варин В.П.* Отображения последования некоторых полиномиальных систем дифференциальных уравнений // Мат. Сборник, т. 195, N 7, с. 3-20, 2004.

3. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М., Наука, 1979.

4. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 1951.

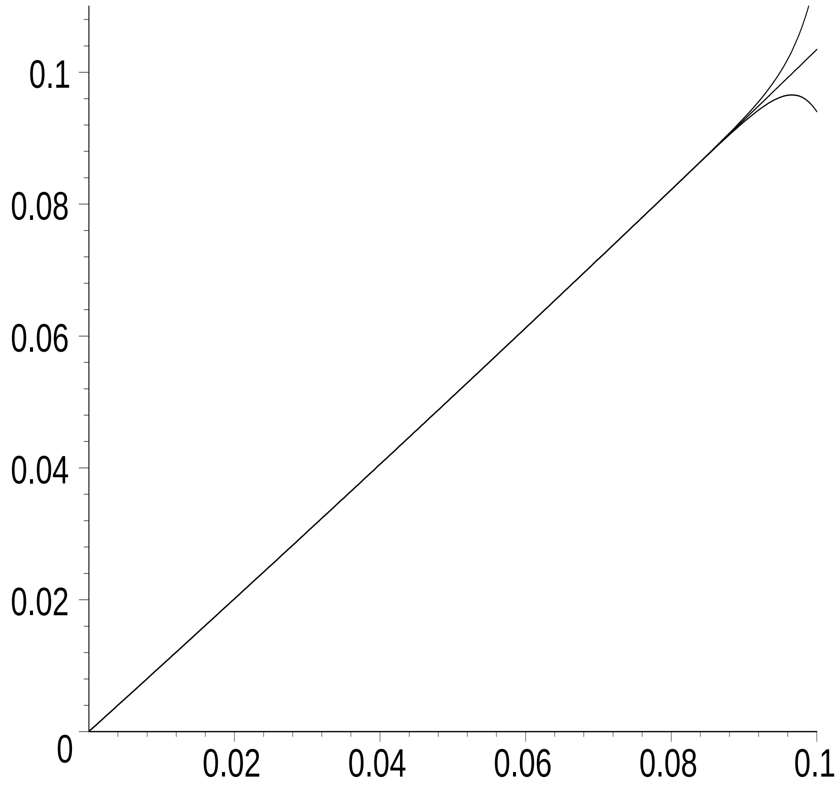

Рис. 1. Решения уравнения (17) для $C = -10^{13}$ (снизу), $C = 0$ и $C = 10^{13}$ (сверху).