ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 60 за 2010 г.

Пустыльников Л.Д., Локоть Т.В.

Алгебраические структуры, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пустыльников Л.Д., Локоть Т.В. Алгебраические структуры, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 60. 26 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-60**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

Л. Д. Пустыльников, Т. В. Локоть

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕПЛИЦЕВЫМИ И ГАНКЕЛЕВЫМИ МАТРИЦАМИ И ТЕНЗОРАМИ

Москва, 2010 г.

УДК 511.36

Л. Д. Пустыльников, Т. В. Локоть. Алгебраические структуры, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами и тензорами. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Эта работа — первая часть статьи, состоящей из двух частей. Первая часть — алгебраическая, а вторая часть — применения к быстрым вычислениям и быстрому прогнозированию. В первой части статьи доказано, что хотя пространства теплицевых и ганкелевых матриц имеют сложную алгебраическую структуру, каждое из них может быть разложено в сумму двух подпространств, которые устроены проще с алгебраической точки зрения. В частности, пространство комплексных квадратных теплицевых матриц порядка n может быть представлено в виде суммы двух подпространств, пересекающихся по пространству скалярных матриц, каждое из которых есть алгебра, сопряженная алгебре комплексных диагональных матриц порядка n. Подобные результаты справедливы в случае ганкелевых матриц, а также теплицевых и ганкелевых тензоров.

L. D. Pustyl'nikov, T. V. Lokot.. Algebraic structures related to Toeplitz and Hankel matrices and tensors. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

This is a first part of the article consisting of two parts. The first part is algebraic and the second part is applications to fast computations and fast prediction. In the first of the paper is shown that although the spaces of Toeplitz and Hankel matrices are of complicated structure from the algebraic point of view, each of them can be decomposed into a sum of two subspaces that are simpler algebraically. In particular, the space of complex square Toeplitz matrices of order n can be represented as a sum of two subspaces intersecting in the space of scalar matrices, each of which is an algebra conjugate to the algebra of complex diagonal matrices of order n. Similar results hold in the case of Hankel matrices and also Toeplitz tensors.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08-01-00082 и 09-01-00291.

сайт: www.keldysh.ru

Введение

Теплицевы и ганкелевы матрицы — классические объекты алгебры. Вычисления, связанные с теплицевыми и ганкелевыми матрицами, — одна из актуальных областей современной математики. Причина ее большой популярности и важности состоит в огромном множестве приложений, которые имеют теплицевы и ганкелевы матрицы в различных областях науки и техники. Некоторые из таких приложений указаны во второй части работы.

В отличие от матриц общего вида теплицевы и ганкелевы матрицы порядка n имеют специфическую структуру и однозначно определяются упорядоченным набором, состоящим из $(2n-1)$ числа. Благодаря этому количество арифметических и логических операций (а. о., л. о.), необходимых при решении задач линейной алгебры с такими матрицами, как правило, меньше, чем при использовании матриц порядка n общего вида. Так, например, для решения линейной системы уравнений с теплицевой матрицей порядка n найдены алгоритмы, требующие выполнения $O(n \ln n)$ а. о. при $n \to \infty$ ([6, 22, 44]), тогда как в случае произвольных матриц порядка n в существующих алгоритмах количество необходимых а.о. превышает Cn^{α}, где $\alpha > 2$, $C > 0$ — абсолютная константа. Многие из разработанных алгоритмов особенно эффективны при больших n и они называются асимптотически быстрыми. Однако при не очень больших n сложность этих алгоритмов (т. е. количество необходимых а. о. и л. о.) может оказаться выше, чем в других алгоритмах, и использовать их оказывается нецелесообразно.

Одно из перспективных направлений по увеличению быстродействия работы ЭВМ состоит в распараллеливании вычислительного процесса и использовании параллельно работающих процессоров. Сущность распараллеливания состоит в том, что все производимые ЭВМ операции распределяются по группам и операции в одной группе выполняются одновременно. Дадим более строгое описание распараллеливания. Предположим, что операции алгоритма разбиты на группы, упорядоченные так, что каждая операция любой группы зависит либо от начальных данных, либо от результата выполнения операций, находящихся в предыдущих группах. Такое представление называется параллельной формой алгоритма [2]. Каждая группа операций называется ярусом, число групп — высотой, а максимальное число операций в ярусе — шириной параллельной формы. Ясно, что высота характеризует сложность алгоритма и в дальнейшем будет обозначать количество операций, которые необходимо выполнить при распараллеливании вычислений, тогда как ширина определяет количество параллельно работающих процессоров, число которых здесь будет предполагаться сколь угодно большим.

В данной работе описаны результаты, связанные как с быстрыми, так и с параллельными вычислениями в задачах, использующих теплицевы и ганкелевы матрицы и тензоры, которые эквивалентны двухуровневым матрицам. В основе этих результатов лежат теоремы об алгебраической структуре указанных матриц и тензоров (п. 1, 2, 3). эти теоремы представляют самостоятельный интерес, так как они вскрывают природу теплицевых и ганкелевых матриц и тензоров. Непосредственно вычислениям посвящена вторая часть работы, в которой указаны алгоритмы наименьшей сложности, и описаны применения к задаче прогнозирования временных рядов (сигналов).

Имеется ряд книг и обзоров, которые достаточно полно охватывают алгебраические, аналитические и вычислительные аспекты проблематики, связанной с теплицевыми и ганкелевыми матрицами. Среди них отметим книги [5], [7] и обзор [3]. Укажем работы, которые непосредственно связаны с содержанием нашей работы: [1], [4], [8], [9], [13]–[15], [27], [32], [42]. Нумерация определений, лемм и теорем двойная: указывается номер раздела и через точку номер определения (леммы, теоремы).

§1. Алгебраические структуры пространств теплицевых и ганкелевых матриц

1.1. Основные определения

Матрицы, рассматриваемые в этой работе — квадратные, комплексные, имеют порядок n, за исключением тех случаев, которые указаны в тексте. Если A — матрица порядка n, то будем ее и ее элементы обозначать в виде $A = (a_{sj})$, где $s = 0, \ldots, n-1$, $j = 0, \ldots, n-1$. Иногда для четкости при обозначении матричных элементов a_{sj} между индексами будем писать запятую: $a_{s,j}$.

Определение 1.1. Матрица $A = (a_{sj})$ называется:

1) теплицевой, если $a_{sj} = a_{kl}$ при $s - j = k - l$;

2) ганкелевой, если $a_{sj} = a_{kl}$ при $s + j = k + l$;

3) циркулянтной, если $a_{sj} = a_{kl}$ при $s - j = k - l \mod n$;

4) антициркулянтной, если $a_{sj} = a_{kl}$ при $s + j = k + l \mod n$;

5) косоциркулянтной, если $a_{sj} = a_{kl}$ при $s - j = k - l + n$;

6) косоантициркулянтной, если $a_{sj} = a_{kl}$ при $s + j = k + l + n$.

Определение 1.2. Пусть $d = (d_0, \ldots, d_{n-1})$ — вектор размерности n. Определим преобразование Фурье $d^* = Fd$ от вектора d формулами

$$d^* = Fd = (d_0, \ldots, d_{n-1})\,,\; d_k^* = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi ikj/n} d_j;\; k = 0, \ldots, n-1,$$

здесь i — мнимая единица.

Замечание 1.1. Известно, что введенное таким образом преобразование Фурье невырождено и обратное к нему преобразование F^{-1} от вектора d^* задается формулами

$$d = F^{-1}d^* = (d_0, \ldots, d_{n-1}),\; d_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\pi ikj/n} d_j^*;\; k = 0, \ldots, n-1.$$

Определение 1.3. Сверткой двух векторов $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ и $b = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ называется вектор $c = c * b = (c_0, \ldots, c_{n-1})$, который определяется следующим образом:

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j + \sum_{j=k+1}^{n-1} a_{n+k-j} b_j; \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

причем последняя сумма определена только в случае $k \neq n-1$, а при $k = n-1$, она считается равной нулю.

1.2. Основные обозначения

1. Множества теплицевых, циркулянтных, косоциркулянтных, ганкелевых, антициркулянтных, косоантициркулянтных, диагональных и скалярных матриц обозначим соответственно через T, T_1, T_2, Γ, Γ_1, Γ_2, $\mathcal{D}$, S.

2. $\mathcal{L} = (l_{sj})$ — циркулянтная матрица, у которой верхняя строка $(l_{00}, \ldots, l_{0,n-1})$ имеет вид

$$l_{0j} = -\frac{2}{n\left(\mathrm{e}^{\pi i(2j-1)/n} - 1\right)}, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

где i — мнимая единица.

Замечание 1.2. Можно показать (см. лемму 1.10, п. 1.4), что $\mathcal{L}$ — невырожденная матрица, а обратная к ней матрица $\mathcal{L}^{-1} = (\mu_{sj})$ — циркулянтная и ее верхняя строка $(\mu_{00}, \ldots, \mu_{0,n-1})$ имеет вид

$$\mu_{0j} = -\frac{2}{n\left(\mathrm{e}^{\pi i(2j+1)/n} - 1\right)}, \quad j = 0, \ldots, n-1.$$

3. $\widehat{E}$ — матрица, у которой на диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний угол, стоят единицы, а остальные элементы — нули.

4. $J = (J_{sj})$ — антициркулянтная матрица, у которой верхняя строка $(J_{00}, \ldots, J_{0,n-1})$ имеет вид $J_{00} = 1$, $J_{0j} = 0$ при $j \neq 0$.

5. Φ, Φ^{-1} — такие матрицы, что для любого n–мерного вектора d справедливы равенства $Fd = \Phi d$, $F^{-1}d = \Phi^{-1}d$.

6. $I = (I_{sj})$ — циркулянтная матрица порядка $2n$, у которой верхняя строка $(I_{00}, \ldots, I_{0,2n-1})$ имеет вид $I_{0n} = 1$, $I_{0j} = 0$ при $j \neq n$.

7. Если A, B — фиксированные матрицы порядка n, а R — некоторое множество порядка n, то выражения AR, RB, ARB обозначают множества матриц вида AC, CB и ACB, где $C \in R$.

1.3. Формулировки теорем

Теорема 1.1. *Линейное пространство T есть сумма двух подпространств T_1 и T_2 таких, что*

1) $T_1 \cap T_2 = S$;

2) $T_1 = \Phi^{-1}\mathcal{D}\Phi$, $T_2 = \Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{L}\Phi$;

3) если матрица $A' = (a'_{sj})$ такая, что $A' \in T_1$, то $A' = \Phi^{-1}\Lambda'\Phi$, где Λ' — диагональная матрица с диагональными числами $l'_0, \ldots, l'_{n-1}$, причем вектор $l' = (l'_0, \ldots, l'_{n-1})$ имеет вид $l' = Fa'$, где $a' = (a'_0, \ldots, a'_{n-1})$ — вектор с координатами $a'_0 = a'_{00}, a'_1 = a'_{0,n-1}, \ldots, a'_{n-1} = a'_{01}$;

4) если матрица $A'' = (a''_{sj})$ такая, что $A'' \in T_2$, то $A'' = \Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1}\Lambda''\mathcal{L}\Phi$, где Λ'' — диагональная матрица с диагональными числами $l''_0, \ldots, l''_{n-1}$, причем вектор $l'' = (l''_0, \ldots, l''_{n-1})$ имеет вид $l'' = \mathcal{L}Fa''$, где $a'' = (a''_0, \ldots, a''_{n-1})$ — вектор с координатами $a''_0 = a''_{00}, a''_1 = -a''_{0,n-1}, \ldots, a''_{n-1} = -a''_{01}$.

Теорема 1.2. *Линейное пространство Γ есть сумма двух линейных подпространств Γ_1 и Γ_2 таких, что*

1) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \widehat{E}S$;

2) $\Gamma_1 = \Phi^{-1}J\mathcal{D}\Phi$, $\Gamma_2 = \Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1}\widehat{E}\mathcal{D}\mathcal{L}\Phi$;

3) если матрица $B' = (b'_{sj})$ такая, что $B' \in \Gamma_1$, то $B' = \Phi^{-1} J \Lambda' \Phi$, где Λ' — диагональная матрица с диагональными числами $l'_0, \ldots, l'_{n-1}$, причем вектор $l' = (l'_0, \ldots, l'_{n-1})$ имеет вид $l' = Fb'$, где $b' = (b'_0, \ldots, b'_{n-1})$ — вектор с координатами $b'_0 = b'_{00}$, $b'_1 = b'_{0,n-1}$, $\ldots$, $b'_{n-1} = b'_{01}$;

4) если матрица $B'' = (b''_{sj})$ такая, что $B'' \in \Gamma_2$, то $B'' = \Phi^{-1} \mathcal{L}^{-1} \widehat{E} \Lambda'' \mathcal{L} \Phi$, где Λ'' — диагональная матрица с диагональными числами $l''_0, \ldots, l''_{n-1}$, причем вектор $l'' = (l''_0, \ldots, l''_{n-1})$ имеет вид $l'' = \mathcal{L} F b''$, где $b'' = (b''_0, \ldots, b''_{n-1})$ — вектор с координатами $b''_0 = b''_{0,0}$, $b''_1 = -b''_{0,n-1}$, $\ldots$, $b''_{n-1} = -b''_{01}$.

1.4. Вспомогательные леммы

Лемма 1.1. *Пусть $A = (a_{sj})$ — теплицева матрица, $A' = (a'_{sj})$ — циркулянтная матрица, у которой верхняя строка $(a'_{00}, \ldots, a'_{0,n-1})$ имеет вид $a'_{0j} = (a_{0j} + a_{n-j,0})/2$ при $j = 1, \ldots, n-1$, $a'_{00} = a_{00}$, а $A'' = (a''_{sj})$ — косоциркулянтная матрица, у которой верхняя строка $a''_{00}, \ldots, a''_{0,n-1})$ имеет вид $a''_{0j} = (a_{0j} - a_{n-j,0})/2$ при $j = 1, \ldots, n-1$, $a''_{00} = 0$. Тогда $A = A' + A''$.*

Доказательство следует из определения 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть $A = (a_{sj})$ — ганкелева матрица, $A' = (a'_{sj})$ — антициркулянтная матрица, у которой верхняя строка $(a'_{00}, \ldots, a'_{0,n-1})$ имеет вид $a'_{0j} = (a_{0j} + a_{j+1,n-1})/2$ при $j \neq n-1$, $a'_{0,n-1} = a_{0,n-1}$, а $A'' = (a''_{sj})$ — косоантициркулянтная матрица, у которой верхняя строка $a''_{00}, \ldots, a''_{0,n-1}$ имеет вид $a''_{0j} = (a_{0j} - a_{j+1,n-1})/2$ при $j \neq n-1$, $a''_{0,n-1} = 0$. Тогда $A = A' + A''$.*

Доказательство следует из определения 1.1.

Лемма 1.3. *Пусть A — косоциркулянтная матрица, B — косоантициркулянтная матрица,*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & \vdots & -A \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ -A & \vdots & A \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & \vdots & -B \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ -B & \vdots & B \end{pmatrix},$$

матрицы порядка $2n$, состоящие их четырех блоков, причем диагональные блоки совпадают с матрицами A и B, соответственно, а два других блока — с матрицами $-A$ и $-B$, соответственно. Тогда $\widetilde{A}$ — циркулянтная матрица порядка $2n$, а $\widetilde{B}$ — антициркулянтная матрица порядка $2n$.

Доказательство следует из определения 1.1.

Лемма 1.4. *Пусть $A = (a_{sj})$ — циркулянтная матрица, $B = (b_{sj})$ — антициркулянтная матрица, а x — n–мерный вектор. Тогда Ax — свертка вектора $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ с координатами $a_0 = a_{00}$, $a_1 = a_{0,n-1}$, $\dots$, $a_{n-1} = a_{01}$ и вектора x, а вектор JBx — свертка вектора $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$ с координатами $b_0 = b_{00}$, $b_1 = b_{0,n-1}$, $\dots$, $b_{n-1} = b_{01}$ и вектора x.*

Доказательство следует из определений 1.1, 1.3 и обозначения 4 п. 1.2.

Лемма 1.5. *Пусть $\tilde{e} = (e_0, \dots, e_{2n-1})$ — $2n$–мерный вектор, у которого координата $e_n = 1$, а при $k \neq n$ координата $e_k = 0$, $\tilde{e}^* = (e_0^*, \dots, e_{2n-1}^*) = F\tilde{e}$, где F — преобразование Фурье, введенное в определении 1.2, в котором число n заменено на число $2n$. Тогда при $v = 0, \dots, n-1$ координата $e_{2v}^* = 1$, а координата $e_{2v+1}^* = -1$.*

Доказательство следует из определения 1.2.

Лемма 1.6. *Предположим, что n–мерный вектор $c = (c_0, \dots, c_{n-1})$ есть свертка n–мерных векторов $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ и $b = (b_0, \dots, b_{n-1})$.*

Пусть

$$\begin{aligned} c^* = (c_0^*, \dots, c_{n-1}^*) = Fc, \quad \tilde{c} = (\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{n-1}) = F^{-1}c, \\ a^* = (a_0^*, \dots, a_{n-1}^*) = Fa, \quad \tilde{a} = (\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{n-1}) = F^{-1}a, \\ b^* = (b_0^*, \dots, b_{n-1}^*) = Fb, \quad \tilde{b} = \left(\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_{n-1}\right) = F^{-1}b. \end{aligned}$$

Тогда

$$a_k^* b_k^* = c_k^*, \quad n\tilde{a}_k\tilde{b}_k = \tilde{c}_k, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Имеем

$$\begin{aligned} a_k^* b_k^* = \sum_{v=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi ikv/n} a_v \sum_{\mu=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi ik\mu/n} b_\mu = \sum_{v=0}^{n-1}\sum_{\mu=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi ik(v+\mu)/n} a_v b_\mu = \\ = \sum_{\theta=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi ik\theta/n} \left(\sum_{\mu=0}^{\theta} a_{\theta-\mu} b_\mu + \sum_{\mu=\theta+1}^{n-1} a_{\theta-\mu+n} b_\mu \right) = c_k^*, \end{aligned}$$

что и доказывает первое равенство. Второе равенство с учетом замечания 1.1, доказывается аналогично. Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. *Пусть $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ — n–мерный вектор, а J — матрица, введенная обозначением 4 п. 1.2. Тогда $FJx = JFx$.*

Доказательство. Пусть $y = (y_0, \ldots, y_{n-1}) = JFx$, $z = (z_0, \ldots, z_{n-1}) = Jx$. В силу обозначения 4 п. 1.2 и определения 1.2 имеем равенства $z_0 = x_0$, $z_s = x_{n-s}$ при $s \neq 0$,

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)j/n}\, x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi ik(-j+n)/n}\, x_j,$$

где i — мнимая единица. Поэтому, полагая в последнем равенстве $n - j = s$ при $j \neq 0$, получим

$$y_k = \sum_{s=1}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi iks/n}\, x_{n-s} + x_0 = \sum_{s=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-2\pi iks/n}\, z_s,$$

то есть $JFx = FJx$. Лемма 1.7 доказана.

Лемма 1.8. *Пусть $b = (b_0, \ldots, b_{n-1})$, $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$, $y = (y_0, \ldots, y_{n-1})$ — три n–мерных вектора такие, что*

$$b_k = x_k y_k, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{1}$$

а $x^* = (x_0^*, \ldots, x_{n-1}^*) = Fx$. Тогда $Fb = XFy$, где $X = (x_{sj})$ — циркулянтная матрица, у которой верхняя строка имеет вид

$$x_{00} = \frac{1}{n}x_0^*,\ x_{01} = \frac{1}{n}x_{n-1}^*,\ \ldots,\ x_{0,n-1} = \frac{1}{n}x_1^*.$$

Доказательство. Введем вектор

$$\tilde{b} = \left(\tilde{b}_0, \ldots, \tilde{b}_{n-1}\right) = F^{-1}\left(XFy\right). \tag{2}$$

Из определения матрицы X и леммы 1.4 следует, что вектор $b^* = XFy$ есть свертка векторов $\tilde{x} = \dfrac{1}{n}x^*$ и Fy. Применяя лемму 1.6 и учитывая (2) и (1), получим

$$\tilde{b}_k = \frac{1}{n} n x_k y_k = b_k,$$

что доказывает лемму 1.8.

Лемма 1.9. *Пусть $a = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ — n–мерный вектор, $\tilde{a} = (\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ — $2n$–мерный вектор, первые n координат которого совпадают с соответствующими координатами вектора a, а остальные координаты равны нулю, $a^* = Fa = ({a^*}_0, \ldots, {a^*}_{n-1})$, $\tilde{a}^* = F\tilde{a} = (\tilde{a}_0^*, \ldots, \tilde{a}_{2n-1}^*)$ (здесь $F\tilde{a}$ — преобразование Фурье от $2n$–мерного вектора $\tilde{a}$, введенное в определении 2 п. 1.2, в котором число n заменено числом $2n$). Пусть, далее, $\tilde{a}' = (\tilde{a}_0', \ldots, \tilde{a}_{n-1}')$ — n–мерный вектор, координаты которого имеют вид $\tilde{a}_k' = \tilde{a}_{2k+1}^*$ $(k = 0,\ \ldots,\ n-1)$.*

Тогда $\tilde{a}' = \mathcal{L}a^*$, где $\mathcal{L}$ — матрица, введенная обозначением 2 п. 1.2.

Доказательство. Из определения 1.2 и определения вектора $\tilde{a}'$ следует, что $\tilde{a}' = Fb$, где $b = (b_0, \ldots, b_{n-1})$ — n–мерный вектор, координаты которого имеют вид $b_k = a_k r_k$, $(k = 0, \ldots, n-1)$, где $r_k = \mathrm{e}^{-\pi i k/n}$, i — мнимая единица. Теперь, применяя лемму 1.8 и обозначение 2 п. 1.2, получим утверждение леммы 1.9. Лемма 1.9 доказана.

Лемма 1.10. *Матрица $\mathcal{L}$, введенная обозначением 2 п. 1.2, — невырожденная, обратная к ней матрица $\mathcal{L}^{-1} = (\mu_{sj})$ — циркулянтная, у которой верхняя строка $(\mu_{00}, \ldots, \mu_{0,n-1})$ имеет вид*

$$\mu_{0k} = -\frac{2}{n\left(\mathrm{e}^{\pi i(2k+1)/n} - 1\right)}; \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

где i — мнимая единица.

Доказательство. Из леммы 1.8 и доказательства леммы 1.9 следует, что $\mathcal{L} = \Phi R \Phi^{-1}$, где R — диагональная матрица с диагональными числами $r'_k = \mathrm{e}^{-\pi i k/n}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$, а матрица Φ введена обозначением 5 п. 1.2. Поэтому матрица $\mathcal{L}^{-1} = \Phi R \Phi^{-1}$ — невырожденная и согласно лемме 1.8 имеет вид, указанный в лемме 1.10. Лемма 1.10 доказана.

Лемма 1.11. *Пусть $\mathcal{L}$ — матрица, введенная обозначением 2 п. 1.2, $\mathcal{L}^{-1}$ — матрица, обратная $\mathcal{L}$, x — произвольный n–мерный вектор. Тогда*

$$\mathcal{L} F x = F R x, \quad \mathcal{L}^{-1} x = F R^{-1} F^{-1} x,$$

где R — диагональная матрица с диагональными числами $r'_k = \mathrm{e}^{-\pi i k/n}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$, а R^{-1} — диагональная матрица с диагональными числами $r''_k = \mathrm{e}^{\pi i k/n}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$.

Доказательство леммы 1.11 следует из доказательства леммы 1.10.

Лемма 1.12. *Рассмотрим четыре матрицы*

$$A' = \left(a'_{sj}\right) \in T_1, \quad A'' = \left(a''_{sj}\right) \in T_2, \quad B' = \left(b'_{sj}\right) \in \Gamma_1, \quad B'' = \left(b''_{sj}\right) \in \Gamma_2$$

и матрицу $\widehat{E}$, введенную определением 3 п. 1.2. Тогда выполняются следующие утверждения:

1) *существуют матрицы $D' = \left(d'_{sj}\right)$ и $D'' = \left(d''_{sj}\right)$, такие что $D' \in T_1$, $D'' \in T_2$ и справедливы равенства*

$$\widehat{E} D' = B', \quad \widehat{E} D'' = B'';$$

2) верхняя строка $\left(d'_{00}, \dots, d'_{0,n-1}\right)$ *матрицы* D' *совпадает с нижней строкой* $\left(b'_{n-1,0}, \dots, b'_{n-1,n-1}\right)$ *матрицы* B', *а нижняя строка* $\left(d''_{n-1,0}, \dots, d''_{n-1,n-1}\right)$ *матрицы* D'' *совпадает с верхней строкой* $\left(b''_{00}, \dots, b''_{0,n-1}\right)$ *матрицы* B'';

3) матрица $C' = (c'_{sj}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A'\widehat{E} \in \Gamma_1$, *а матрица* $C'' = (c''_{sj}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A''\widehat{E} \in \Gamma_2$;

4) левый столбец $\begin{pmatrix} a'_{00} \\ \vdots \\ a'_{n-1,0} \end{pmatrix}$ *матрицы* A' *совпадает с правым столбцом* $\begin{pmatrix} c'_{0,n-1} \\ \vdots \\ c'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ *матрицы* C', *а правый столбец* $\begin{pmatrix} a''_{0,n-1} \\ \vdots \\ a''_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ *матрицы* A'' *совпадает с левым столбцом* $\begin{pmatrix} c''_{00} \\ \vdots \\ c'_{n-1,0} \end{pmatrix}$ *матрицы* C''.

Доказательство следует из определения 1.1 и обозначения 3 для матрицы $\widehat{E}$ в п. 1.2.

1.5. Доказательства теорем

Теоремы 1.1 и 1.2 впервые сформулированы в [13] и [15], а доказательство теоремы 1.1 дано в [15] (теорема 1, гл. 1). В этом доказательстве использованы лемма 1.1, первая часть леммы 1.3, первая часть леммы 1.4, леммы 1.5, 1.6, 1.8, 1.9, 1.10 и 1.11.

Далее будет доказана теорема 1.2.

Доказательство теоремы 1.2. Утверждение 1), очевидно, следует из определения 1.1, обозначений 1 и 3 в п. 1.2 и леммы 1.2.

Пусть $B' = (b'_{sj})$ — антициркулянтная матрица, $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ — n–мерный вектор. Из леммы 1.4 следует, что вектор $JB'x$ есть свертка векторов $b' = (b'_{00}, b'_{0,n-1}, \dots, b'_{01})$ и x. Поэтому в силу лемм 1.4, 1.6, 1.7

$$FB'x = FJJB'x = JFJB'x = J\Lambda' Fx,$$

где Λ' — диагональная матрица с диагональными числами $l'_0, \dots, l'_{n-1}$, причем вектор $l' = (l'_0, \dots, l'_{n-1})$ имеет вид $l' = Fb'$, а вектор b' определен в утверждении 3) теоремы 1.2.

Тем самым утверждение 3) теоремы 1.2 доказано.

Обратно, если Λ' — произвольная диагональная матрица с диагональными числами $\lambda'_0, \dots, \lambda'_{n-1}$, то, обозначая через λ и b векторы $\lambda = (\lambda'_0, \dots, \lambda'_{n-1})$, $b = (b_0, \dots, b_{n-1}) = F^{-1}\lambda$, на основании лемм 1.4, 1.6, 1.7

получим, что антициркулянтная матрица $B' = (b'_{sj})$, верхняя строка которой имеет вид $b'_{00} = b_0$, $b'_{01} = b_{n-1}$, …, $b'_{0,n-1} = b_1$, удовлетворяет равенству $B' = \Phi^{-1} J \Lambda' \Phi$.

Таким образом, первое равенство в утверждении 2) теоремы 1.2 доказано.

Докажем второе равенство в утверждении 2) и утверждение 4). Пусть $x = (x_0, \ldots, x_{n-1})$ — n–мерный вектор и $B'' = (b_{sj})$ — косоантициркулянтная матрица порядка n. Обозначим через $\widetilde{B}$ матрицу порядка $2n$, состоящую из четырех блоков, причем диагональные блоки совпадают с матрицей B'', а два других блока — с матрицей $-B''$:

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B'' & \vdots & -B'' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -B'' & \vdots & B'' \end{pmatrix}.$$

Из леммы 1.3 следует, что $\widetilde{B}$ — антициркулянтная матрица. Введем вектор $y = (y_0, \ldots, y_{n-1}) = B''x$ и два вектора размерности $2n$:

$$\tilde{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}, 0, \ldots, 0), \quad \tilde{y} = (y_0, \ldots, y_{n-1}, 0, \ldots, 0),$$

первые n координат которых совпадают с соответствующими координатами векторов x, y, а остальные координаты — нули. Из вида матрицы $\widetilde{B}$ следует, что

$$\widetilde{B}\tilde{x} = \tilde{y} - I\tilde{y}, \tag{3}$$

где I — матрица, введенная обозначением 6 п. 1.2.

Пусть $\tilde{b} = (b''_{00}, -b''_{0,n-1}, \ldots, b''_{01}, -b''_{00}, b''_{0,n-1}, \ldots, b''_{01})$ есть вектор размерности $2n$, полученный из верхней строки $(b''_{00}$, b''_{01}, …, $b''_{0,n-1}$, $-b''_{00}$, $-b''_{01}$, …, $-b''_{0,n-1})$ матрицы $\widetilde{B}$, если в ней второй элемент слева заменить на $2n$–й элемент слева, 3–й элемент слева заменить на $(2n-1)$–й элемент слева и т. д., $2n$–й слева заменить на второй элемент слева. Пусть $\tilde{b}^* = \left(\tilde{b}^*_0, \ldots, \tilde{b}^*_{2n-1}\right) = F\tilde{b}$, где $F\tilde{b}$ — преобразование Фурье от $2n$–мерного вектора $\tilde{b}$, введенное в определении 1.2, в котором число n заменено числом $2n$. Согласно леммам 1.4, 1.6, 1.7

$$F\widetilde{B}x = J^{(2n)}\widetilde{\Lambda}F\tilde{x}, \tag{4}$$

где $\widetilde{\Lambda}$ — диагональная матрица с диагональными числами $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{b}^*$, …, $\tilde{\lambda}_{2n-1} = \tilde{b}^*_{2n-1}$, а $J^{(2n)} = \left(J^{(2n)}_{sj}\right)$ — антициркулянтная матрица порядка $2n$, у которой верхняя строка $\left(J^{(2n)}_{00}, J^{(2n)}_{01}, \ldots, J^{(2n)}_{0,n-1}\right)$ имеет вид $J^{(2n)}_{00} = 1$, а $J^{(2n)}_{0j} = 0$ при $j \neq 0$. Далее рассмотрим векторы $\tilde{x}^* = (\tilde{x}^*_0, \ldots, \tilde{x}^*_{2n-1}) =$

$F\tilde{x}$, $\tilde{y}^* = (\tilde{y}_0^*, \dots, \tilde{y}_{2n-1}^*) = F\tilde{y}$, $\tilde{z} = F\tilde{x}$, $\tilde{z}^* = (\tilde{z}_0^*, \dots, \tilde{z}_{2n-1}^*) = F\tilde{z}$, $\tilde{b}^* = (\tilde{b}_0^*, \dots, \tilde{b}_{2n-1}^*) = F\tilde{b}$ и введем векторы размерности n:

$$\tilde{x}' = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_3^*, \dots, \tilde{x}_{2n-1}^*)\,, \quad \tilde{z}' = (\tilde{z}_1^*, \tilde{z}_3^*, \dots, \tilde{z}_{2n-1}^*)\,,$$
$$\tilde{y}' = (\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_3^*, \dots, \tilde{y}_{2n-1}^*)\,, \quad \tilde{b}' = \left(\tilde{b}_1^*, \tilde{b}_3^*, \dots, \tilde{b}_{2n-1}^*\right),$$

координаты которых совпадают с соответствующими нечетными координатами векторов $\tilde{x}^*$, $\tilde{z}^*$, $\tilde{y}^*$, $\tilde{b}^*$. Из (4) и (3) следует равенство

$$\tilde{z}' = \widehat{E}\widetilde{\Lambda}'\tilde{x}', \tag{5}$$

где $\widetilde{\Lambda}'$ — диагональная матрица с диагональными числами

$$\tilde{\lambda}_0' = \tilde{b}_1^*, \quad \tilde{\lambda}_1' = \tilde{b}_3^*, \quad \dots, \quad \tilde{\lambda}_{n-1}' = \tilde{b}_{2n-1}^*, \tag{6}$$

которые совпадают с соответствующими нечетными координатами вектора $\tilde{b}^*$. Далее, в силу (3), определений векторов $\tilde{z}'$, $\tilde{y}'$, $\tilde{x}'$, обозначения 6, п. 1.2, и лемм 1.4, 1.6, 1.5, 1.9 имеем равенство

$$\tilde{z}' = 2\tilde{y}' = 2\mathcal{L}Fy, \tag{7}$$

в силу леммы 1.9

$$\tilde{x}' = \mathcal{L}Fx, \tag{8}$$

а согласно определению векторов $\tilde{b}$, $\tilde{b}'$, обозначению 6, п. 1.2, леммам 1.4, 1.6, 1.5, 1.9

$$\tilde{b}' = 2\mathcal{L}Fb'', \tag{9}$$

где $b'' = ({b''}_0, \dots, {b''}_{n-1})$ — вектор с координатами $b_0'' = b_{00}''$, $b_1'' = -b_{0,n-1}''$, $\dots$, $b_1'' = -b_{01}''$. Поэтому из 7, 5, 8 и леммы 1.10 получаем:

$$Fy = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\widehat{E}\widetilde{\Lambda}'\mathcal{L}\Phi x,$$

и, следовательно, $y = \frac{1}{2}\Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1}\widehat{E}\widetilde{\Lambda}'\mathcal{L}\Phi x$. Это равенство эквивалентно равенству

$$B'' = \Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1}\widehat{E}\Lambda''\Phi \tag{10}$$

из утверждения 4) теоремы 1.2, так как в силу (9) элементы матрицы Λ'' из 10 в два раза меньше соответствующих элементов матрицы $\widetilde{\Lambda}'$. Таким образом, мы доказали утверждение 4) теоремы 1.2, а для доказательства второго равенства из утверждения 2) теоремы 1.2 достаточно по произвольной диагональной матрице

$$\Lambda'' = \begin{pmatrix} \lambda_0'' & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{n-1}'' \end{pmatrix}$$

построить такую косоантициркулянтную матрицу B'', чтобы выполнялось второе равенство из утверждения 2) теоремы 1.2. Для этого обозначим через $\lambda'' = ({\lambda''}_0, \ldots, {\lambda''}_{n-1})$ n–мерный вектор, координаты которого являются диагональными числами матрицы Λ'', введем вектор

$$b'' = ({b''}_0, \ldots, {b''}_{n-1}) = F^{-1}\mathcal{L}^{-1}\lambda'' \tag{11}$$

и косоантициркулянтную матрицу $B'' = (b''_{sj})$, верхняя строка которой имеет вид

$$b''_{00} = b''_0, \quad b''_{01} = -b''_{n-1}, \quad \ldots, \quad b''_{0,n-1} = -b''_1. \tag{12}$$

Применяя теперь утверждение 4) теоремы 1.2, (11) и (12), получим, что матрицы B'' и Λ'' удовлетворяют второму равенству утверждения 2) теоремы 1.2. Теорема 1.2 доказана.

§2. Алгебраическая структура пространства теплицевых тензоров

В этом параграфе формулируется и доказывается теорема об алгебраической структуре пространства теплицевых тензоров, которая обобщает соответствующие результаты для теплицевых матриц (теорема 1.1).

Далее рассматриваются тензоры вида $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$, где $k, j = 0, \ldots, n_1 - 1$; $l, m = 0, \ldots, n_2 - 1$; n_1, n_2 — натуральные числа. Каждый такой тензор определяет линейное преобразование линейного пространства W комплексных матриц, имеющих n_1 строк и n_2 столбцов, следующим образом. Пусть $X = (x_{jm})$ — матрица, в которой $j = 0, \ldots, n_1 - 1$; $m = 0, \ldots, n_2 - 1$. Тогда $AX = Y = (y_{kl})$, где $k = 0, \ldots, n_1 - 1$; $l = 0, \ldots, n_2 - 1$;

$$y_{k,l} = \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{m=0}^{n_2-1} a_{kl}^{jm}\, x_{jm}.$$

Верно и обратное: каждому линейному преобразованию $A : X \to Y = AX$ пространства W соответствует тензор $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$. В дальнейшем будем отождествлять линейные преобразования пространства W и соответствующие им тензоры. Исходя из этого, естественным образом определяются произведение тензоров и тензор, обратный данному, через соответствующие понятия в алгебре операторов пространства W.

2.1. Основные определения

Определение 2.1. Тензор $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$ называется

1) единичным, если $a_{kl}^{jm} = \delta_k^i \delta_l^m$, где δ_k^j и δ_l^m — символ Кронекера, т. е. он равен 1, если верхний индекс совпадает с нижним, и равен 0, если эти индексы отличаются друг от друга;

2) диагональным, если $a_{kl}^{jm} = r_{kl} \delta_k^i \delta_l^m$, где r_{kl} — некоторые числа;

3) скалярным, если A — диагональный тензор, а число r_{kl} не зависит от k и l;

4) теплицевым, если $a_{kl}^{jm} = a_{pr}^{qs}$ при $k - j = p - q$, $l - m = r - s$;

5) циклическим по первой паре индексов, если A — теплицев тензор и $a_{kl}^{jm} = a_{pl}^{qm}$ при $k - j \equiv p - q \mod n_1$;

6) циклическим по второй паре индексов, если A — теплицев тензор и $a_{kl}^{jm} = a_{fr}^{js}$ при $l - m \equiv r - s \mod n_2$;

7) косоциклическим по первой паре индексов, если A — теплицев тензор и $a_{kl}^{jm} = -a_{pl}^{qm}$ при $k - j = p - q + n_1$;

8) косоциклическим по второй паре индексов, если A — теплицев тензор и $a_{kl}^{jm} = -a_{fr}^{js}$ при $l - m = r - s + n_2$;

9) циркулянтным, если тензор A является циклическим по обеим парам индексов;

10) косоциркулянтным, если тензор A является косоциклическим по обеим парам индексов;

11) тензором первого канонического вида, если A — циркулянтный;

12) тензором второго канонического вида, если A — косоциркулянтный;

13) тензором третьего канонического вида, если A — циклический по первой паре индексов и косоциклический по второй паре индексов;

14) тензором четвертого канонического вида, если A — косоциклический по первой паре индексов и циклический по второй паре индексов.

Определение 2.2. Пусть $X = (x_{jm})$ такая матрица, что $j = 0, \ldots, n_1 - 1$; $m = 0, \ldots, n_2 - 1$. Определим двумерное преобразование Фурье $\widehat{F}$ от матрицы X формулой $X^* = (x_{rs}^*) = \widehat{F} X$ — матрица, у которой элементы x_{rs}^* имеют вид

$$x_{rs}^* = \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{m=0}^{n_2-1} \exp\left(-2\pi i r j / n_1 - 2\pi i s j m / n_2\right) x_{jm},$$

где $r = 0, \ldots, n_1 - 1$; $s = 0, \ldots, n_2 - 1$; i — мнимая единица.

Замечание. Введенное таким образом преобразование Фурье $\widehat{F}$ имеет обратное $\widehat{F}^{-1}$, которое задается формулами $X = (x_{jm}) = \widehat{F}^{-1} X^*$,

$$x_{jm} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{r=0}^{n_1-1} \sum_{s=0}^{n_2-1} \exp\left(2\pi i r j / n_1 - 2\pi i s j m / n_2\right) x^*_{rs},$$

где $r = 0, \ldots, n_1 - 1$; $s = 0, \ldots, n_2 - 1$.

Определение 2.3. Сверткой двух матриц $X = (x_{jm})$, $Y = (y_{jm})$ ($j = 0, \ldots, n_1 - 1$; $m = 0, \ldots, n_2 - 1$) назовем матрицу $Z = (z_{\alpha\beta}) = X * Y$, где

$$z_{\alpha\beta} = \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{m=0}^{n_2-1} x_{\{n_1+\alpha-j\} \bmod n_1, \{n_2+\beta-m\} \bmod n_2} y_{jm},$$

$\alpha = 0, \ldots, n_1 - 1$; $\beta = 0, \ldots, n_2 - 1$; $\{n_1 + \alpha - j\} \bmod n_1$ и $\{n_2 + \beta - m\} \bmod n_2$ — соответственно неотрицательные вычеты чисел $n_1 + \alpha - j$ и $n_2 + \beta - m$ по модулям n_1 и n_2.

2.2. Основные обозначения

1) Обозначим множества теплицевых, s–го $s = 1, 2, 3, 4$) канонического вида, диагональных и скалярных тензоров соответственно через $\widehat{T}$, $\widehat{T}^{(s)}$, $\widehat{\mathcal{D}}$, $\widehat{S}$.

2) Обозначим через $\widehat{\Phi}$ $\left(\widehat{\Phi}^{-1}\right)$ тензор, соответствующий преобразованию $\widehat{F}$ $\left(\widehat{F}^{-1}\right)$ пространства W.

3) Обозначим через $R^{(s)} = \left\{ r^{(s)\, jm}_{kl} \right\}$ ($s = 1, 2, 3, 4$) такой тензор, что $R^{(1)}$ — единичный тензор,

$$\begin{aligned} r^{(2)\, jm}_{kl} &= \delta^j_k \delta^m_l \exp(-\pi i k / n_1 - \pi i l / n_2), \\ r^{(3)\, jm}_{kl} &= \delta^j_k \delta^m_l \exp(-\pi i l / n_2), \\ r^{(3)\, jm}_{kl} &= \delta^j_k \delta^m_l \exp(-\pi i k / n_1), \end{aligned}$$

где i — мнимая единица.

2.3. Формулировка теоремы

Теорема. *Линейное пространство $\widehat{T}$ есть сумма четырех своих подпространств $\widehat{T}^{(s)}$ $(s = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$, таких, что*

1) $\widehat{T}^{(1)} \cap \widehat{T}^{(2)} = \widehat{S}$, $\widehat{T}^{(3)} \cap \widehat{T}^{(4)} = \widehat{S}$;

2) $\widehat{T}^{(s)} = \left(R^{(s)}\right)^{-1} \widehat{\Phi}^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \widehat{\Phi} R^{(s)}$;

3) *если* $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\} \in \widehat{T}^{(s)}$, *то* $A = \left(R^{(s)}\right)^{-1} \widehat{\Phi}^{-1} B \widehat{\Phi} R^{(s)}$, *где* $B = \left\{b_{kl}^{jm}\right\} \in \widehat{\mathcal{D}}$, $b_{kl}^{jm} = \delta_k^j \delta_l^m a'_{kl}$ *и матрица* $A' = (a'_{kl})$ *имеет вид* $A' = \widehat{F} R^{(s)} A''$, *где* $A'' = (a''_{kl})$, $a''_{kl} = a_{kl}^{00}$ $(k = 0,\ \ldots,\ n_1 - 1;\ l = 0,\ \ldots,\ n_2 - 1($.

2.4. Вспомогательные леммы

Лемма 2.1. *Если* $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$ *— циркулянтный тензор, а* $X = (x_{jm}) \in W$, *то матрица* AX *есть свертка матрицы* $C = (c_{jm})$, *элементы которой имеют вид* $c_{jm} = a_{jm}^{00}$, *и матрицы* X $(j = 0,\ \ldots,\ n_1 - 1;\ m = 0,\ \ldots,\ n_2 - 1)$.

Доказательство следует из определений 2.1 и 2.3.

Лемма 2.2. *Всякий теплицев тензор* $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$ *можно представить в виде суммы четырех тензоров:* $A = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)}$, *где* $A^{(s)}$ *— тензор* s*–го канонического вида* $(s = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

Доказательство. Из определения 2.1 следует, что всякий тензор $B = \left\{b_{kl}^{jm}\right\}$ s–го канонического вида $(s = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ однозначно определяется заданием своих элементов b_{kl}^{00}. Пусть $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$ — произвольный теплицев тензор. Определим соответствующие тензоры $A^{(s)}$ s–го канонического вида $(s = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ равенствами

$$
\begin{aligned}
a_{kl}^{(1)00} &= \frac{1}{4}\left(a_{kl}^{00} + a_{0\ \ l}^{n_1-k,0} + a_{k\ \ 0}^{0,n_2-l} + a_{0\ \ \ 0}^{n_1-k,n_2-l}\right),\\
a_{kl}^{(2)00} &= \frac{1}{4}\left(a_{kl}^{00} - a_{0\ \ l}^{n_1-k,0} - a_{k\ \ 0}^{0,n_2-l} + a_{0\ \ \ 0}^{n_1-k,n_2-l}\right),\\
a_{kl}^{(3)00} &= \frac{1}{4}\left(a_{kl}^{00} + a_{0\ \ l}^{n_1-k,0} - a_{k\ \ 0}^{0,n_2-l} - a_{0\ \ \ 0}^{n_1-k,n_2-l}\right),\\
a_{kl}^{(4)00} &= \frac{1}{4}\left(a_{kl}^{00} - a_{0\ \ l}^{n_1-k,0} + a_{k\ \ 0}^{0,n_2-l} - a_{0\ \ \ 0}^{n_1-k,n_2-l}\right).
\end{aligned}
$$

Легко проверяется, что определенные таким образом тензоры $A^{(s)}$ в сумме дают тензор A.

Лемма 2.3. *Преобразование Фурье $\widehat{F}$ от свертки двух матриц X и Y есть матрица $U = (u_{rs})$, у которой элементы u_{rs} имеют вид $u_{rs} = x^*_{rs} y^*_{rs}$, где x^*_{rs} и y^*_{rs} элементы матриц $X^* = (x^*_{rs}) = \widehat{F}X$ и $Y^* = (y^*_{rs}) = \widehat{F}Y$, соответственно.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.6 с использованием определений 2.2 и 2.3.

Лемма 2.4. *Пусть $A = \left\{a^{jm}_{kl}\right\}$ — циркулянтный тензор $(k, j = 0, \ldots, n_1 - 1; l, m = 0, \ldots, n_2 - 1)$. Тогда тензор $B = \left\{b^{jm}_{kl}\right\} = \widehat{F} A \widehat{F}^{-1}$ — диагональный, причем $b^{jm}_{kl} = \delta^j_k \delta^m_l a'_{kl}$, а матрица $A' = (a'_{kl})$ имеет вид $A' = \widehat{F}A''$, где $A'' = (a''_{kl})$ и $a''_{kl} = a^{00}_{kl}$ $(k = 0, \ldots, n_1 - 1; l = 0, \ldots, n_2 - 1)$.*

Доказательство следует из лемм 2.1, 2.3 и определения 2.1.

Лемма 2.5. *Для любого тензора $A = \left\{a^{jm}_{kl}\right\}$ s–го канонического вида $(s = 1, 2, 3, 4; k, j = 0, \ldots, n_1 - 1; l, m = 0, \ldots, n_2 - 1)$ тензор $Q = \left\{q^{jm}_{kl}\right\} = R^{(s)} A \left(R^{(s)}\right)^{-1}$ — циркулянтный, и при этом матрица $C = (c_{kl})$, такая что $c_{kl} = q^{00}_{kl}$, имеет вид $C = R^{(s)}B$, где $B = (b_{kl})$ — матрица, у которой $b_{kl} = a^{00}_{kl}$ $(k = 0, \ldots, n_1 - 1; l = 0, \ldots, n_2 - 1)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $s = 2$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. При $s = 2$ тензор A является косоциркулянтным. Вычислим тензор $Q = \left\{q^{jm}_{kl}\right\} = R^{(2)} A \left(R^{(2)}\right)^{-1}$. Имеем: $R^{(2)} = \left\{r^{(2)jm}_{kl}\right\} = \mathrm{e}^{-\pi ik/n_1 - \pi il/n_2} \delta^j_k \delta^m_l$ (см. п. 2.2). Тогда легко показать, что элементы тензора $\left(R^{(2)}\right)^{-1} = \left\{\tilde{r}^{(2)jm}_{kl}\right\}$ задаются формулами $\tilde{r}^{(2)jm}_{kl} = \mathrm{e}^{\pi ik/n_1 + \pi il/n_2} \delta^j_k \delta^m_l$. Вычислим сначала тензор $G = A\left(R^{(2)}\right)^{-1} = \left\{g^{jm}_{kl}\right\}$:

$$g^{jm}_{kl} = \sum_{\alpha=0}^{n_1-1} \sum_{\beta=0}^{n_2-1} a^{\alpha\beta}_{kl} \tilde{r}^{(2)jm}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=0}^{n_1-1} \sum_{\beta=0}^{n_2-1} a^{\alpha\beta}_{kl} \mathrm{e}^{\pi i\alpha/n_1 + \pi i\beta/n_2} \delta^j_\alpha \delta^m_\beta =$$
$$= a^{jm}_{kl} \mathrm{e}^{\pi ij/n_1 + \pi im/n_2}.$$

Далее,

$$q^{jm}_{kl} = \sum_{\alpha=0}^{n_1-1} \sum_{\beta=0}^{n_2-1} r^{(2)\alpha\beta}_{kl} a^{jm}_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=0}^{n_1-1} \sum_{\beta=0}^{n_2-1} \delta^\alpha_k \delta^\beta_l \mathrm{e}^{-\pi ik/n_1 - \pi il/n_2} a^{jm}_{\alpha\beta} \mathrm{e}^{\pi ij/n_1 + \pi im/n_2} =$$
$$= a^{jm}_{kl} \mathrm{e}^{\pi i(j-k)/n_1 + \pi i(m-l)/n_2},$$

$(k, j = 0, \ldots, n_1 - 1;\ l, m = 0, \ldots, n_2 - 1)$. Из полученных равенств следует, что тензор Q является теплицевым по обеим парам индексов. Покажем, что Q является циклическим по первой паре индексов. Для этого достаточно рассмотреть случай, когда справедливо равенство $k - j = t - s + n_1$, и убедиться, что $q_{kl}^{jm} = q_{tl}^{sm}$. Действительно, так как тензор A является кососциркулянтным, а значит кососциклическим по обеим парам индексов, то имеем:

$$q_{kl}^{jm} = a_{kl}^{jm} \mathrm{e}^{\pi i (j-k)/n_1 + \pi i (m-l)/n_2} = -a_{tl}^{sm} \mathrm{e}^{\pi i (s-t-n_1)/n1 + \pi i (m-l)/n_2} =$$
$$= -a_{tl}^{sm} \mathrm{e}^{-\pi i} \mathrm{e}^{\pi i (s-t)/n_1 + \pi i (m-l)/n_2} = q_{tl}^{sm}.$$

Точно также можно убедиться в том, что тензор Q является циклическим и по второй паре индексов.
Лемма 2.5 доказана.

2.5. Доказательство теоремы

Из леммы 2.2 следует, что линейное пространство $\widehat{T}$ есть сумма четырех своих подпространств $\widehat{T}^{(s)}$ $(s = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Утверждение 1) вытекает из определений подпространств $\widehat{T}^{(s)}$. Из лемм 2.4 и 2.5 получаем равенство

$$\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{\Phi} R^{(s)} \widehat{T}^{(s)} \left(R^{(s)}\right)^{-1} \widehat{\Phi}^{-1},$$

из которого следуют утверждения 2) и 3) теоремы.
Теорема доказана.

Замечание. В принципе, утверждение этой теоремы следует из теоремы 1.1 и леммы 1.11. Однако, в связи с тем, что доказательство теоремы 1.1 мы здесь не приводим (оно содержится в работе [15]) здесь дано прямое доказательство теоремы об алгебраической структуре теплицевых тензоров.

§3. Алгебраическая структура пространства ганкелевых тензоров

В этом параграфе формулируется и доказывается теорема об алгебраической структуре пространства ганкелевых тензоров, обобщающая соответствующие результаты для ганкелевых матриц (теорема 1.2).

Рассмотрим тензоры вида $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$, где $k, j = 0, \ldots, n_1 - 1;\ l, m = 0, \ldots, n_2 - 1$; n_1, n_2 — натуральные числа, которые определены в начале § 2.

3.1. Основные определения

Определение 3.1. Тензор $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$ называется

1) ганкелевым, если $a_{kl}^{jm} = a_{pr}^{qs}$ при $k + j = p + q$, $l + m = r + s$;

2) антициклическим по первой паре индексов, если A — ганкелев тензор и $a_{kl}^{jm} = a_{pl}^{qm}$ при $k + j \equiv p + q \bmod n_1$;

3) антициклическим по второй паре индексов, если A — ганкелев тензор и $a_{kl}^{jm} = a_{kr}^{js}$ при $m + l \equiv s + r \bmod n_2$;

4) косоантициклическим по первой паре индексов, если A — ганкелев тензор и $a_{kl}^{jm} = -a_{pl}^{qm}$ при $k + j = p + q + n_1$;

5) косоантициклическим по второй паре индексов, если A — ганкелев тензор и $a_{kl}^{jm} = -a_{kr}^{js}$ при $l + m = r + s + n_2$;

6) антициркулянтным, если тензор A является антициклическим по обеим парам индексов;

7) косоантициркулянтным, если тензор A является косоантициклическим по обеим парам индексов;

8) тензором пятого канонического вида, если A — антициркулянтный;

9) тензором шестого канонического вида, если A — косоантициркулянтный;

10) тензором седьмого канонического вида, если A — антициклический по первой паре индексов и косоантициеклический по второй паре индексов;

11) тензором восьмого канонического вида, если A — косоантициклический по первой паре индексов и антициклический по второй паре индексов;

12) антискалярным, если $a_{kl}^{jm} = r\widehat{E}_k^j(n_1)\widehat{E}_l^m(n_2)$, где r — заданное число, а для любого натурального числа $n \geqslant 2$ $\widehat{E}_k^j(n)$ — функция от переменных j и k ($j, k = 0, \ldots, n-1$) следующего вида:

$$\widehat{E}_k^j(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } k + j = n - 1, \\ 0, & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Замечание 3.1. Функция $\widehat{E}_k^j(n)$ определяется матрицей $\widehat{E}$ порядка n, введенной в определении 1.3, так, что ее значение есть матричный элемент матрицы $\widehat{E}$, стоящий на пересечении ее j–го столбца и k–той строки.

3.2. Обозначения

1) Обозначим множества ганкелевых, s–го ($s = 5, 6, 7, 8$) канонического вида и антискалярных тензоров соответственно через $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Gamma}^{(s)}$ и $\widehat{E}(n_1, n_2)$.

2) Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ введем функцию $J_k^j(n)$ от переменных j и k ($j, k = 0, \dots, n-1$) следующим образом:

$$J_k^j(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } k + j \equiv \mathrm{mod} n, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание 3.2. Функция $J_k^j(n)$ определяется матрицей J порядка n, введенной в определении 4) п. 1.2, так что ее значение есть матричный элемент матрицы J, стоящий на пересечении ее j–го столбца и k–той строки.

3) Обозначим через $P^{(s)} = \left\{ p_{kl}^{(s)jm} \right\}$ ($s = 5, 6, 7, 8$) такой тензор, что

$$\begin{aligned} P_{kl}^{(5)jm} &= J_k^j(n_1) J_l^m(n_2), & P_{kl}^{(6)jm} &= \widehat{E}_k^j(n_1) \widehat{E}_l^m(n_2), \\ P_{kl}^{(7)jm} &= J_k^j(n_1) \widehat{E}_l^m(n_2), & P_{kl}^{(8)jm} &= \widehat{E}_k^j(n_1) J_l^m(n_2). \end{aligned}$$

4) Обозначим через $R^{(s)} = \left\{ r_{kl}^{(s)jm} \right\}$ ($s = 5, 6, 7, 8$) — такой тензор, что

$$\begin{aligned} &R^{(5)} \text{ — единичный тензор,} \\ r_{kl}^{(6)jm} &= \delta_k^j \delta_l^m \exp\left(-\frac{\pi i k}{n_1} - \frac{\pi i l}{n_2} \right), \\ r_{kl}^{(7)jm} &= \delta_k^j \delta_l^m \exp\left(-\frac{\pi i l}{n_2} \right), \\ r_{kl}^{(8)jm} &= \delta_k^j \delta_l^m \exp\left(-\frac{\pi i k}{n_1} \right), \end{aligned}$$

где i — мнимая единица.

3.3. Формулировка и доказательство теоремы

Лемма. *Всякий ганкелев тензор* $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$ *можно представить в виде суммы четырех тензоров:* $A = A^{(5)} + A^{(6)} + A^{(7)} + A^{(8)}$, *где* $A^{(s)}$ *— тензор* s*–го канонического вида* ($s = 5,6,7,8$).

Доказательство. Из определения 3.1 следует, что всякий тензор $B = \left\{b_{kl}^{jm}\right\}$ s–го канонического вида ($s = 5,\ 6,\ 7,\ 8$) однозначно определяется заданием своих элементов b_{kl}^{00}. Пусть $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\}$ — ганкелев тензор. Определим соответствующие тензоры $A^{(s)}$ s–го канонического вида ($s = 5,\ 6,\ 7,\ 8$) равенствами

$$
\begin{aligned}
a_{kl}^{(5)00} &= \frac{1}{4}\left(a_{kl}^{00} + a_{n_1-1,l}^{k+1,0} + a_{k,n_2-1}^{0,l+1} + a_{n_1-1,n_2-1}^{k+1,l+1}\right),\\
a_{kl}^{(6)00} &= \frac{1}{4}\left(a_{kl}^{00} - a_{n_1-1,l}^{k+1,0} - a_{k,n_2-1}^{0,l+1} + a_{n_1-1,n_2-1}^{k+1,l+1}\right),\\
a_{kl}^{(7)00} &= \frac{1}{4}\left(a_{kl}^{00} + a_{n_1-1,l}^{k+1,0} - a_{k,n_2-1}^{0,l+1} - a_{n_1-1,n_2-1}^{k+1,l+1}\right),\\
a_{kl}^{(8)00} &= \frac{1}{4}\left(a_{kl}^{00} - a_{n_1-1,l}^{k+1,0} + a_{k,n_2-1}^{0,l+1} - a_{n_1-1,n_2-1}^{k+1,l+1}\right).
\end{aligned}
$$

Определенные таким образом тензоры $A^{(s)}$ ($s = 5,\ 6,\ 7,\ 8$) в сумме дают тензор A.

Теорема. *Линейное пространство* $\widehat{\Gamma}$ *есть сумма четырех своих подпространств* $\widehat{\Gamma}^{(s)}$ ($s = 5,6,7,8$), *таких что*

1) $\widehat{\Gamma}^{(5)} \cap \widehat{\Gamma}^{(6)} = \widehat{E}(n_1, n_2)$, $\widehat{\Gamma}^{(7)} \cap \widehat{\Gamma}^{(8)} = \widehat{E}(n_1, n_2)$;

2) $\widehat{\Gamma}^{(s)} = \left(R^{(s)}\right)^{-1} \widehat{\Phi}^{-1} P^{(s)}\, \widehat{\mathcal{D}}\, \widehat{\Phi}\, R^{(s)}$;

3) *если* $A = \left\{a_{kl}^{jm}\right\} \in \widehat{\Gamma}^{(s)}$, *то* $A = \left(R^{(s)}\right)^{-1} \widehat{\Phi}^{-1} P^{(s)}\, B\, \widehat{\Phi}^{-1}\, R^{(s)}$, *где* $B = \left\{b_{kl}^{jm}\right\} \in \widehat{\mathcal{D}}$, $b_{kl}^{jm} = \delta_k^j \delta_l^m a'_{kl}$ *и матрица* $A' = (a'_{kl})$ *имеет вид* $A' = \widehat{F} R^{(s)} A''$, *где* A'' *— такая матрица, что* $a''_{kl} = a_{kl}^{00}$ ($k = 0, \ldots, n_1-1; l = 0, \ldots, n_2-1$).

Здесь $\widehat{\mathcal{D}}$ *— множество диагональных тензоров, введенных в п. 2.1,* $\widehat{\Phi}$ *и* $\widehat{\Phi}^{-1}$ *— тензоры, введенные в п. 2.2,* $R^{(s)}$ *и* $P^{(s)}$ ($s = 5,6,7,8$) *— тензоры, введенные в п. 3.2.*

Доказательство теоремы. Утверждение 1) теоремы следует из предыдущей леммы и определений подпространств $\widehat{\Gamma}^{(s)}$ $(s = 5, 6, 7, 8)$. Утверждение 2) и 3) теоремы следуют из теоремы 1.2, из леммы 1.11 и из замечаний 3.1 и 3.2.

Список литературы

[1] Бабенко К.И. О теплицевых и ганкелевых матрицах // УМН — 1986. — Т. 41, Вып. 1, С. 171–177.

[2] Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. — М.: Наука, 1986.

[3] Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычисления с теплицевыми матрицами // Вычислительные процессы и системы. Вып. 1. — М.: 1983. — С. 124–266.

[4] Гохберг И.Ц., Семенцул А.А. Об обращении конечных теплицевых матриц и их континуальных аналогов // Мат. исслед. — Кишинев, 1972. — Т. 7, вып. 2 (24). — С. 201–223.

[5] Гренадер У., Сегё Г. Теплицевы формы и их приложения. — М.: ИЛ, 1961.

[6] Грэгг В.Б., Уорнер Д.Д. О быстром решении систем линейных уравнений с положительно определенной ганкелевой матрицей // Численные методы линейной алгебры. — М.: МГУ, 1982. — С. 10–15.

[7] Иохвидов И.С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. — М.: Наука, 1974.

[8] Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР; сер. мат. — 1941. — Т. 5. — С. 3–14.

[9] Пустыльников Л.Д., Локоть Т.В. Параллельные вычисления с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // Кибернетика и вычислительная техника. — М.: Наука, 1988. — вып. 4. — С. 96–123.

[10] Макаров О.М. О нижней границе числа операций умножения при вычислении произведения ганкелевых матриц // ЖВМ и МФ. — 1977. — Т. 17, № 5. — С. 1298–1301.

[11] Макхол Дж. Линейное предсказание. Обзор // ТИИЭР. — 1975. — Т. 63, № 4. — С. 20–44.

[12] Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. — М.: Радио и связь, 1985.

[13] Пустыльников Л.Д. Об алгебраической структуре пространств теплицевых и ганкелевых матриц // ДАН. — 1980. — Т. 250, № 3. С. 556-559.

[14] Пустыльников Л.Д. О быстрых вычислениях в некоторых задачах линейной алгебры, связанных с теплицевыми и ганкелевыми матрицами // УМН. — 1980. — Т. 35, № 5. — С. 241–242.

[15] Пустыльников Л.Д. Теплицевы и ганкелевы матрицы и их применения // УМН. — 1984. — Т. 39, № 4. — С. 53–84.

[16] Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978.

[17] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

[18] Тыртышников Е.Е. Об алгоритмах дискретного преобразования Фурье // Численные методы алгебры. — М.: Изд–во МГУ, 1981. – С. 10–26.

[19] Фланаган Д. Анализ, синтез и восприятие речи. — М.: Связь, 1968.

[20] Atal B.S., Hanauer S.L. Speech analysis and synthesis by linear prediction of speech wave // J.Acoust. Soc. Amer. — 1971. — V. 50, № 2. — P. 637–655.

[21] Barreis E.H. Solution of linear equations with Toeplitz and vector Toeplitz matrices // Numerische Mathematik. — 1969. — B. 13, № 5. — P. 404–424.

[22] Bitmead R.R., Anderson B.D.O. Asymptotically fast solution of Toeplitz and related sustems of linear equations // Linear Alg. and Appl. — 1980. — V. 34. — P. 103–116.

[23] Bluestein L.I. A linear filtering approach to the computation of discrete Fourier trahsform // IEEE Trans. — 1970. — AU-8. — P. 451–455.

[24] Bohlin T. Comparison of two methods of modeling stationary EEG signals // IBM J. Res. Dev. — 1973. P. 194–205.

[25] Cooley I.W., Lewis P.A.W., Welch P.D. Historical notes on the fast Fourier transform // Proc. IEEE — 1967. — V. 55, № 10. — P. 1675-1677.

[26] Cooley I.W., Tukey I.W. An algorithm for machine calculations of complex Fourier series // Math. Comput. — 1965. — V. 19, № 90. — P. 297–301.

[27] Durbin J. The fitting of time series models // Rev. Inst. Int. Statist. — 1960. — V. 28, № 3. — P. 233–243.

[28] Fenwick P.B.C., Michie P., Dollimore J., Fenton G.W. Mathematical simulation of the electro–encephalogram using an autoregressive series // Bio–Med. Comput. — 1971. — V. 2. — P. 281–307.

[29] Gersch W. Spectral analysis of EEG's by autoregressive decomposition of time series // Math. Biosci. — 1970. — V. 7. — P.205–222.

[30] Itakura F., Saito S. Analysis synthesis telephony based on maximum likelihood method // In Rep. 6th Int. Congr. Acoustics/Y. Kohasi. Paper C-5-5. — 1968. Aug., P. C17–C20.

[31] Itakura F., Saito S. A statistical method for estimation of speech spectral density and formant frequencies // Electron. Commun. Japan. — 1970. V. 53–A, № 1. — P. 36–43.

[32] Levinson N. The Wiener RMS (root mean squre) error criterion in filter design and prediction // J. Math. and Phys. — 1947. V. 25. — P.261–278.

[33] Makhoul J. Spectral anakysis of speech by linear prediction // IEEE Trans. Audio Electroacoust. — 1973. — V. AU–21, June. — P. 140–148.

[34] Markel J.D. Digital inverse filtering — A new tool for formant trajectory estimation // IEEE Trans. Audio Electroacoust. — 1972. — V. AU–20, June. — P. 129–137.

[35] Rabiner L.R., Rader C.M. (ed.) Digital signal processing. — New York: IEEE Press. — 1972.

[36] Robinson E.A. Multichannel Time Series Analysis with Digital Computer Programs. — San Francisco, Calif.: Holden–Day, 1967.

[37] Robinson E.A. Statistical Communication and Detection. — New York: Hafner, 1967.

[38] Robinson E.A. Predictive decomposition of time series with application to seismic exploration // Geophysics. — 1967. — V. 32, № 3, June. — P. 418–484.

[39] Robinson E.A., Treitel S. The Robinson–Treitel Reader. — Tulsa, Okla: Seismograph Service Corp. — 1973.

[40] Schafer R.W., Rabiner L.R. Digital representation of speech signals // Proceedings IEEE. — 1975. — V. 63, № 4, April. — P. 662-677.

[41] Wennberg A., Zetterberg L.H. Application of a computerbased model of EEG analysis // Electroencephalogr. Clin. Neurophys. —1971. — V. 31, № 5. P. 457–468.

[42] Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smooting of Stationary Time Series with Engineering Applications. Cambridge, Mass.: MIT Press. — 1949.

[43] Wood L.C., Treitel S. Seismic signal processing // Proceedings IEEE. — 1975. — V. 63, № 4. — P. 649–661.

[44] Yun D.Y.Y., Gustavson F.G. Fast computation of the rational Hermite interpolant and solving Toeplitz systems of equations via the extended Euclidean algorithm // Lect. Notes Computt. Sci. — 1979. — V. 72. — P. 58–64.

[45] Zohar Sh. The solution of a Toeplitz set of linear equations // J. Assoc. Comput. Mach. — 1974. — V. 21, № 2. — P. 272–276.