



Галанин М.П., Лукин В.В.,
Чечеткин В.М.

Методы решения уравнения
переноса излучения для
астрофизических моделей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галанин М.П., Лукин В.В., Чечеткин В.М. Методы решения уравнения переноса излучения для астрофизических моделей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 59. 30 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-59>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ им. М.В. КЕЛДЫША

М.П. Галанин, В.В. Лукин, В.М. Чечеткин

Методы решения уравнения переноса излучения для
астрофизических моделей

Москва — 2010

М.П. Галанин, В.В. Лукин, В.М. Чечеткин

Методы решения уравнения переноса излучения для астрофизических моделей

Аннотация

В работе исследованы методы численного решения уравнения переноса излучения: метод конечных разностей, разрывный метод Галеркина, метод характеристик. Изучена применимость методов для гидродинамических моделей астрофизических выбросов. Дана оценка влияния характера дискретизации направлений на такие свойства методов, как монотонность, положительность, „эффект луча“.

M.P. Galanin, V.V. Lukin, V.M. Chechetkin

Methods of radiation transfer equation solution for the astrophysical models

Abstract

In the paper numerical methods for radiation transfer equation are investigated, viz. finite differences method, discontinuous Galerkin method, characteristics method. The problem of applicability of these methods in hydrodynamical models of astrophysical outflows is studied. The influence of directions discretization on considered methods monotonicity, positivity, "the effect of the beam" is estimated.

Содержание

1 Введение. Особенности моделирования переноса излучения в астрофизических моделях	3
2 Полная система уравнений РМГД	4
3 Численные методы решения УПИ	7
3.1 Метод конечных разностей (МКР)	8
3.2 Разрывный метод Галеркина (РМГ)	11
3.3 Метод характеристик (МХ)	14
3.4 Дискретизация угловой переменной	15
4 Сравнительное тестирование эффективности методов	19
4.1 Задача о распространении луча	19
4.2 Задача о точечном источнике излучения	22
4.3 Задача о распределенном источнике излучения	24
5 Выводы и заключение	26
Список литературы	27

1 Введение. Особенности моделирования переноса излучения в астрофизических моделях

Требование адекватности математических моделей во многих астрофизических приложениях влечет необходимость моделирования процесса переноса излучения [1, 2, 3, 4]. Большая часть такого рода задач связана с моделированием спектра излучения тех или иных объектов — звезд и звездных образований [5]. Задачи такого рода, как правило, не являются существенно трехмерными и во многих случаях позволяют перейти к дву- или одномерным приближениям, описывающим распространение звездного излучения в сферически или цилиндрически симметричных областях с высокой точностью.

В этих моделях существенным является поглощение и рассеивание излучения различной частоты веществом, в то время как воздействие излучения на вещество учитывается слабо. Поэтому достаточно часто в исследованиях этого класса применяются статистические методы типа Монте-Карло [6, 7], которые, с одной стороны, не позволяют получить достаточно гладких распределений интенсивности излучения в расчетной области, но, с другой стороны, позволяют собрать обширный статистический материал для вычисления усредненных интегральных параметров излучения — таких как, например, спектр излучения.

Кроме того, существует важная группа моделей, которая учитывает воздействие излучения на вещество в виде поглощения, сопровождаемого нагревом материи, ускорения вещества за счет передачи импульса от рассеиваемых фотонов частицам вещества и т.п. (в простейшем случае это динамические модели вида [8, 9]). Подобные модели требуют применения детерминистических подходов, включающих уравнение переноса излучения, и, как правило, накладывают существенные требования на гладкость получаемого распределения интенсивности излучения. Это связано с необходимостью использования производных от поля излучения при расчете в системе уравнений радиационной гидродинамики [10] дополнительных напряжений в веществе и мощности источников тепла, возникающих под воздействием излучения звезды и окружающего ее аккреционного диска [1, 11]. Простое по виду уравнение переноса излучения (УПИ) содержит в себе целый ряд сложностей для численного ис-

следования, связанных прежде всего с высокой размерностью уравнения. В уравнении переноса излучения дополнительные размерности, отвечающие направлениям распространения излучения, сочетаются с гиперболическим характером задачи, представляющей таким образом совокупность одномерных уравнений переноса во всех возможных и допускаемых задачах направлениях. Указанное обстоятельство приводит к высокой ресурсоемкости методов решения УПИ, что во многих случаях отрицательно сказывается на возможностях метода.

В данной работе рассмотрены некоторые методы решения УПИ в рамках моделей второго типа, в частности, метод конечных разностей, разрывный метод Галеркина и метод характеристик. В центре внимания оказывается вопрос о влиянии свойств методов, таких как монотонность, положительность, „эффект луча“, на применимость этих методов для моделирования астрофизических потоков. Также рассмотрено влияние характера дискретизации сферы направлений на свойства методов.

Авторы выражают благодарность О.В. Николаевой за полезные замечания и обсуждения в ходе работы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 09-01-00151-а, № 09-02-00502-а).

2 Полная система уравнений РМГД

Следуя [10, 12, 13, 14], запишем полную систему уравнений радиационной магнитной гидродинамики. Будем рассматривать квазистационарную моноэнергетическую модель распространения излучения. Подобный подход продиктован стремлением получить физическое и качественное представление о процессах, разворачивающихся в астрофизических системах, не усложняя модель излишним требованием высокого уровня количественного соответствия [1].

Указанная система дифференциальных уравнений в ограниченной пространственной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ на конечном временном интервале $[0, \mathcal{T}]$ для всех направлений, составляющих единичную сферу Ω , включает следующие фундаментальные законы (мы будем пользоваться системой единиц СГС как это принято в астрофизических приложениях).

1. Уравнение неразрывности для вещества

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где $\rho(t, \mathbf{x})$ — плотность плазмы [г/см³], $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = [v_1, v_2, v_3]^T$ — скорость вещества [см/с], $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $t \in [0, \mathcal{T}]$ — радиус-вектор и момент времени.

2. Уравнение переноса излучения (УПИ)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) &= \mathcal{S}I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + Q(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{x} \in D, \\ \mathcal{L}I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) &= \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + k(t, \mathbf{x})I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}), \\ \mathcal{S}I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) &= \beta(t, \mathbf{x}) \int_{\Omega} \Gamma(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}', \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathcal{L} и \mathcal{S} — операторы переноса и рассеяния соответственно, $I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ — интенсивность излучения [эрг/с·см²], распространяющегося вдоль направления вектора $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$, в точке с радиус-вектором \mathbf{x} в момент времени t , $k(t, \mathbf{x})$ — коэффициент ослабления [см⁻¹], $k = \alpha + \beta$, $\alpha(t, \mathbf{x})$ — коэффициент поглощения [см⁻¹] и $\beta(t, \mathbf{x})$ — коэффициент рассеяния [см⁻¹] излучения в веществе, $\Gamma(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}')$ — индикатриса рассеяния, равная вероятности изменения направления полета фотона с $\boldsymbol{\omega}'$ на $\boldsymbol{\omega}$,

$$\int_{\Omega} \Gamma(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' = 1,$$

$Q(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ — массовый источник излучения. В частности, если источником является равновесное излучение, то $Q(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \alpha(t, \mathbf{x})I^0(t, \mathbf{x})$, где $I^0(t, \mathbf{x}) = \frac{2\tilde{k}^4\pi^4 (T(t, \mathbf{x}))^4}{15h^3c^2}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг·с — постоянная Планка, $\tilde{k} = 1,3807 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана, $T(t, \mathbf{x})$ — температура вещества [К]. Отметим, что уравнение (2) записано в предположении локального термодинамического равновесия в системе. Это предположение хорошо выполняется в областях, непосредственно прилегающих к аккреционным дискам.

3. Уравнение изменения импульса системы „вещество+излучение“

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v} + \mathbf{G}) + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{\Pi}} + \hat{\mathbf{T}}) = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} + \mathbf{F}_g, \quad (3)$$

где \mathbf{G} — плотность импульса излучения [г/с·см²], $\hat{\mathbf{\Pi}}$ — тензор плотности потока импульса вещества [г/см·с²], $\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j$, δ_{ij} — символ

Кroneкера, p — давление плазмы $[\text{г}/\text{см}\cdot\text{с}^2]$, $\hat{\mathbf{T}}$ — тензор плотности потока импульса излучения $[\text{г}/\text{см}\cdot\text{с}^2]$, $T_{ik} = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \omega_i \omega_k I d\omega$, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек — скорость света, $\mathbf{H} = [H_1, H_2, H_3]^T$ — вектор напряженности магнитного поля [Э], \mathbf{F}_g — объемная плотность гравитационной силы $[\text{дин}/\text{см}^3]$.

4. Уравнение изменения энергии системы “вещество+излучение”

$$\frac{\partial}{\partial t} (e + U) + \nabla \cdot (\mathbf{v}(e + p) + \mathbf{W}) = \frac{1}{4\pi} ((\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_g \cdot \mathbf{v}, \quad (4)$$

где $e = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2}$ — плотность энергии вещества $[\text{г}/\text{см}\cdot\text{с}^2]$ (уравнение состояния совершенного газа $p = \rho\varepsilon(\gamma - 1)$, ε — удельная внутренняя энергия [эрг/г], γ — показатель адиабаты), U — плотность энергии излучения $[\text{г}/\text{см}\cdot\text{с}^2]$, $U = \frac{1}{c} \int_{\Omega} I d\omega$, \mathbf{W} — поток энергии излучения [эрг/с·см²]

(вектор Пойнтинга), $\mathbf{W} = \int_{\Omega} \omega I d\omega$, $\mathbf{G} = \mathbf{W}/c^2$.

5. Закон Фарадея изменения магнитного поля (в случае среды с нулевым электрическим сопротивлением)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \quad (5)$$

Наибольших вычислительных ресурсов при решении рассматриваемой системы требует интегрирование уравнения переноса излучения (2). Это связано с принципиальной многомерностью этого уравнения: вообще говоря, интенсивность I зависит от трех пространственных координат (радиус-вектор \mathbf{x}), двух угловых координат (единичный вектор ω можно задать с помощью двух координат $\eta = \cos\theta$ и φ , где θ и φ соответственно полярный и азимутальный углы) и времени t . Последняя зависимость является в квазистационарной модели переноса излучения неявной и выражается только в зависимости радиационных коэффициентов вещества от термодинамических параметров (плотность, температура) плазмы. Иными словами, в каждый момент времени t интенсивность излучения в расчетной области должна подчиняться уравнению (2).

Отметим, что влияние поля излучения на движение вещества описывается в уравнениях (3) и (4) с помощью градиентов различных моментов интенсивности излучения. Данное обстоятельство при численном решении системы (1)–(5) приводит к необходимости получать насколько возможно гладкие распределения интенсивности, минимизируя эффекты численной немонотонности. Подобное обстоятельство становится критическим, например, для методов класса Монте-Карло, поскольку указанные методы обладают высокой статистической дисперсией.

Для замыкания системы (1)–(5) вводятся граничные условия задачи, в том числе, условия на излучение в виде [14]:

$$I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \epsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})I_0(\mathbf{x}) + \beta(t, \mathbf{x}) \int_{\Omega^+} \Gamma(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')I(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}',$$

$$\mathbf{x} \in \partial D, (\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}) < 0, \quad (6)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе ∂D в точке \mathbf{x} , $\epsilon(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ — направленная излучательная способность граничной поверхности в направлении $\boldsymbol{\omega}$,

$$\Omega^+ = \{\boldsymbol{\omega} \in \Omega \mid (\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}) > 0\}.$$

3 Численные методы решения УПИ

Наиболее разработанным классом методов решения уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики, составляющих часть системы (1)–(5), являются различного рода сеточные методы и в первую очередь методы конечных разностей (конечных объемов, методы типа Годунова [15, 16]). В связи с этим важной становится задача построения метода решения УПИ, согласованного с имеющейся вообще говоря неструктурированной сеткой. Подобный подход, например, реализуется в семействе методов дискретных ординат [13], реализующем разбиение единичной сферы направлений Ω и аппроксимирующем уравнение (2) согласно методу конечных разностей. Аналогично, пользуясь разбиением сферы направлений, можно строить конечноэлементные схемы решения УПИ, включая разрывный метод Галеркина. Рассмотрим подробно некоторые из этих методов и проанализируем, насколько примени-

мыми они являются в указанных нами условиях требования гладкости решения.

Пусть введено некоторое разбиение единичной сферы (сферы направлений)

$$\Omega = \left\{ \left[\sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi, \eta \right]^T \mid -1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$$

на N_d односвязных множеств $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N_d} \Omega_i$. Выберем внутри каждого подмножества Ω_i точку (направление) $\boldsymbol{\omega}^i$. Также будем ассоциировать Ω_i с телесным углом, имеющем вершину в центре сферы направлений Ω и отсекающим на ней указанное множество. Возможные виды разбиения сферы направлений и выбора направлений $\boldsymbol{\omega}^i$ будут обсуждены далее. Отметим, что направления $\boldsymbol{\omega}^i$ выбираются из соображений построения квадратурных формул вида $\int_{\Omega_i} \psi(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \approx \psi(\boldsymbol{\omega}^i) S_i^\omega$, где S_i^ω — телесный угол, построенный около направления $\boldsymbol{\omega}^i$ и равный площади Ω_i . Будем для простоты рассматривать уравнение переноса излучения в нерассеивающей среде ($\beta = 0$), причем массовым источником излучения является только равновесное излучение плазмы. Также опустим в данном рассмотрении зависимость от времени t . В этом случае УПИ принимает вид:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + \alpha(\mathbf{x}) I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \alpha(\mathbf{x}) I^0(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Следующим упрощением является рассмотрение задачи в полной двумерной постановке. Это значит, что физические величины задачи (1)–(5) не зависят от координаты z , но векторы (скорости, напряженности магнитного поля) могут иметь ненулевыми все три компоненты. Это приближение не вводит дополнительных ограничений на направления распространения излучения.

3.1 Метод конечных разностей (МКР)

Как это было сделано в [16], будем рассматривать треугольные неструктурированные сетки. Это значит, что расчетную двумерную область D (отметим, что уравнения (1)–(5) записаны для произвольной, вообще говоря трехмерной, области \mathcal{D}) будем представлять в виде объединения N_c треугольников, а разностную схему будем получать согласно так называемому методу

конечных объемов. Для этого построим на каждом j -м треугольнике разбиения области D площадью S_0^j призму V^j единичной высоты. Площади граней обозначим соответственно S_k^j , $k = \overline{1, 3}$, где индекс k пробегает стороны треугольника-основания. Полную площадь поверхности призмы обозначим S^j .

Проинтегрируем уравнение (7) по угловой переменной по телесному углу Ω_i и по пространственной переменной по призме (ячейке) V^j :

$$\begin{aligned} \int_{V^j} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} dV + \int_{V^j} \int_{\Omega_i} \alpha(\mathbf{x}) I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} dV &= \int_{V^j} \int_{\Omega_i} \alpha(\mathbf{x}) I^0(\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega} dV \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{S_i^\omega V^j} \int_{V^j} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} dV + \alpha_j I_j^i = \alpha_j I_j^0, \quad (8) \end{aligned}$$

где $I_j^i = \frac{1}{S_i^\omega V^j} \int_{V^j} \int_{\Omega_i} I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} dV = \frac{1}{S_i^\omega S_0^j} \int_{S_0^j} \int_{\Omega_i} I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} dS$ — среднее значение интенсивности излучения в ячейке V^j , распространяющегося внутри телесного угла Ω_i , α_j — некоторое усредненное значение коэффициента поглощения среды, приписанное ячейке V^j (треугольной площадке S_0^j),

$$I_j^0 = \frac{1}{V^j} \int_{V^j} I^0(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{S^j} \int_{S^j} I^0(\mathbf{x}) dS.$$

Отметим, что в уравнении (8) точное равенство, вообще говоря, может быть нарушено выбором способа вычисления α_j (если, например, без дополнительных оговорок принять его равным значению коэффициента α в центре ячейки). Необходимость делать единый для всей расчетной области выбор такого способа приводит к приближенному решению задачи. Рассмотрим подробнее первое слагаемое в левой части равенства (8) (далее принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам от 1 до 3 в отношении индексов, представленных греческими буквами):

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_i^\omega V^j} \int_{V^j} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} dV &= \frac{1}{S_i^\omega S_0^j} \int_{\Omega_i} \int_{V^j} \omega_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dV d\boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{S_i^\omega S_0^j} \int_{\Omega_i} \int_{V^j} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\omega_\alpha I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})) dV d\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{S_i^\omega S_0^j} \int_{\Omega_i} \oint_{S^j} \omega_\alpha n_\alpha I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dS d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Здесь вектор \mathbf{n} — нормаль к поверхности вычислительной ячейки. Приведенный вид первого слагаемого в силу обобщенной формы записи удобен для построения разностных схем в криволинейных системах координат (в частности, в цилиндрической), где изменению подвергнутся только геометрическая форма ячейки и значения соответствующих нормалей. В двумерном же случае интеграл по S_i вырождается в сумму интегралов по боковым граням ячейки (интегралы по основаниям призмы взаимно уничтожаются в силу двумерности постановки задачи), причем в силу их прямолинейной формы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_i^\omega S_0^j} \int_{\Omega_i} \oint_{S^j} \omega_\alpha n_\alpha I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dS d\boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{S_i^\omega S_0^j} \int_{\Omega_i} \sum_{k=1}^3 \int_{S_k^j} \omega_\alpha n_\alpha^{j,k} I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dS d\boldsymbol{\omega} = \\ &= \frac{1}{S_0^j} \sum_{k=1}^3 \omega_\alpha^i n_\alpha^{j,k} I_{j,k}^i l_{j,k}, \end{aligned}$$

где $l_{j,k}$ — длина k -й стороны j -й ячейки (треугольника), $I_{j,k}^i$ — некоторое среднее значение интенсивности излучения на k -й стороне j -й ячейки в i -м телесном угле. Таким образом, мы получаем $N_d N_c$ уравнений вида

$$\frac{1}{S_0^j} \sum_{k=1}^3 \omega_\alpha^i n_\alpha^{j,k} I_{j,k}^i l_{j,k} + \alpha_j I_j^i = \alpha_j I_j^0. \quad (9)$$

Способ выбора аппроксимации граничной интенсивности $I_{j,k}^i$ определяет вид разностной схемы. Для замыкания системы уравнений (9) необходимо выразить эти величины через средние по ячейкам значения интенсивностей I_j^i . Вопрос о записи подобного выражения является по сути задачей выбора способа интерполяции функции интенсивности излучения, причем от него весьма существенно зависит монотонность получаемой схемы. На настоящий момент предложено большое число вариантов проведения подобной интерполяции, опирающихся на различные теоретические предположения [17, 13, 18]. В общем виде для соседних j -й и m -й ячеек, касающихся по грани, имеющей в ячейке j номер k , эту величину можно записать следующим образом:

$$I_{j,k}^i = A_{j,m(k)}^i I_j^i + B_{j,m(k)}^i I_{m(k)}^i, \quad (10)$$

причем коэффициенты зависят от угла между направлением распространения излучения $\boldsymbol{\omega}^i$ и нормалью $\mathbf{n}^{j \rightarrow k}$ к грани, по которой соприкасаются j -я и

m -я ячейки (для определенности будем считать, что эта нормаль внешняя по отношению к j -й ячейке). В простейшем случае можно задать коэффициенты следующим способом:

$$\begin{cases} A_{j,m(k)}^i = 1, & B_{j,m(k)}^i = 0, & (\mathbf{n}^{j \rightarrow k}, \boldsymbol{\omega}^i) \geq 0, \\ A_{j,m(k)}^i = 0, & B_{j,m(k)}^i = 1, & (\mathbf{n}^{j \rightarrow k}, \boldsymbol{\omega}^i) < 0. \end{cases} \quad (11)$$

В более точных методах особому рассмотрению подвергается случай, когда телесный угол S_i^ω , центр которого совмещен с центром грани контакта ячеек, захватывает обе ячейки. В этом случае коэффициенты могут быть заданы следующим образом:

$$A_{j,m(k)}^i = S_{i,j}^\omega / S_i^\omega, \quad B_{j,m(k)}^i = S_{i,m(k)}^\omega / S_i^\omega,$$

где $S_{i,j}^\omega$ и $S_{i,m(k)}^\omega$ — части телесного угла, попадающие в j -ю и m -ю ячейки соответственно [19].

Также, для корректного определения правой части получаемой системы линейных уравнений необходимо задать граничные условия вида (6). Отметим, что в случае условий, реализующих излучающую границу, на гранях граничных ячеек будут заданы величины $I_{j,k}^i$ для тех направлений, для которых вектор $\boldsymbol{\omega}^i$ направлен внутрь расчетной области.

3.2 Разрывный метод Галеркина (РМГ)

В последние годы получил широкое распространение разрывный метод Галеркина [20, 21, 22], удачно сочетающий точность аппроксимации потоков на гранях ячеек, присущую конечно-разностным методам типа Годунова, и преимущества слабой постановки задачи в энергетическом пространстве, которыми обладают стандартные непрерывные методы конечных элементов (методы Бубнова-Галеркина, Петрова-Галеркина и т.д.). Этот метод на настоящий момент применяется и в ряде задач моделирования излучения [23]. В силу специфики метода особенно это касается задач, в которых принципиальной является высокая степень разрешения узко-сфокусированных лучей излучения.

Снова будем рассматривать уравнение (7) и разбиения области D и единичной сферы направлений Ω , как это сделано в разделе 3.1. Домножим скалярно (в смысле скалярного произведения в L_2) (7) на тестовую функцию

$\psi(\mathbf{x})$, заданную, вообще говоря, в области \mathcal{D} , и проинтегрируем его по телесному углу Ω_i :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \int_{\mathcal{D}} \psi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dV d\boldsymbol{\omega} + \int_{\Omega_i} \int_{\mathcal{D}} \alpha(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dV d\boldsymbol{\omega} = \\ = \int_{\Omega_i} \int_{\mathcal{D}} \alpha(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) I^0(\mathbf{x}) dV d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим первое слагаемое в левой части записанного уравнения:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \int_{\mathcal{D}} \psi(\mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dV d\boldsymbol{\omega} &= \int_{\Omega_i} \int_{\mathcal{D}} \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \omega_\alpha I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dV d\boldsymbol{\omega} = \\ &= \int_{\Omega_i} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\psi(\mathbf{x}) \omega_\alpha I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})) dV d\boldsymbol{\omega} - \int_{\Omega_i} \int_{\mathcal{D}} \omega_\alpha I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi(\mathbf{x}) dV d\boldsymbol{\omega} = \\ &= \int_{\Omega_i} \oint_{\partial \mathcal{D}} \psi(\mathbf{x}) \omega_\alpha n_\alpha I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) dV d\boldsymbol{\omega} - \int_{\Omega_i} \int_{\mathcal{D}} I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \psi(\mathbf{x})) dV d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Введем систему линейных финитных базисных функций $\Psi = \{\psi_{j,k}(\mathbf{x})\}_{j=1, N_c}^{k=1, 3}$, причем носителем функции $\psi_{j,k}(\mathbf{x})$ является ячейка (элемент) V_j . $\psi_{j,k}$ равна 1 в k -й вершине треугольника и нулю в остальных. Будем представлять искомую функцию интенсивности в виде

$$I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \approx \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{k=1}^3 I_{j,k}(\boldsymbol{\omega}) \psi_{j,k}(\mathbf{x}) = I_h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}).$$

Также будем считать, что пробные функции принадлежат той же системе Ψ . Теперь, если ввести обозначения

$$I_{j,k}^i = \frac{1}{S_i^\omega} \int_{\Omega_i} I_{j,k}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}, \quad I^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_i^\omega} \int_{\Omega_i} I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega},$$

то уравнение (12) приближенно будет аппроксимироваться следующей системой (отметим, что в силу финитности базисных функций интегрирование по

пространству в каждом из уравнений производится только по одной ячейке):

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^3 \omega_{\alpha}^i n_{\alpha}^{j,p} \int_{S_p^j} I^i(\mathbf{x}) \psi_{j,k}(\mathbf{x}) dS - \sum_{r=1}^3 I_{j,r}^i \boldsymbol{\omega}^i \cdot \int_{V_j} \psi_{j,r}(\mathbf{x}) \nabla \psi_{j,k}(\mathbf{x}) dV + \\ & + \alpha_j \sum_{r=1}^3 I_{j,r}^i \int_{V_j} \psi_{j,r}(\mathbf{x}) \psi_{j,k}(\mathbf{x}) dV d\boldsymbol{\omega} = \alpha_j \int_{V_j} \psi_{j,k}(\mathbf{x}) I^0(\mathbf{x}) dV, \\ & j = \overline{1, N_c}, i = \overline{1, N_d}, k = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Как и в случае конечно-разностного метода, определяющей для разновидности разрывного метода Галеркина является аппроксимация интеграла

$$\int_{S_p^j} I^i(\mathbf{x}) \psi_{j,k}(\mathbf{x}) dS.$$

В силу способа задания базисной системы Ψ функция $I_h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$, вообще говоря, не является непрерывной на границах ячеек и в указанном интеграле значения функции интенсивности должны выбираться в виде некоторой комбинации соответствующих значений „слева“ и „справа“ („левое“ и „правое“ определяются положительным — против часовой стрелки — обходом граней ячейки) от границы ячейки. Наиболее простая аппроксимация, как и в разделе 9, предусматривает „снос значений по потоку“ распространения излучения (аналогично формулам (10)–(11)). Подобный подход аналогичен широкому классу методов типа Годунова решения задач, например, газовой динамики, в которых рассматриваемый интеграл представляет собой численный аналог потока (вещества, импульса, энергии) через границу ячейки. В этих методах аппроксимация потока строится исходя из информации о скоростях распространения возмущений (сравнительно в двух соседних ячейках). В нашем же случае скорость распространения излучения считается бесконечной по модулю, а направление ее задается вектором $\boldsymbol{\omega}^i$, поэтому прямой „снос по потоку“ является оправданным.

Система (13) замыкается указанием дискретных аналогов граничных условий на интенсивность излучения.

3.3 Метод характеристик (МХ)

Уравнение (7) легко представить в виде обыкновенного дифференциального уравнения, что соответствует физической сущности задачи. Действительно, его можно переписать в виде

$$\frac{dI(s, \boldsymbol{\omega})}{ds} + \alpha(s)I(s, \boldsymbol{\omega}) = \alpha(s)I^0(s), \quad (14)$$

где s — параметр, имеющий смысл расстояния и отсчитываемый вдоль направления $\boldsymbol{\omega}$, а $\frac{dI(s, \boldsymbol{\omega})}{ds}$ по сути представляет собой производную функции $I(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ по первому аргументу вдоль направления вектора $\boldsymbol{\omega}$. Прямую, сонаправленную с вектором $\boldsymbol{\omega}$ и проходящую через данную точку \mathbf{x} (назовем ее опорной) будем называть характеристикой уравнения (7). Ясно, что дифференциальная задача сводится теперь к интегрированию уравнения (7) вдоль всех возможных характеристик (как по направлению, так и по опорной точке). В случае приближенного интегрирования УПИ мы можем отобрать некоторое конечное число характеристик и проводить интегрирование только вдоль них.

Подобный подход, в силу его простоты и наглядности, получил развитие с самых первых исследований в области приближенного (численного) решения УПИ (см., например, [24]). Видно, что уравнение (14) легко интегрируется, если задать значение интенсивности $I(s, \boldsymbol{\omega})$ в некоторой (предпочтительно граничной) точке. Более того, точность получаемых результатов зависит только от выбранной квадратурной формулы и от точности определения коэффициентов уравнения (если, например, $\alpha(s)$ и $I^0(s)$ определяются с использованием решений уравнений магнитной гидродинамики, как это имеет место в системе (1)–(5)). В то же время интегрирование уравнения по большому числу характеристик требует существенных вычислительных затрат. И хотя в указанном виде задача легко может быть распараллелена и решена на высокопроизводительных вычислительных системах, появление оператора рассеивания \mathcal{S} в правой части уравнения (14) существенно уменьшит возможности параллельных алгоритмов.

Основной трудозатратной операцией данного метода является следующая. Пусть в расчетной области введена треугольная неструктурированная сетка и на ней задано некоторое распределение сеточной функции α_i коэффициента поглощения. Тогда для интегрирования уравнения (14) необходимо постро-

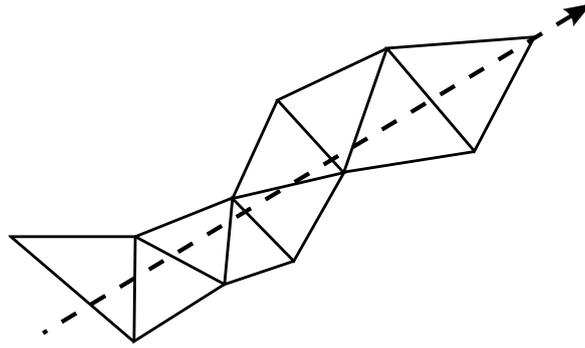


Рис. 1. Трассировка луча на треугольной сетке в плоском двумерном случае

ить траекторию луча на введенной пространственной сетке — необходимо протрассировать путь луча до искомой точки от границы, определив номера лежащих на нем треугольников и длины соответствующих участков пути. В двумерном плоском случае эта задача сводится к трассировке прямолинейного луча на треугольной сетке (см. рис. 1). В других случаях (например, в цилиндрических координатах) это, вообще говоря, не так, поскольку необходимо провести трассировку следа луча в дискретизированной расчетной области (в цилиндрических координатах луч на плоскости zOr будет представлен кривой второго порядка — гиперболой).

Отметим существенную особенность указанного метода в отличие от двух предыдущих. Интегрирование УПИ (7) методом характеристик и получение значения поля интенсивности излучения $I(\mathbf{x}, \omega)$ в точке \mathbf{x} производится независимо от получения значения этого же поля в любой другой точке и в любом другом направлении. На практике это выражается в том, что для реализации метода не требуется составлять и решать систему линейных уравнений относительно усредненных моментов интенсивности излучения. Подобный подход позволяет существенно экономить ресурсы памяти, задействованной в вычислениях и, как следствие, позволяет решать задачу с использованием существенно большего числа дискретных направлений, чем это доступно в методе конечных разностей или в разрывном методе Галеркина.

3.4 Дискретизация угловой переменной

До сих пор нами не вводилось никаких ограничений на способ дискретизации угловой переменной. В то же время от этой дискретизации существенно зависят итоговые вычислительные возможности рассмотренных методов. Бо-

лее того, использование в задаче геометрических представлений специального вида накладывает дополнительные ограничения на выбор способа разбиения сферы направлений Ω . Например, конечно-разностная запись уравнения (7) в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) содержит производную по углу φ и не содержит производной по ϕ только при условии, что шаги разбиения по φ и ϕ совпадают [25]. Для упрощения алгоритма эту задачу можно свести к задаче разбиения прямоугольной двумерной области в координатах (φ, η) :

$$\Omega_c = \{(\varphi, \eta) - 1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Особенности разбиения сферы направлений часто диктуются необходимостью аппроксимации интегрального оператора рассеивания, в дискретной задаче представимого с помощью квадратурной формулы того или иного типа. Вообще говоря, с одной стороны, узлы квадратурной формулы и являются узлами разбиения, а, значит, выбирать их необходимо из условия наибольшей точности вычисления интеграла рассеивания. С другой стороны, от способа выбора точек разбиения сферы направлений зависит, насколько точную информацию о распределении поля интенсивности излучения по направлениям мы получим в результате решения. И в этом смысле разбиение сферы направлений должно быть произведено как можно более однородным образом, что может не совпадать с „удобной“ для интегрирования сеткой направлений.

Самым простым вариантом разбиения является прямоугольная сетка в области Ω_c с постоянным шагом, изображенная на рис. 2 а). По аналогии с сеткой меридианов и параллелей будем называть ее географической. Большим минусом этой сетки является то, что телесные углы, отсекаемые различными вычислительными ячейками, существенно отличаются друг от друга, причем имеет место сгущение сетки в окрестности полюсов сферы направлений.

Другой способ, отчасти наследующий первому, чаще всего применяется при реализации S_N -метода (см., например, [26]), причем параметр N определяет подробность вводимой сетки. Этот способ предусматривает разбиение сферы направлений на ячейки равной площади. Разбиение первоначально вводится на четверти сферы $0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi$, а потом отражением переносится на остальную часть сферы. На интервале $0 \leq \eta \leq 1$ задаются узлы $\eta_m = \cos \theta_m, m = 1, \dots, N/2$. Для каждого η_m интервал изменения угла $\varphi \in [0, \pi]$ делится на подинтервалы $\varphi_{m,l-1/2} \geq \varphi \geq \varphi_{m,l+1/2}, l = 1, \dots, L_m$,

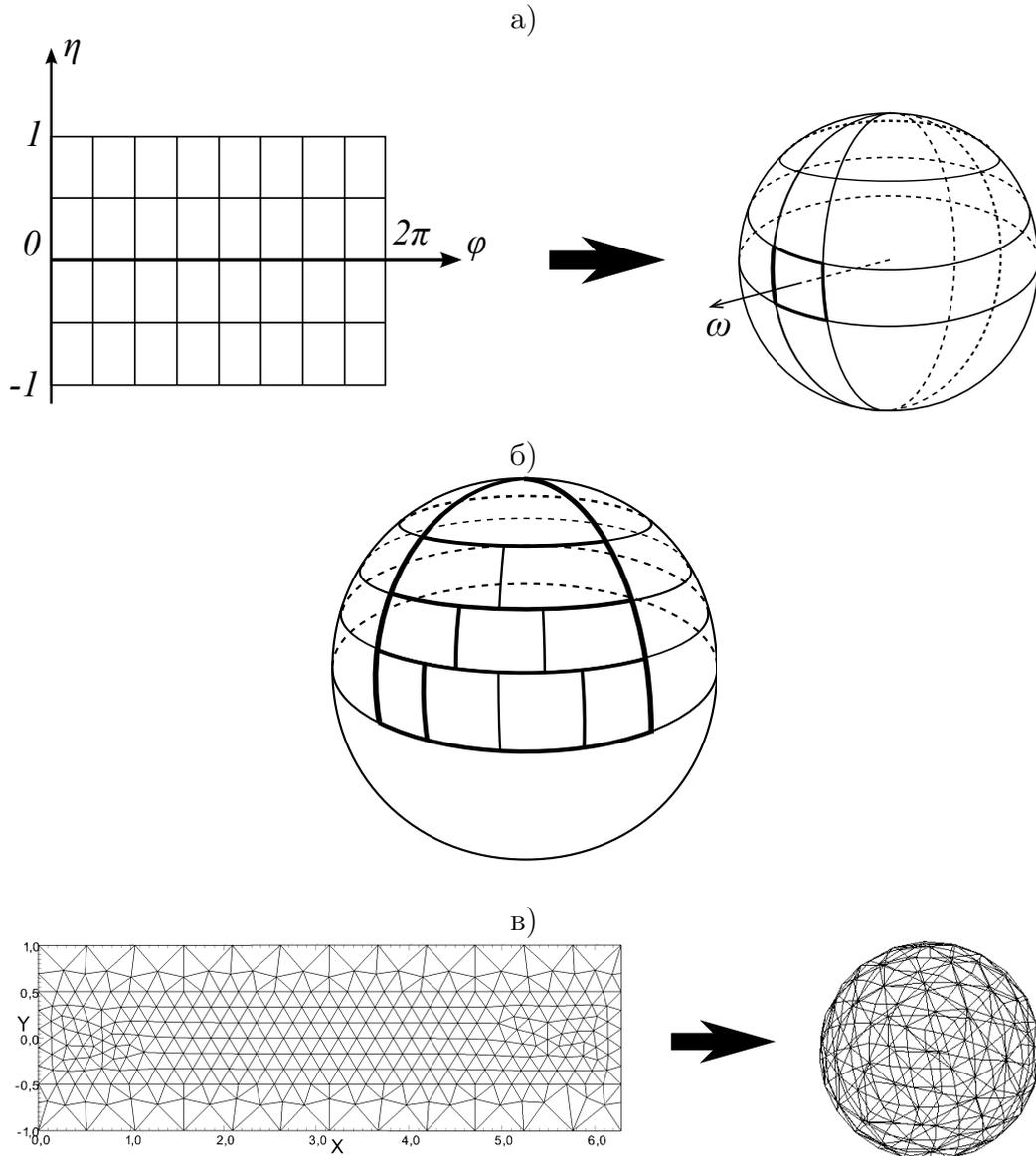


Рис. 2. Сетки на сфере направлений: а) — „географическая“ сетка; б) — S_N -разбиение октанта; в) — треугольная неструктурированная сетка.

где $L_m = N - 2m + 2$, $\varphi_{m,1/2} = \pi$, $\varphi_{m,L_m+1/2} = 0$. Расположение ячеек сетки S_8 представлено на рис. 2 б).

Отметим, что указанные способы разбиения сферы направлений ведут к появлению особой разновидности широко известного „эффекта луча“, причем вне зависимости от подробности разбиения. Этот эффект в „географическом“ способе разбиения обусловлен неизменным наличием „линий склейки“ при $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ и в остальных точках сетки φ_i . В S_N -способе тот же эффект обусловлен наличием еще большего числа „линий склейки“ в силу изначально высокой симметричности сетки. Из-за наличия подобных линий на сфере появляются плоскости в пространстве, распространение излучения в которых в

расчетах не рассматривается. В случае, например, точечного источника это порождает артефактные лучеобразные области падения интенсивности, геометрические размеры которых нарастают с удалением от источника.

Одним из способов избежания „эффекта луча“ такого рода является использование неструктурированных сеток. Один из вариантов подобного разбиения может быть получен при использовании треугольных сеток в области Ω_c . Отметим однако тот момент, что при введении подобного разбиения необходимо обеспечить уменьшение плотности сетки в областях, прилегающих к „полюсам“ $\eta = 1$ и $\eta = -1$, т.к. при отображении на сферу направлений данные области будут сжаты тем больше, чем ближе они располагаются к полюсам. Тем не менее, полностью избежать неравномерности площадей ячеек в данном способе невозможно, что, впрочем, не оказывает существенного влияния на качество решения при возрастании подробности сетки. Также отметим наличие „линии склейки“ при $\varphi = 0$, которую легко убрать небольшими смещениями соответствующих узлов с учетом периодичности отсчета азимутального угла. Сетка указанного вида может быть построена с использованием комплекса программ, описанного в [27]. Примерный вид получаемой сетки изображен на рис. 2 в).

Другой способ избежания „эффекта луча“ учитывает геометрические особенности постановки задачи и применим прежде всего в методе характеристик. В отличие от МКР и РМГ в методе характеристик не предполагается необходимость наличия единой сетки направлений для каждой точки области D . Это означает, что, вообще говоря, дискретизация сферы направлений при вычислении значений интенсивности в разных точках расчетной области может меняться, „подстраиваясь“ под особенности расположения той или иной точки. Тогда будем вычислять интенсивность излучения вдоль лучей (направлений), проходящих в данную точку из всех граничных ячеек (т.е. со всех участков границы, отсекаемых на ней граничными треугольными ячейками пространственного разбиения задачи). В случае близости рассматриваемой точки к границе введем некоторое количество дополнительных направлений, позволяющих избежать разреженности сетки направлений (см. рис. 3). Будем называть полученный способ дискретизацией направлений „от границы“.

Далее будем обсуждать только треугольное и S_N разбиения сферы направлений, а также дискретизацию направлений „от границы“, поскольку все

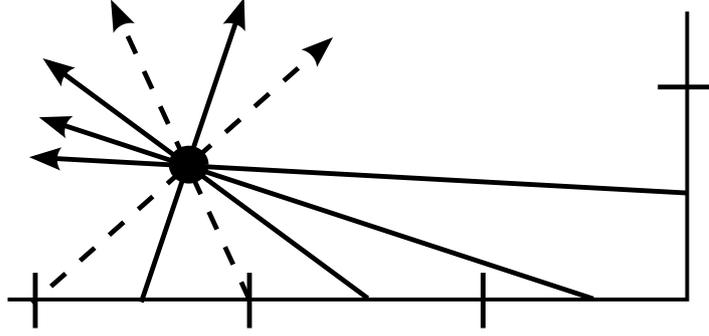


Рис. 3. Дискретизация направлений „от границы“ в случае близости рассматриваемой точки к границе вычислительной области.

достоинства „географической“ сетки реализованы в S_N -разбиении, а „эффект луча“ в „географической“ сетке, очевидно, будет более выраженным.

4 Сравнительное тестирование эффективности методов

Рассмотрим возможности указанных методов на ряде простых тестовых задач. Основной целью данного тестирования является выявление характерных свойств численных методов, существенных для решения астрофизических задач с распределенными параметрами, в частности, исследование влияния вычислительных артефактов на гладкость получаемого решения (особая важность этого вопроса обсуждалась в разделе 2).

В качестве тестовых задач рассмотрим задачи о моделировании распространения луча, о точечном источнике и о распределенном источнике излучения. Задачи такого типа позволяют проанализировать основные свойства рассматриваемых методов, прежде всего относящиеся к монотонности и положительности получаемых численных схем. В то же время такого рода задачи входят в качестве составной части в любую задачу моделирования излучения.

4.1 Задача о распространении луча

Задача о распространении луча является стандартным тестом для исследования свойств аппроксимации оператора переноса \mathcal{L} [28]. В задаче моделируется прохождение направленного луча через вакуум ($\alpha(\mathbf{x}) \equiv 0$, $I^0(\mathbf{x}) \equiv 0$). В дифференциальном случае решение не содержит рассеяния излучения вдоль всего луча. При численном решении задачи эффекта рассеивания луча не удастся избежать прежде всего потому, что дискретизации подвергается в том

числе и сфера направлений, причем предусматривается некоторая процедура усреднения интенсивности излучения по телесному углу внутри угловой вычислительной ячейки. Тем не менее дополнительное рассеивание излучения может происходить в силу свойств самого численного метода.

Задача рассматривается в области $D = [0; 1] \times [0; 1]$. Луч света испускается с участка границы $y = 0$, $x \in [0.08; 0.1]$ вдоль вектора $\omega_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right]^T$, интенсивность излучения в указанном направлении составляет $I_{beam} = 0.1$. Отметим, что свойства решения в данном случае мало зависят от угла наклона луча, поскольку в работе используются треугольные неструктурированные сетки. Были проведены расчеты тремя указанными методами с различной по степени подробности S_N -дискретизацией.

Результаты расчетов представлены на рис. 4. Здесь показаны распределения интегральной по направлениям интенсивности излучения для различных методов. Приведенные результаты содержат ряд особенностей, обусловленных свойствами методов.

Так, одной из основных черт метода конечных разностей является сильное рассеивание решения, степень которого мало зависит от дискретизации сферы направлений. В рамках метода градиент интенсивности излучения аппроксимируется с первым порядком относительно линейных размеров вычислительных ячеек, причем система уравнений (9) обеспечивает связь всех ячеек в расчетной области вне зависимости от направления распространения излучения. Отметим при этом, что площадь поперечного (относительно направления распространения луча) сечения графика интенсивности остается постоянной вдоль всего луча, что можно трактовать как консервативность данной численной схемы.

Другие два метода — разрывный метод Галеркина и метод характеристик — практически не приводят к рассеиванию луча. Отметим, что во втором методе введение искусственного рассеивания связано лишь с необходимостью обеспечения „попадания“ луча из источника на границе в расчетный узел сетки. В свою очередь малая степень рассеивания в РМГ связана с использованием разрывных базисных функций, что позволяет четко разделить „освещенные“ и „неосвещенные“ участки расчетной области.

Из рис. 4 (б) видно, что решение, полученное методом РМГ, имеет артефактные минимумы и отрицательные значения интенсивности излучения.

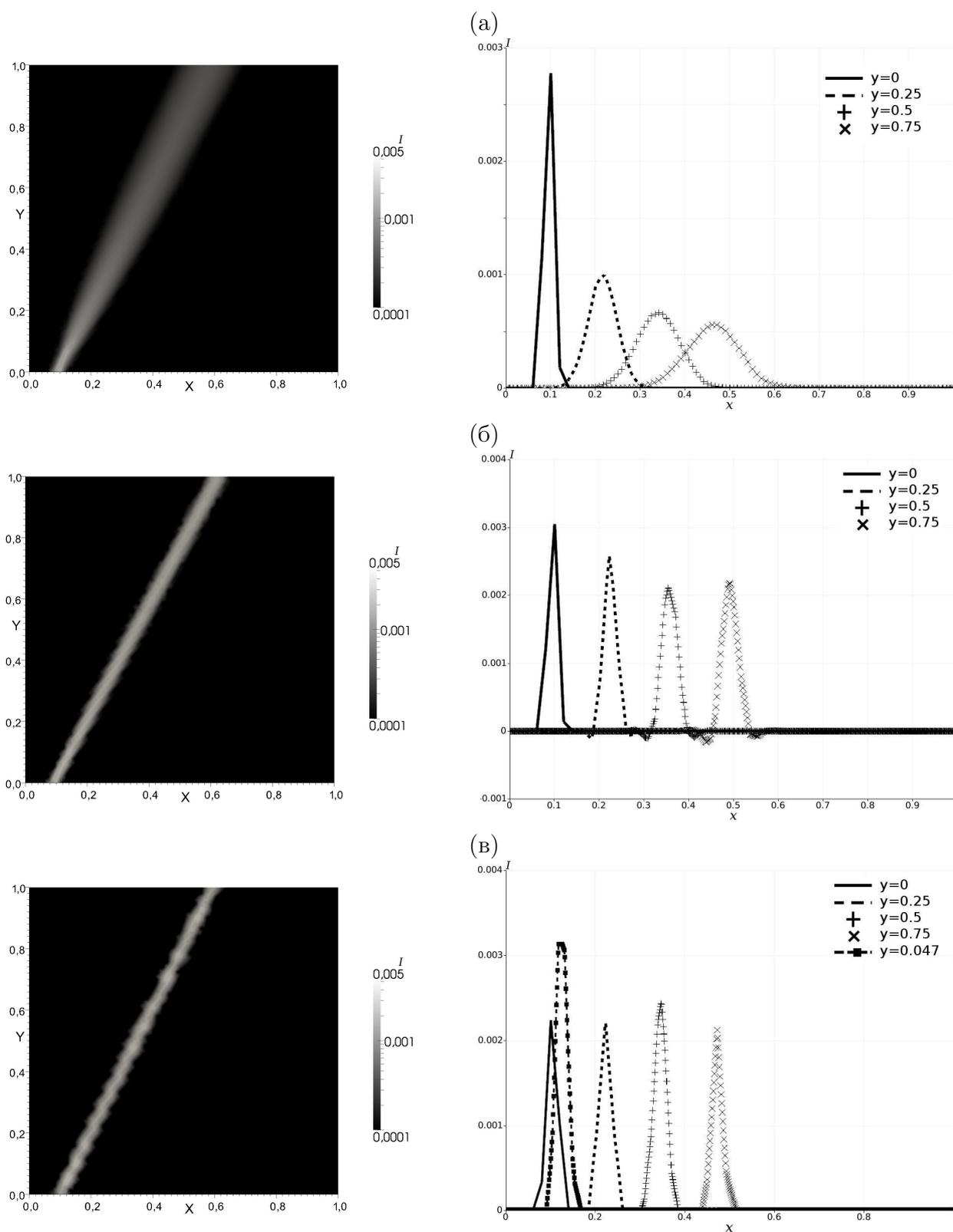


Рис. 4. Интенсивность излучения для задачи о распространении луча: распределение в области D и сечения плоскостями $y = 0; 0.25; 0.5; 0.75$. Сверху вниз: (а) МКР с S_{24} -дискретизацией, (б) РМГ с S_{12} -дискретизацией, (в) МХ с S_{24} -дискретизацией.

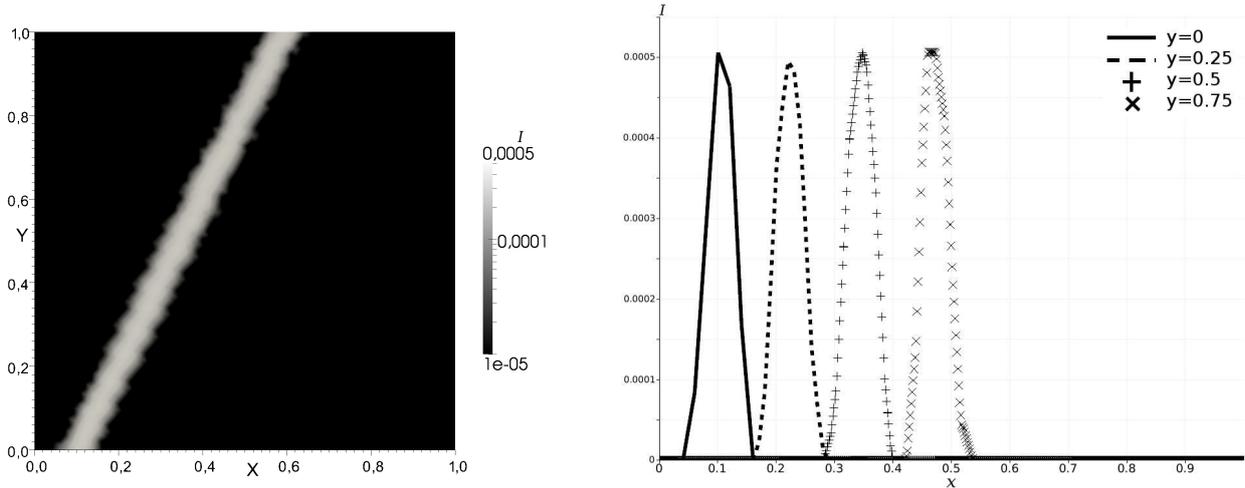


Рис. 5. Интенсивность излучения для задачи о распространении луча с увеличенным размером испускающего участка границы: распределение в области D и сечения плоскостями $y = 0; 0.25; 0.5; 0.75$. Решение получено методом характеристик с треугольным разбиением сферы направлений на 1914 направлений.

Подобные особенности указывают на то, что данный метод является немонотонным и неположительным [17]. В отличие от него метод характеристик всегда является положительным, поскольку предусматривает прямое вычисление ослабления излучения.

Отметим еще, что на правом графике на 4 (в) максимальные значения интенсивности излучения в различных сечениях в основном меньше соответствующих значений для других методов. Этот эффект связан с высокой степенью фокусировки луча, и при другом выборе сечений можно получать истинные значения интенсивности (в частности, как в приведенном сечении $y = 0.047$). Отметим, что в случае менее жесткого отбора направлений или увеличения размеров испускающего участка границы (менее жесткой фокусировки луча) метод дает существенно более гладкое решение, чем достижимо в двух „матричных“ методах, позволяя, в том числе, использовать недостижимые для этих методов по степени подробности сетки на сфере направлений (рис. 5).

4.2 Задача о точечном источнике излучения

Другой задачей, выявляющей характерные свойства рассматриваемых методов, является задача о точечном источнике. Как и в предыдущей задаче, предполагается, что свет излучается небольшим участком границы. Интен-

сивность постоянна, не зависит от направления ω и равна $I_{source} = 0.05$.

На рис. 6 приведены распределения интенсивностей излучения, полученные различными численными методами с использованием различной дискретизации сферы направлений. Отметим наличие сильного эффекта луча в большинстве приведенных результатов. Подобный эффект связан с особенностью постановки граничных условий — излучает только участок границы $y = 0$, $x \in [0.49; 0.51]$. Тем не менее, S_N -дискретизация усиливает этот эффект за счет наличия плоскостей симметрии. И хотя каждый из „слоев“ дискретизации $\eta_{m-1} \leq \eta \leq \eta_m$ можно повернуть (см. рис 2 б)) по азимуту, устранив такую плоскость, само наличие подобных слоев означает отсутствие излучения в конусах, определяемых значениями $\eta = \eta_m$, и, как неизбежное следствие, наличие в той или иной степени „эффекта луча“.

Подобного усиленного варианта „эффекта луча“ удастся избежать применением для дискретизации сферы направлений неструктурированных треугольных сеток. Тем не менее, за счет небольших размеров источника излучения этот эффект проявляется и при использовании метода характеристик. Полностью избежать его можно лишь при использовании сетки направлений, построенной „от границы“. Результат вычислений, проведенных методом характеристик с использованием подобной дискретизации, также приведен на рис. 6. Количество задействованных направлений несколько превосходит вычисления с использованием S_{16} -дискретизации, достигая 400. Видно при этом, что полученное решение кардинально отличается от всех остальных по точности, адекватности передачи особенностей задачи, полному отсутствию „эффекта луча“. Отметим, что в случае отсутствия внутри области дополнительных источников излучения подобный метод кажется наиболее предпочтительным и физически-адекватным условиям решаемой задачи, позволяя при относительно небольших вычислительных затратах получать решение высокого уровня разрешения.

Отметим также, что большое количество немонотонностей решения в методе характеристик с треугольной дискретизацией направлений связано прежде всего с тем, что в случае этого метода луч, попадающий в данную точку вдоль данного направления, должен исходить из излучающего участка границы, что становится более сложным для выполнения условием, когда количество направлений невелико. В случае МКР и РМГ подобных осцилля-

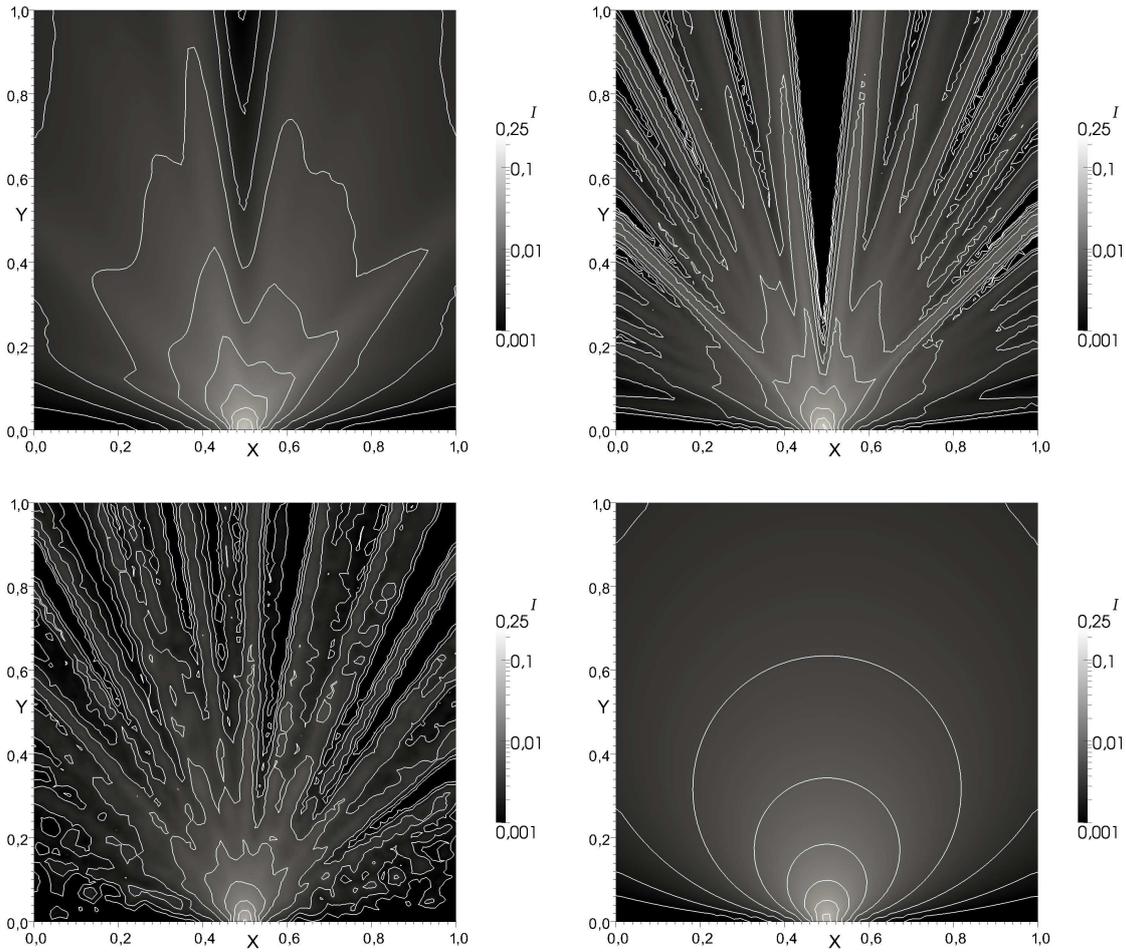


Рис. 6. Интенсивность излучения для задачи о точечном источнике: распределение в области D и 10 линий уровня в логарифмической шкале от 0.001 до 0.25. Слева направо сверху вниз: МКР с S_{16} -дискретизацией (288 направлений); РМГ с S_{16} -дискретизацией; МХ с треугольной сеткой направлений, содержащей 312 ячеек; МХ с дискретизацией „от границы“.

ций решения не происходит в связи с наличием искусственного рассеивания излучения, которое в свою очередь связано с тем, что излучение де факто переносится из одной пространственной вычислительной ячейки в другую по нормали к общей для ячеек грани с учетом направления распространения луча (распространение луча как локально-одномерного потока субстанции [29]). В МКР этот эффект существенно сильнее за счет построения самого метода, что также приводит к снижению „эффекта луча“.

4.3 Задача о распределенном источнике излучения

Данная задача наиболее близка к постановкам моделей астрофизических объектов и ускорения джетов, рассматриваемым в [1, 11, 30]. В подобного

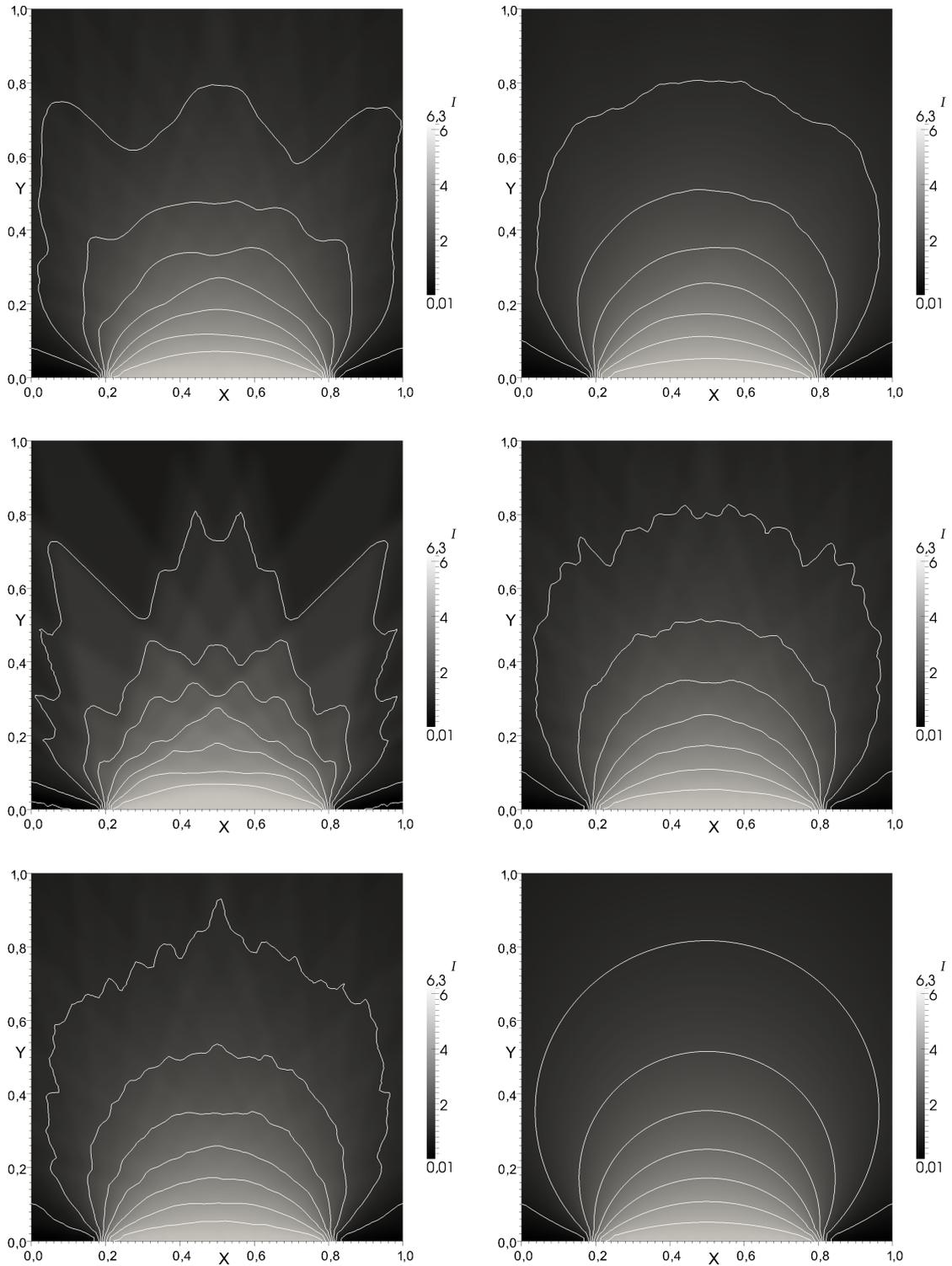


Рис. 7. Интенсивность излучения для задачи о распределенном источнике: распределение в области D и 10 линий уровня от 0.001 до 0.25. Слева направо сверху вниз: МКР с S_8 -дискретизацией (80 направлений); МКР с S_{24} -дискретизацией (624 направления); РМГ с S_8 -дискретизацией; МХ с S_{24} -дискретизацией; МХ с треугольной сеткой направлений, содержащей 616 ячеек; МХ с дискретизацией „от границы“.

рода задачах источником излучения является относительно протяженный участок границы (тонкий аккреционный диск вокруг компактного объекта). Аналогичным образом зададим граничные условия рассматриваемой задачи. Пусть излучающим является участок границы $y = 0$, $x \in [0.2; 0.8]$, интенсивность излучения не зависит от направления ω и равна $I_{source} = 1$. Результаты расчетов приведены на рис. 7.

Видно, что за счет высокой степени численного рассеяния излучения результат, полученный с помощью МКР, обладает наименьшим „эффектом луча“, причем это свойство усиливается с ростом числа направлений (так, при S_{24} -дискретизации сферы направлений „эффект луча“ практически отсутствует). Тем не менее, в силу высоких требований к объемам задействованной памяти для хранения матрицы системы линейных разностных уравнений существенно улучшить получаемый этим методом результат проблематично. Еще большие требования к объему памяти предъявляет РМГ, причем формируемая этим методом матрица требует существенно больших затрат ресурсов для своего решения, что серьезно ограничивает возможности измельчения сетки направлений. Отметим при этом, что в РМГ наиболее сильно проявляется „эффект луча“, что существенно осложняет применение этого метода в данном классе задач.

На рис. 7 приведено несколько результатов, полученных методом характеристик. Во всех случаях сфера направлений дискретизируется с примерно одинаковой степенью подробности. Видно, что за счет симметрии S_N -дискретизации результат расчетов в соответствующей комбинации методов является более гладким, чем при использовании треугольной сетки направлений. Снова, как и в предыдущей задаче, эталонная точность достигается методом характеристик с дискретизацией „от границы“.

5 Выводы и заключение

На ряде простых примеров мы рассмотрели качественные свойства решений, получаемых тремя различными численными методами решения уравнения переноса излучения. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Метод конечных разностей приводит к высокой степени рассеивания чис-

ленного решения задачи о переносе излучения. Подобное свойство удачно сказывается в тех задачах, в которых источник излучения имеет заметные по сравнению с расчетной областью геометрические размеры, и приводит к неприменимости данного метода в случаях, в которых необходимо обеспечить высокую степень фокусировки пучка излучения.

2. Разрывный метод Галеркина обладает ярко выраженным „эффектом луча“, что крайне негативно сказывается в задачах с распределенным источником излучения. В то же время данный метод показал наилучшие результаты при моделировании сфокусированного луча света, обеспечивая высокое качество решения при крайне небольших размерах источника.
3. Метод характеристик предоставляет широкие возможности по выбору способа дискретизации сферы направлений. Различным способом выбранная дискретизация может приводить в том числе и к эталонной точности численного решения в случае дискретизации „от границы“.

Важно отметить, что даже включение в расчеты оператора рассеивания \mathcal{S} не позволяет полностью избежать „эффекта луча“, а в случае РМГ даже усиливает его. Таким образом, использование метода конечных разностей и метода характеристик для моделирования распределенных астрофизических источников излучения в постановках, близких к [1, 11, 30], представляется наиболее обоснованным. Также отметим, что метод характеристик существенно проще обобщить, например, на цилиндрическую систему координат, чем метод конечных разностей, где возникает необходимость корректно аппроксимировать возникающую производную по угловой переменной [25] с учетом выполнения балансных соотношений.

Основным и принципиальным преимуществом метода характеристик является возможность без существенных затрат памяти увеличивать количество рассматриваемых направлений. При этом операция трассировки луча становится все более емкой по времени, но при этом может быть достигнута угловая детализация практически любого уровня. Заметим, что в приведенной постановке метод легко распараллеливается, что при сегодняшнем уровне развития высокопроизводительной вычислительной техники компенсирует временные затраты на трассировку.

Список литературы

1. Галанин М.П., Лукин В.В., Чечеткин В.М. К постановке задачи моделирования астрофизических струйных выбросов. 2009. 30 с. Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН №36.
2. Icke V. Photon Surfing Near Compact Accreting Objects // *Astron. Astrophys.* 1989. Vol. 216. Pp. 294–304.
3. Ohsuga K. Two-dimensional Radiation-hydrodynamic Model for Supercritical Disk Accretion Flows onto Neutron Stars // *Publ. Astron. Soc. Japan.* 2007. Vol. 59, no. 5. Pp. 1033–1042.
4. Tajima Y., Fukue J. Radiative Disk Winds under Radiation Drag II // *Publ. Astron. Soc. Japan.* 1998. Vol. 50. Pp. 483–493.
5. Krivosheyev Yu.M., Bisnovatyi-Kogan G.S., Cherepashchuk A.M., Postnov K.A. Monte Carlo simulations of the broad-band X-ray continuum of SS433 // *MNRAS.* 2009. Vol. 394. Pp. 1674–1684.
6. Пригарин С.М. Основы статистического моделирования переноса оптического излучения. Учебное пособие. Новосибирск: Изд. Новосиб. ун-т, 2001. 82 с.
7. Hogerheijde M.R., van der Tak F.F.S. An accelerated Monte Carlo method to solve two-dimensional radiative transfer and molecular excitation. With applications to axisymmetric models of star formation // *Astron. Astrophys.* 2000. Vol. 362. Pp. 697–710.
8. Галанин М.П., Торопин Ю.М., Чечеткин В.М. Радиационное ускорение и выброс порций вещества в аккреционных воронках около астрофизических объектов. 1997. 32 pp. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН №40.
9. Галанин М.П., Торопин Ю.М., Чечеткин В.М. Радиационное ускорение порций вещества в аккреционных воронках около астрофизических объектов // *Астрономический журнал.* 1999. Т. 76, № 2. С. 143–160.
10. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985. 304 с.

11. Галанин М.П., Лукин В.В., Чечеткин В.М. Математическое моделирование струйных выбросов в окрестности компактных объектов // *Астрономический журнал*. 2009. Т. 86, № 4. С. 331–344.
12. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. М.: Наука, 1966. 688 с.
13. Басс Л.П., Быков А.В., Дергачев А.А. и др. Моделирование распространения оптического излучения в фантоме биологической ткани на суперЭВМ МВС1000/М // *Матем. моделирование*. 2006. Т. 18, № 1. С. 29–42.
14. Блох А.Г., Журавлев Ю.А., Рыжков Л.Н. *Теплообмен излучением*. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.
15. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
16. Галанин М.П., Лукин В.В. Разностная схема для решения двумерных задач идеальной МГД на неструктурированных сетках. 2007. 29 с. Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН №50.
17. Nikolaeva O.V., Bass L.P., Germogenova T.A. et al. *Light Scattering Reviews 2*. Springer Berlin Heidelberg, 2007. Pp. 295–347.
18. Басс Л.П., Николаева О.В. Улучшенная схема расчета переноса излучения в сильно гетерогенных средах и пустотах // *Матем. моделирование*. 1997. Т. 9, № 10. С. 63–72.
19. Kim Man Young, Baek Seung Wook, Park Jae Hyun. The Unstructured Finite Volume Method for Radiative Heat Transfer in Complex Two-Dimensional Geometries with Obstacles // *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*. 2001. Vol. 39, no. 6. Pp. 617–635.
20. Cockburn B., Shu Chi-Wang. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection - dominated problems // *Journal of scientific computing*. 2001. Vol. 16, no. 3. Pp. 173–261.

21. Галанин М.П., Грищенко Е.В., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Применение RKDG метода для численного решения задач газовой динамики. 31 с. Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН №52.
22. Галанин М.П., Савенков Е.Б., Токарева С.А. Решение задач газовой динамики с ударными волнами RKDG-методом // Матем. моделирование. 2008. Т. 20, № 11. С. 55–66.
23. Zhao J.M., Liu L.H. Discontinuous spectral element method for solving radiative heat transfer in multidimensional semitransparent media // Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2007. Vol. 107. Pp. 1–16.
24. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР. 1961. Т. 61. С. 3–158.
25. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 661 с.
26. Сычугова Е.П. Численные методы решения уравнения переноса в многогрупповом приближении в трехмерной геометрии в пакете «РЕАКТОР». 2007. 22 с. Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН №78.
27. Щеглов И.А. Программа для триангуляции сложных двумерных областей Gridder2D. 2008. 32 с. Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН №60.
28. Richling S., Meinköhn E., Kryzhevoi N., Kanschat G. Radiative transfer with finite elements. I. Basic method and tests // Astron. Astrophys. 2001. Vol. 380. Pp. 776–788.
29. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. Berlin: Springer, 1999.
30. Галанин М.П., Лукин В.В., Чечеткин В.М. Математическое моделирование струйных выбросов вещества в окрестности аккреционного диска. 2008. 36 с. Препр. Инст. Прикл. Матем. им. М.В. Келдыша РАН №54.