



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 56 за 2010 г.



Горючкина И.В.

Трехмерный анализ
асимптотик решений
шестого уравнения Пенлеве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Горючкина И.В. Трехмерный анализ асимптотик решений шестого уравнения Пенлеве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 56. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-56>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

И. В. Горючкина

ТРЕХМЕРНЫЙ АНАЛИЗ
АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ
ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Москва, 2010 г.

И. В. Горючкина. Трехмерный анализ асимптотик решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Цель этой работы – выяснить, существуют ли для решений шестого уравнения Пенлеве асимптотики типа асимптотик Бутру или иные асимптотики, отличные от тех, что были найдены ранее с помощью методов плоской степенной геометрии. Для решения этой задачи используются методы пространственной степенной геометрии. При этом, шестое уравнение Пенлеве сводится к системе двух дифференциальных уравнений. Ищутся асимптотики решений этой системы при $x \rightarrow 0, 1, \infty$. Как оказалось, решения шестого уравнения Пенлеве имеют 12 новых семейств асимптотик типа Бутру, отличных от асимптотик, найденных ранее с помощью методов плоской степенной геометрии.

I. V. Goryuchkina. Three-dimensional analysis of asymptotic forms of the solutions to the sixth Painlevé equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2010.

The purpose of this work is to clarify the question: can solutions to the sixth Painlevé equation have asymptotic forms of the Boutroux type or other asymptotic forms different from the forms obtained earlier by methods of plane power geometry. Methods of space power geometry are used to solve this task. For that, the sixth Painlevé equation is reduced to a system of two differential equations. We find asymptotic forms of solutions to the system for $x \rightarrow 0, 1, \infty$. As we found out, the sixth Painlevé equation has 12 new families of the Boutroux type asymptotic forms different from forms found earlier by methods of plane power geometry.

©ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2010 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00082).

E-mail: chukhareva@yandex.ru

Сайт: www.keldysh.ru

§1. Методы исследования и постановка задачи

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$h(x, y) y'' = f(x, y, y'), \quad (1)$$

где ' означает производную по x , функции $f(x, y, y')$ и $h(x, y)$ это конечные суммы вида

$$f(x, y, y') = \sum_{i=1}^n f_i x^{q_1^i} y^{q_2^i} y'^{q_3^i+1}, \quad q_1^i, q_2^i, q_3^i \in \mathbb{R}, \quad q_3^i \geq -1, \quad (2)$$

$$h(x, y) = \sum_{j=n+1}^{n+m} h_j x^{q_1^j} y^{q_2^j+1}, \quad q_1^j, q_2^j \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где коэффициенты f_i, h_j – комплексные постоянные, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

После степенного преобразования

$$y = x^\alpha v, \quad u = x^\beta, \quad \beta > 0 \quad (4)$$

уравнение (1) переходит в уравнение

$$\psi(u, v) \ddot{v} = \phi(u, v, \dot{v}), \quad (5)$$

При этом y' и y'' преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} y' &= \alpha x^{\alpha-1} v + \beta x^{\alpha+\beta-1} \dot{v}, \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} v + \beta(2\alpha+\beta-1)x^{\alpha+\beta-2} \dot{v} + \beta^2 x^{\alpha+2(\beta-1)} \ddot{v}. \end{aligned} \quad (6)$$

Если в уравнении (5) функции ϕ и ψ имеют вид

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0(v, \dot{v}) + \sum_{i=1}^l u^{-\gamma_i} \phi_i(v, \dot{v}), \quad \gamma_i > 0, \\ \psi &= \psi_0(v) + \sum_{j=1}^p u^{-\delta_j} \psi_j(v), \quad \delta_j > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

то при $u \rightarrow \infty$ монотонное или периодическое или дважды периодическое решение $v_0(u)$ уравнения

$$\psi_0(v) \ddot{v} = \phi_0(v, \dot{v}), \quad (8)$$

отделенное от бесконечности (т. е. $|v_0|, |\dot{v}_0| < \varepsilon^{-1} < \infty$), является асимптотикой решения уравнения (5), где ε – малое положительное число. Следовательно, при $x \rightarrow \infty$ уравнение (1) имеет решение с асимптотикой

$$y \sim x^\alpha v_0(x^\beta). \quad (9)$$

Задача 1. Найти такое степенное преобразование (4) для уравнения (1), что в полученном уравнении (5) функции ϕ и ψ имеют вид (7).

Уравнение (1) эквивалентно системе уравнений

$$(\ln y)' = y^{-1}z, \quad h(x, y)(\ln z)' = f(x, y, z)z^{-1}. \quad (10)$$

Запишем систему (10) в виде

$$\begin{aligned} h(x, y)(\ln y)' &= h(x, y)y^{-1}z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=n+1}^{n+m} h_j x^{q_1^j} y^{q_2^j} z \stackrel{\text{def}}{=} g_1(x, y, z), \\ h(x, y)(\ln z)' &= f(x, y, z)z^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i x^{q_1^i} y^{q_2^i} z^{q_3^i} \stackrel{\text{def}}{=} g_2(x, y, z). \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что производным $(\ln y)'$ и $(\ln z)'$ соответствует один и тот же векторный показатель степени $(-1, 0, 0)$. Поэтому носители $\tilde{\mathbf{S}}(h(x, y)(\ln y)')$ и $\tilde{\mathbf{S}}(h(x, y)(\ln z)')$ равны. Здесь и ниже обозначения с тильдой относятся к трехмерной степенной геометрии, а без тильды – к двумерной. Носитель системы (11) $\tilde{\mathbf{S}}$ определим как объединение двух носителей $\tilde{\mathbf{S}}(g_1) \cup \tilde{\mathbf{S}}(g_2)$. Носитель $\tilde{\mathbf{S}}(g_1)$ состоит из m точек $\tilde{Q}_j = (q_1^j, q_2^j, 1)$, $j = n + 1, \dots, n + m$, $n, m \geq 1$, носитель $\tilde{\mathbf{S}}(g_2)$ состоит из n точек $\tilde{Q}_i = (q_1^i, q_2^i, q_3^i)$, $i = 1, \dots, n$, среди которых могут быть точки \tilde{Q}_j . С помощью многогранника $\tilde{\Gamma}$, который является выпуклой оболочкой носителя $\tilde{\mathbf{S}}$, вычисляем укорочения $\hat{g}_1(x, y, z)$ и $\hat{g}_2(x, y, z)$. Если носитель $\tilde{\mathbf{S}}(g_2)$ имеет общую точку с носителем $\tilde{\mathbf{S}}(g_1)$, то $\hat{g}_1(x, y, z) \neq 0$. При этом $\hat{h}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}_1(x, y, z)y/z$. Пусть

$$\hat{h}(x, y)(\ln y)' = \hat{g}_1(x, y, z), \quad \hat{h}(x, y)(\ln z)' = \hat{g}_2(x, y, z), \quad (12)$$

это некоторая укороченная система, где $\hat{h}(x, y) \neq 0$ и $\hat{g}_1(x, y, z) \neq 0$. Тогда для любого $\hat{h}(x, y) \neq 0$ эта система эквивалентна уравнению

$$y'' = \frac{y'^2 \hat{g}_2(x, y, y')}{y \hat{g}_1(x, y, y')}. \quad (13)$$

Теорема 8.1.1. Пусть $\tilde{\Gamma}$ – многогранник Ньютона системы (11) и $\tilde{\Gamma}_k^{(d)}$ – такая его обобщенная грань, которая содержит хотя бы одну точку $\tilde{Q}_j \in \tilde{\mathbf{S}}(g_1)$, а ее нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(d)}$ содержит вектор $\tilde{P} = (1, p_2, p_3)$, т. е. $\omega = 1$. Если $p_2 < p_3 + 1$ у вектора \tilde{P} , то двумерное степенное преобразование (4) с

$$\alpha = p_2 \text{ и } \beta = p_3 - p_2 + 1 \quad (14)$$

переводит уравнение (1) в уравнение (5) со свойством (7).

Доказательство. Рассмотрим систему (11), эквивалентную уравнению (1), которую запишем в виде

$$h(x, y) \frac{y'}{y} = \sum_{j=n+1}^{n+m} h_j x^{q_1^j} y^{q_2^j} y', \quad h(x, y) \frac{y''}{y'} = \sum_{i=1}^n f_i x^{q_1^i} y^{q_2^i} y'^{q_3^i}. \quad (15)$$

Пусть на грани $\tilde{\Gamma}_k^{(d)}$ лежат точки \tilde{Q}_i с $i = 1, \dots, n_0$ и \tilde{Q}_j с $j = n+1, \dots, n+m_0$, а остальные точки \tilde{Q}_i с $i = n_0+1, \dots, n$ и \tilde{Q}_j с $j = n+m_0+1, \dots, n+m$ не лежат на ней. Сделаем преобразование (4) в системе (15). При этом рассмотрим второе уравнение системы (15), записанное в виде

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} h_j x^{q_1^j} y^{q_2^j+1} y'' = \sum_{i=1}^n f_i x^{q_1^i} y^{q_2^i} y'^{q_3^i+1}. \quad (16)$$

Учитывая формулы (4) и (6), получаем равенство

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{n+m} h_j u^{(q_1^j + \alpha q_2^j + (\alpha + \beta - 1) \cdot 1) / \beta} v^{q_2^j+1} \left[\beta^2 \ddot{v} + \beta(2\alpha + \beta - 1) \frac{\dot{v}}{u} + \alpha(\alpha - 1) \frac{v}{u^2} \right] = \\ = \sum_{i=1}^n f_i u^{(q_1^i + \alpha q_2^i + (\alpha + \beta - 1) q_3^i) / \beta} v^{q_2^i} \left[\beta \dot{v} + \alpha \frac{v}{u} \right]^{q_3^i+1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно (14) имеем $\tilde{P} = (1, \alpha, \alpha + \beta - 1)$. Для всех точек \tilde{Q}_i и \tilde{Q}_j , лежащих на грани $\tilde{\Gamma}_k^{(d)}$, скалярные произведения $\langle \tilde{Q}_i, \tilde{P} \rangle$ и $\langle \tilde{Q}_j, \tilde{P} \rangle$ одинаковы и равны σ , а для точек $\tilde{Q}_i, \tilde{Q}_j \in \tilde{\mathbf{S}} \setminus \tilde{\Gamma}_k^{(d)}$ это скалярное произведение меньше σ . Следовательно, для всех точек $\tilde{Q}_i = (q_1^i, q_2^i, q_3^i)$ и $\tilde{Q}_j = (q_1^j, q_2^j, 1)$, лежащих на грани $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$, выражения $(q_1^j + \alpha q_2^j + (\alpha + \beta - 1) \cdot 1) / \beta - \sigma$ и $(q_1^i + \alpha q_2^i + (\alpha + \beta - 1) q_3^i) / \beta - \sigma$ одинаковы и равны 0, а для остальных точек \tilde{Q}_i и \tilde{Q}_j , не лежащих на грани $\tilde{\Gamma}_k^{(d)}$, оно отрицательно. Разделим уравнение (17) на u^σ и запишем его в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=n+1}^{n+m} h_j u^{-\gamma_j} v^{q_2^j+1} \left[\beta^2 \ddot{v} + \beta(2\alpha + \beta - 1) \frac{\dot{v}}{u} + \alpha(\alpha - 1) \frac{v}{u^2} \right] = \\ = \sum_{i=1}^n f_i u^{-\gamma^i} v^{q_2^i} \left[\beta \dot{v} + \alpha \frac{v}{u} \right]^{q_3^i+1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\sigma - \gamma_j = \langle \tilde{Q}_j, \tilde{P} \rangle$, $\sigma - \gamma^i = \langle \tilde{Q}_i, \tilde{P} \rangle$, $\gamma_j, \gamma^i \geq 0$. Следовательно, левая часть уравнения (18) содержит все мономы

$$\beta^2 \ddot{v} \sum_{j=n+1}^{n+m_0} h_j v^{q_2^j+1} \quad (19)$$

с нулевой степенью u , а остальные ее мономы содержат u в отрицательных степенях, правая часть уравнения (18) также содержит все мономы

$$\beta \sum_{i=1}^{n_0} f_i v^{q_2^i} \dot{v}^{q_3^i+1} \quad (20)$$

с нулевой степенью u , остальные мономы содержат u в отрицательных степенях. Поэтому уравнение (5) имеет вид (7), где ψ_0 равно (19), а ϕ_0 равно (20). ■

Теорема 8.1.1 обобщает теорему 1 из [1]. Подобным образом были получены асимптотики типа Бутру решений первого и второго [1], третьего [5] и четвертого [6] уравнений Пенлеве.

§2. Случай $a \cdot b \cdot c \cdot (d - 1/2) \neq 0$

2.1. Приведение к системе. Шестое уравнение Пенлеве [2] имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) - y' \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left[a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right], \quad (21)$$

где a, b, c, d – комплексные параметры, x и y – комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Это уравнение имеет три особые точки $x = 0$, $x = \infty$ и $x = 1$.

Уравнение (21) эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z; \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) - z \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(a + b \frac{x}{y^2} + c \frac{x-1}{(y-1)^2} + d \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right). \end{cases} \quad (22)$$

Умножим каждое уравнение системы на общий знаменатель уравнения (21)

$h(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} 2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$ и запишем ее в виде

$$\begin{cases} h(x, y) \frac{d \ln y}{dx} = 2x^2(x-1)^2(y-1)(y-x)z; \\ h(x, y) \frac{d \ln z}{dx} = z[x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] - 2[x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)] + z^{-1}[2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2]. \end{cases} \quad (23)$$

2.2. Носитель и многогранник. Носитель правой части системы (23), т. е. множество векторных показателей степени $\tilde{Q} = (q_1, q_2, q_3)$ ее мономов $x^{q_1}y^{q_2}z^{q_3}$, есть $\tilde{\mathbf{S}} = \{\tilde{Q}_i, i = 1, \dots, 34\}$, где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1 &= (4, 2, 0), & \tilde{Q}_2 &= (3, 2, -1), & \tilde{Q}_3 &= (2, 4, -1), & \tilde{Q}_4 &= (5, 1, 1), \\ \tilde{Q}_5 &= (4, 2, 1), & \tilde{Q}_6 &= (3, 3, 0), & \tilde{Q}_7 &= (0, 6, -1), & \tilde{Q}_8 &= (1, 5, -1), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_9 &= (3, 0, 1), & \tilde{Q}_{10} &= (4, 1, 1), & \tilde{Q}_{11} &= (2, 1, 1), & \tilde{Q}_{12} &= (2, 2, 1), \\ \tilde{Q}_{13} &= (3, 1, 1), & \tilde{Q}_{14} &= (3, 2, 1), & \tilde{Q}_{15} &= (5, 0, 1), & \tilde{Q}_{16} &= (4, 0, 1), \\ \tilde{Q}_{17} &= (3, 0, -1), & \tilde{Q}_{18} &= (3, 1, -1), & \tilde{Q}_{19} &= (4, 1, 0), & \tilde{Q}_{20} &= (1, 2, -1), \\ \tilde{Q}_{21} &= (1, 3, -1), & \tilde{Q}_{22} &= (2, 1, -1), & \tilde{Q}_{23} &= (2, 3, -1), & \tilde{Q}_{24} &= (1, 4, -1), \\ \tilde{Q}_{25} &= (2, 2, -1), & \tilde{Q}_{26} &= (0, 4, -1), & \tilde{Q}_{27} &= (1, 2, 0), & \tilde{Q}_{28} &= (0, 5, -1), \\ \tilde{Q}_{29} &= (2, 1, 0), & \tilde{Q}_{30} &= (1, 3, 0), & \tilde{Q}_{31} &= (3, 2, 0), & \tilde{Q}_{32} &= (2, 3, 0), \\ \tilde{Q}_{33} &= (2, 2, 0), & \tilde{Q}_{34} &= (3, 1, 0). \end{aligned}$$

Носитель $\tilde{\mathbf{S}}$ и его выпуклая оболочка $\tilde{\Gamma}$ изображены на рис. 1. Для вершин указаны их номера. Граница многогранника $\partial\tilde{\Gamma}$ состоит из 10 граней $\tilde{\Gamma}_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, 10$, а именно: 4 пятиугольников, 4 треугольников, 2 шестиугольников. Она имеет 22 ребра $\tilde{\Gamma}_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, 22$ и 14 вершин $\tilde{\Gamma}_j^{(0)}$, $j = 1, \dots, 14$. Граничные подмножества $\tilde{\mathbf{S}}_j^{(d)} = \tilde{\Gamma}_j^{(d)} \cap \tilde{\mathbf{S}}$ суть

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_1^{(2)} &= \{\tilde{Q}_4, \tilde{Q}_5, \tilde{Q}_9, \tilde{Q}_{10}, \tilde{Q}_{11}, \tilde{Q}_{12}, \tilde{Q}_{13}, \tilde{Q}_{14}, \tilde{Q}_{15}, \tilde{Q}_{16}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_2^{(2)} &= \{\tilde{Q}_7, \tilde{Q}_{11}, \tilde{Q}_{12}, \tilde{Q}_{26}, \tilde{Q}_{27}, \tilde{Q}_{28}, \tilde{Q}_{30}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_3^{(2)} &= \{\tilde{Q}_9, \tilde{Q}_{11}, \tilde{Q}_{17}, \tilde{Q}_{20}, \tilde{Q}_{22}, \tilde{Q}_{27}, \tilde{Q}_{29}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_4^{(2)} &= \{\tilde{Q}_9, \tilde{Q}_{15}, \tilde{Q}_{16}, \tilde{Q}_{17}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_5^{(2)} &= \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_4, \tilde{Q}_9, \tilde{Q}_{15}, \tilde{Q}_{18}, \tilde{Q}_{19}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_6^{(2)} &= \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_4, \tilde{Q}_5, \tilde{Q}_6, \tilde{Q}_7, \tilde{Q}_8\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_7^{(2)} &= \{\tilde{Q}_5, \tilde{Q}_7, \tilde{Q}_{12}, \tilde{Q}_{14}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_8^{(2)} &= \{\tilde{Q}_{20}, \tilde{Q}_{26}, \tilde{Q}_{27}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_9^{(2)} &= \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_{10}^{(2)} &= \{\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{Q}_7, \tilde{Q}_8, \tilde{Q}_{17}, \tilde{Q}_{18}, \tilde{Q}_{20}, \tilde{Q}_{21}, \tilde{Q}_{22}, \tilde{Q}_{23}, \tilde{Q}_{24}, \tilde{Q}_{25}, \tilde{Q}_{26}, \tilde{Q}_{28}\}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_1^{(1)} &= \{\tilde{Q}_{11}, \tilde{Q}_{12}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_2^{(1)} &= \{\tilde{Q}_9, \tilde{Q}_{11}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_3^{(1)} &= \{\tilde{Q}_9, \tilde{Q}_{15}, \tilde{Q}_{16}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_4^{(1)} &= \{\tilde{Q}_4, \tilde{Q}_{15}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_5^{(1)} &= \{\tilde{Q}_4, \tilde{Q}_5\}, & \tilde{\mathbf{S}}_6^{(1)} &= \{\tilde{Q}_5, \tilde{Q}_{12}, \tilde{Q}_{14}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_7^{(1)} &= \{\tilde{Q}_7, \tilde{Q}_{12}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_8^{(1)} &= \{\tilde{Q}_{11}, \tilde{Q}_{27}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_9^{(1)} &= \{\tilde{Q}_9, \tilde{Q}_{17}\}, \\ \tilde{\mathbf{S}}_{10}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_{15}, \tilde{Q}_{17}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{11}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_4\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{12}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_5, \tilde{Q}_7\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{S}}_{13}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_{26}, \tilde{Q}_{27}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{14}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_{20}, \tilde{Q}_{27}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{15}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2\}, \\
\tilde{\mathbf{S}}_{16}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_3\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{17}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_7, \tilde{Q}_{26}, \tilde{Q}_{28}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{18}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_{20}, \tilde{Q}_{26}\}, \\
\tilde{\mathbf{S}}_{19}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_{17}, \tilde{Q}_{20}, \tilde{Q}_{22}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{20}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_{17}, \tilde{Q}_{18}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{21}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3\}, \\
\tilde{\mathbf{S}}_{22}^{(1)} &= \{\tilde{Q}_3, \tilde{Q}_7, \tilde{Q}_8\}; \\
\tilde{\mathbf{S}}_1^{(0)} &= \{\tilde{Q}_{12}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_2^{(0)} &= \{\tilde{Q}_{11}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_3^{(0)} &= \{\tilde{Q}_9\}, & \tilde{\mathbf{S}}_4^{(0)} &= \{\tilde{Q}_{15}\}, \\
\tilde{\mathbf{S}}_5^{(0)} &= \{\tilde{Q}_4\}, & \tilde{\mathbf{S}}_6^{(0)} &= \{\tilde{Q}_5\}, & \tilde{\mathbf{S}}_7^{(0)} &= \{\tilde{Q}_{27}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_8^{(0)} &= \{\tilde{Q}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{S}}_9^{(0)} &= \{\tilde{Q}_7\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{10}^{(0)} &= \{\tilde{Q}_{26}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{11}^{(0)} &= \{\tilde{Q}_{20}\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{12}^{(0)} &= \{\tilde{Q}_{17}\}, \\
\tilde{\mathbf{S}}_{13}^{(0)} &= \{\tilde{Q}_2\}, & \tilde{\mathbf{S}}_{14}^{(0)} &= \{\tilde{Q}_3\}.
\end{aligned}$$

Грани $\tilde{\Gamma}_j^{(2)}$ с номерами $j = 2, 3, 5, 6$ – это пятиугольники; $j = 4, 7, 8, 9$ – треугольники; $j = 1, 10$ – шестиугольники.

2.3. Нормали и нормальные конусы. Нормали \tilde{N}_j к граням $\tilde{\Gamma}_j^{(2)}$ суть

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_1 &= (0, 0, 1), & \tilde{N}_2 &= (-1, 0, 1), \\
\tilde{N}_3 &= (-1, -1, 0), & \tilde{N}_4 &= (0, -1, 0), \\
\tilde{N}_5 &= (1, 0, -1), & \tilde{N}_6 &= (1, 1, 0), \\
\tilde{N}_7 &= (0, 1, 2), & \tilde{N}_8 &= (-2, -1, 0), \\
\tilde{N}_9 &= (2, 1, -2), & \tilde{N}_{10} &= (0, 0, -1).
\end{aligned} \tag{26}$$

Нормальные конусы имеют вид

$$\tilde{\mathbf{U}}_j^{(2)} = \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_j\}, \quad j = 1, \dots, 10. \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_1^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_2 + \lambda_2 \tilde{N}_1\}, & \tilde{\mathbf{U}}_2^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_3^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_4 + \lambda_2 \tilde{N}_1\}, & \tilde{\mathbf{U}}_4^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_5 + \lambda_2 \tilde{N}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_5^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_1\}, & \tilde{\mathbf{U}}_6^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_7 + \lambda_2 \tilde{N}_1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_7^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_7 + \lambda_2 \tilde{N}_2\}, & \tilde{\mathbf{U}}_8^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_2\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_9^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_4\}, & \tilde{\mathbf{U}}_{10}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_5 + \lambda_2 \tilde{N}_4\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{11}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_5\}, & \tilde{\mathbf{U}}_{12}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_7\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{13}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_8 + \lambda_2 \tilde{N}_2\}, & \tilde{\mathbf{U}}_{14}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_8\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{15}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_5 + \lambda_2 \tilde{N}_9\}, & \tilde{\mathbf{U}}_{16}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_9\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{17}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_{10} + \lambda_2 \tilde{N}_2\}, & \tilde{\mathbf{U}}_{18}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_{10} + \lambda_2 \tilde{N}_8\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_{19}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_{10}\}, & \tilde{\mathbf{U}}_{20}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_5 + \lambda_2 \tilde{N}_{10}\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{21}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_{10} + \lambda_2 \tilde{N}_9\}, & \tilde{\mathbf{U}}_{22}^{(1)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_{10}\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_1^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_7 + \lambda_2 \tilde{N}_2 + \lambda_3 \tilde{N}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_2^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_2 + \lambda_3 \tilde{N}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_3^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_4 + \lambda_3 \tilde{N}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_4^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_5 + \lambda_2 \tilde{N}_4 + \lambda_3 \tilde{N}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_5^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_4 + \lambda_3 \tilde{N}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_6^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_7 + \lambda_3 \tilde{N}_1\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_7^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_8 + \lambda_3 \tilde{N}_2\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_8^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_5 + \lambda_3 \tilde{N}_9\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}_9^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_7 + \lambda_3 \tilde{N}_{10} + \lambda_4 \tilde{N}_2\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{10}^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_{10} + \lambda_2 \tilde{N}_8 + \lambda_3 \tilde{N}_2\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{11}^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_{10} + \lambda_3 \tilde{N}_8\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{12}^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_3 + \lambda_2 \tilde{N}_5 + \lambda_3 \tilde{N}_{10} + \lambda_4 \tilde{N}_4\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{13}^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_5 + \lambda_2 \tilde{N}_{10} + \lambda_3 \tilde{N}_9\}, \\
\tilde{\mathbf{U}}_{14}^{(0)} &= \{\tilde{P} : \tilde{P} = \lambda_1 \tilde{N}_6 + \lambda_2 \tilde{N}_{10} + \lambda_3 \tilde{N}_9\};
\end{aligned}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$, \tilde{N}_j из (26).

2.4. Симметрии. Шестое уравнение Пенлеве имеет три основные симметрии (см. теоремы 2.1.1 – 2.1.3 из [4]), возникающие при заменах переменных

$$1) \ x = 1/x^*, \ y = 1/y^*; \quad 2) \ x = x^\circ, \ y = x^\circ/y^\circ; \quad 3) \ x = 1 - \check{x}, \ y = 1 - \check{y}.$$

Эти симметрии переводят особые точки уравнения $x = 0$, $x = 1$, $x = \infty$ друг в друга, что позволяет сократить вычисления. При этом, из базовых разложений решений (см. [4]) получаются все остальные асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи всех трех его особых точек.

Теорема 8.2.2. Система (23) переходит в себя при подстановке

$$(x, y, z, a, b, c, d) = (1/x^*, 1/y^*, z^*, -b^*, -a^*, c^*, d^*). \quad (28)$$

При этом, многогранник $\tilde{\Gamma}$ симметрично отражается относительно прямой

$$2q_1 + 2q_2 = 9, \quad 2q_1 - 2q_3 = 5,$$

проходящей через центры шестиугольников $(3/2, 3, -1)$ и $(7/2, 1, 1)$ (см. рис. 1), а образы \tilde{Q}_j^* вершин \tilde{Q}_j таковы

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_1^* &= \tilde{Q}_{27}, \quad \tilde{Q}_2^* = \tilde{Q}_{26}, \quad \tilde{Q}_3^* = \tilde{Q}_{20}, \quad \tilde{Q}_4^* = \tilde{Q}_{11}, \\
\tilde{Q}_5^* &= \tilde{Q}_9, \quad \tilde{Q}_7^* = \tilde{Q}_{17}, \quad \tilde{Q}_{12}^* = \tilde{Q}_{15}.
\end{aligned}$$

Теорема 8.2.3. Система (23) переходит в себя при подстановке

$$(x, y, z, a, b, c, d) = (x^\circ, x^\circ/y^\circ, z^\circ, -b^\circ, -a^\circ, -d^\circ + 1/2, -c^\circ + 1/2). \quad (29)$$

При этом, многогранник $\tilde{\Gamma}$ зеркально отражается относительно плоскости $q_2 + q_3 = 2$, проходящей через прямые

$$q_2 = 3, \quad q_3 = -1 \text{ и } q_2 = q_3 = 1$$

и деформируется параллельно этой плоскости (см. рис. 1), а образы \tilde{Q}_j° вершин \tilde{Q}_j° таковы

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1^\circ &= \tilde{Q}_1, \quad \tilde{Q}_2^\circ = \tilde{Q}_3, \quad \tilde{Q}_4^\circ = \tilde{Q}_4, \quad \tilde{Q}_5^\circ = \tilde{Q}_{15}, \quad \tilde{Q}_7^\circ = \tilde{Q}_{17}, \\ \tilde{Q}_9^\circ &= \tilde{Q}_{12}, \quad \tilde{Q}_{11}^\circ = \tilde{Q}_{11}, \quad \tilde{Q}_{20}^\circ = \tilde{Q}_{26}, \quad \tilde{Q}_{27}^\circ = \tilde{Q}_{27}. \end{aligned}$$

Замечание 8.2.1. Симметрии (28) и (29) переводят разложения решений в окрестности нуля в разложения решений в окрестности бесконечности (и обратно). Тем самым, позволяют сократить вычисления и проверить полученные результаты. С их помощью один из пятиугольников переводится в любой из остальных трех (см. рис. 1). Треугольники с основаниями на нижнем шестиугольнике переводятся друг в друга и в самих себя. Аналогичная симметричная пара – это треугольники с основаниями на верхнем шестиугольнике. Как переводятся друг в друга ребра и вершины показано в таблице 1.

Базовыми гранями будем считать треугольники $\tilde{\Gamma}_4^{(2)}$, $\tilde{\Gamma}_9^{(2)}$, пятиугольник $\tilde{\Gamma}_5^{(2)}$ и шестиугольники $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$, $\tilde{\Gamma}_{10}^{(2)}$, ребра $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ с номерами $i = 3, 4, 10, 11, 15, 20, 21$, вершины $\tilde{\Gamma}_j^{(0)}$ с номерами $j = 4, 5, 8, 12, 13$.

2.5. Предварительный анализ. Точки многогранника $\tilde{\Gamma}$ лежат в трех параллельных плоскостях $q_3 = 1$, $q_3 = 0$ и $q_3 = -1$. Точкам, лежащим в плоскости $q_3 = 1$, соответствуют мономы системы (23), которые входят в правые части как первого, так и второго уравнений этой системы. Точкам, лежащим в плоскостях $q_3 = 0$ и $q_3 = -1$, соответствуют мономы правой части только второго уравнения системы (23).

Теорема 8.2.4. Укороченная система, соответствующая грани, ребру или вершине $\tilde{\Gamma}_j^{(d)}$ многогранника $\tilde{\Gamma}$, не имеющей точки на плоскости $q_3 = 1$, не дает асимптотик решений уравнения (21).

Доказательство. Для обобщенных граней, не имеющих ни одной одной точки на плоскости $q_3 = 1$, имеем в укороченной системе

$$h(x, y) \frac{d \ln y}{dx} = 0,$$

т. е. $y = \text{const}$. Решению $y = \text{const}$ соответствует векторный порядок $\tilde{P} = (p_1, 0, p_3)$. Согласно (26) этот вектор лежит в нормальных конусах только четырех граней $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}, \tilde{\Gamma}_2^{(2)}, \tilde{\Gamma}_5^{(2)}, \tilde{\Gamma}_{10}^{(2)}$, четырех ребер $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}, \tilde{\Gamma}_4^{(1)}, \tilde{\Gamma}_{17}^{(1)}, \tilde{\Gamma}_{20}^{(1)}$ и одной вершины $\tilde{\Gamma}_5^{(0)}$.

Среди них грани $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}, \tilde{\Gamma}_2^{(2)}, \tilde{\Gamma}_5^{(2)}$, ребра $\tilde{\Gamma}_1^{(1)}, \tilde{\Gamma}_4^{(1)}$ и вершина $\tilde{\Gamma}_5^{(0)}$ содержат точки в плоскости $q_3 = 1$, а грань $\tilde{\Gamma}_{10}^{(2)}$ и ребра $\tilde{\Gamma}_{17}^{(1)}, \tilde{\Gamma}_{20}^{(1)}$, не содержат точек с $q_3 = 1$. Рассмотрим их подробно.

Грань $\tilde{\Gamma}_{10}^{(2)}$ и ребра $\tilde{\Gamma}_{17}^{(1)}, \tilde{\Gamma}_{20}^{(1)}$ лежат в плоскости $q_3 = -1$. Соответствующая им укороченная система

$$h(x, y) \frac{dz}{dx} = f(x, y), \quad h(x, y) \frac{d \ln y}{dx} = 0$$

имеет решение $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Решения с такими асимптотиками нам не подходят. ■

Согласно теореме 8.2.4 грани, ребра и вершины, не имеющие точек в плоскости $q_3 = 1$, не рассматриваем.

Многогранник, соответствующий системе (23), имеет в основаниях 2 шестиугольника, в боковых гранях – 4 пятиугольника и 2 пары треугольников. Первая пара треугольников лежит основаниями на нижнем шестиугольнике, другая пара – на верхнем шестиугольнике (см. рис. 2).

Нижний шестиугольник многогранника $\tilde{\Gamma}$ получается из параллелограмма $\Gamma(f)$, соответствующего шестому уравнению Пенлеве, изображенному на рис. 3, путем отсечения от него прямыми $q_2 = -2q_1 + 4$ и $q_2 = -2q_1 + 8$ двух треугольников (см. рис. 4). Первый отсеченный треугольник имеет вершины – $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(4, 0)$; второй отсеченный треугольник имеет вершины – $(3, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$.

Верхний шестиугольник многогранника $\tilde{\Gamma}$ также получается из параллелограмма $\Gamma(f)$, соответствующего шестому уравнению Пенлеве, но теперь отсекаем горизонтальными прямыми $q_2 = 2$ и $q_2 = 4$ другие два треугольника (см. рис. 2). Третий отсеченный треугольник имеет вершины – $(0, 3)$, $(3, 2)$, $(1, 2)$; четвертый отсеченный треугольник имеет вершины – $(0, 4)$, $(2, 4)$, $(0, 6)$.

Первый и второй треугольники отсеченные от параллелограмма $\Gamma(f)$, преобразуются в треугольные грани $\tilde{\Gamma}_8^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}_9^{(2)}$ многогранника $\tilde{\Gamma}$ с нормальными $\tilde{N}_8 = (-2, -1, 0)$ и $\tilde{N}_9 = (2, 1, -2)$ соответственно. Третий и четвертый отсеченные треугольники преобразуются в треугольные грани $\tilde{\Gamma}_4^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}_7^{(2)}$ с нормальными $\tilde{N}_4 = (0, -1, 0)$ и $\tilde{N}_7 = (0, 1, 2)$ соответственно.

Оставшиеся после каждого отсечения четыре части ребер параллелограмма $\Gamma(f)$ преобразовываются в 4 пятиугольника в многограннике $\tilde{\Gamma}$.

И наконец, вершины параллелограмма $\Gamma(f)$ с координатами $(0, 3)$ и $(3, 3)$ соответствуют ребрам $\tilde{\Gamma}_8^{(1)}$ и $\tilde{\Gamma}_{11}^{(1)}$ многогранника $\tilde{\Gamma}$.

Замечание 8.2.1 Укороченные системы, соответствующие четырем пятиугольникам и двум ребрам $\tilde{\Gamma}_8^{(1)}$, $\tilde{\Gamma}_{11}^{(1)}$ многогранника $\tilde{\Gamma}$, эквивалентны укороченным уравнениям, соответствующим четырем ребрам и двум вершинам $(0, 3)$ и $(3, 3)$ многоугольника $\Gamma(f)$, которые были изучены в § 2 и § 3 гл. 2 [4].

Согласно теореме 8.2.4 среди базовых граней и ребер многогранника $\tilde{\Gamma}$ есть такие, что соответствующие им укороченные системы не дают асимптотик. А именно, треугольник $\tilde{\Gamma}_9^{(2)}$, шестиугольник $\tilde{\Gamma}_{10}^{(2)}$, ребра $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ с номерами $i = 15, 20, 21$, вершины $\tilde{\Gamma}_k^{(0)}$ с номерами $k = 8, 12, 13$. Согласно замечанию 8.2.1 укороченные системы, соответствующие пятиугольнику $\tilde{\Gamma}_5^{(2)}$ и ребру $\tilde{\Gamma}_{11}^{(1)}$ не дают новых асимптотик, отличных от асимптотик, вычисленных с помощью методов плоской степенной геометрии. Поэтому из базовых обобщенных граней рассмотрим только шестиугольник $\tilde{\Gamma}_1^{(2)}$, треугольник $\tilde{\Gamma}_4^{(2)}$, ребра $\tilde{\Gamma}_i^{(1)}$ с номерами $i = 3, 4, 10$ и вершины $\tilde{\Gamma}_k^{(0)}$ с номерами $k = 4, 5$. Осталось 7 объектов. Но согласно теореме 8.1.1 и п. 2.3 вектор $\tilde{P} = (1, p_2, p_3)$ со свойством $p_3 - p_2 + 1 > 0$ лежит только в нормальных конусах ребра $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$ и двух вершин $\tilde{\Gamma}_4^{(0)}$ и $\tilde{\Gamma}_5^{(0)}$. Поэтому всего осталось три объекта. Изучим их методами § 1.

2.6. Базовые асимптотики. Рассмотрим *ребро* $\tilde{\Gamma}_4^{(1)}$. Ему соответствуют нормальный конус $\tilde{U}_4^{(1)} = \{\lambda_2(1, 0, \lambda_1/\lambda_2 - 1), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2 > 0\}$. Вектор $\tilde{P} = (1, 0, k - 1)$, $k \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1/\lambda_2 > 0$, лежит в нормальном конусе $\tilde{U}_4^{(1)}$. Согласно (14) $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_2 = 0$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} p_3 - p_2 + 1 = k$. Сделаем в уравнении (21) преобразование (9) с $\alpha = 0$, $\beta = k$. При этом оно принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{v} = & -\frac{k-1}{k} \frac{\dot{v}}{u} + \frac{1}{2} \dot{v}^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1} + \frac{1}{v-u^{1/k}} \right) - \\ & - \frac{\dot{v}}{ku} \left(2 - \frac{1}{u^{1/k}-1} + \frac{1}{v-u^{1/k}} \right) + \\ & + \frac{v(v-1)(v-u^{1/k})}{k^2 u (u^{1/k}-1)^2} \left[a + \frac{bu^{1/k}}{v^2} + \frac{c(u^{1/k}-1)}{(v-1)^2} + \frac{du^{1/k}(u^{1/k}-1)}{(v-u^{1/k})^2} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Если в уравнении (30) устремить u к бесконечности и считать, что v , v^{-1} и \dot{v} остаются конечными, то в пределе получаем уравнение

$$\ddot{v} = \frac{\dot{v}^2}{2} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v-1} \right). \quad (31)$$

Уравнение (31) имеет решение $v = (C_1 e^{C_2 u} + 1)^2 / (4C_1 e^{C_2 u})$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Оно отделено от бесконечности, только при $\operatorname{Re}(C_2 u) = 0$.

Делаем обратное преобразование к преобразованию (9) с $\alpha = 0$, $\beta = k$ и получаем трехпараметрическое семейство асимптотик

$$\mathcal{T}_1 : y = \frac{(C_1 e^{C_2 x^k} + 1)^2}{4C_1 e^{C_2 x^k}} \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \cosh(C_2 x^k + C_3))/2, \quad (32)$$

где $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, k , C_1 , C_2 , C_3 – произвольные постоянные, а $\operatorname{Re}(C_2 x^k) = 0$ и $|x| \rightarrow \infty$.

Рассмотрим *вершину* $\tilde{\Gamma}_4^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Q}_{15} = (5, 0, 1)$. Ей соответствует нормальный конус $\tilde{\mathbf{U}}_4^{(0)} = \{\lambda_3(1, -\lambda_2/\lambda_3, \lambda_1/\lambda_3 - 1), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2 > 0\}$. Вектор $\tilde{P} = (1, -k, t - 1)$, $k, t \in \mathbb{R}$, $k, t > 0$ лежит в нормальном конусе $\tilde{\mathbf{U}}_4^{(0)}$.

Согласно (14) $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_2 = -k$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} p_3 - p_2 + 1 = t + k$. Сделаем в уравнении (21) преобразование (9) с $\alpha = -k$, $\beta = t + k$. При этом оно принимает вид

$$\begin{aligned} & (t+k)^2 \left[\ddot{v} + \frac{t-k-1}{t+k} \frac{\dot{v}}{u} + \frac{k(k+1)}{(t+k)^2} \frac{v}{u^2} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[(t+k)\dot{v} - k\frac{v}{u} \right]^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v - u^{k/(t+k)}} + \frac{1}{v - u^{(k+1)/(t+k)}} \right) - \\ & - \frac{1}{u} \left[(t+k)\dot{v} - k\frac{v}{u} \right] \left(2 - \frac{1}{u^{1/(t+k)} - 1} + \frac{u^{(k+1)/(t+k)}}{v - u^{(k+1)/(t+k)}} \right) + \\ & + \frac{v(v - u^{k/(t+k)})(v - u^{(k+1)/(t+k)})}{u^2(u^{1/(t+k)} - 1)^2} \left[\frac{a}{u^{2k/(t+k)}} + \frac{bu^{1/(t+k)}}{v^2} + \right. \\ & \left. + \frac{c(u^{1/(t+k)} - 1)}{(v - u^{k/(t+k)})^2} + \frac{d(u^{1/(t+k)} - 1)u^{1/(t+k)}}{(v - u^{(k+1)/(t+k)})^2} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Если в уравнении (33) устремить u к бесконечности и считать, что v , v^{-1} и \dot{v} остаются конечными, то в пределе получаем уравнение

$$\ddot{v} = \frac{1}{2} \frac{\dot{v}^2}{v}. \quad (34)$$

Оно имеет решение

$$v(u) = \frac{C_1(u + C_2)^2}{4}, \quad (35)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Порядок решения (35) равен 2, т.е. это решение не является асимптотикой.

Рассмотрим *вершину* $\tilde{\Gamma}_5^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Q}_4 = (5, 1, 1)$. Ей соответствует нормальный конус $\tilde{U}_5^{(0)} = \{\lambda_3 (1, -\lambda_2/\lambda_3 + 1, \lambda_1/\lambda_3), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2 > 0\}$. Вектор $\tilde{P} = (1, -k + 1, t)$, $k, t \in \mathbb{R}, k, t > 0$ лежит в нормальном конусе $\tilde{U}_5^{(0)}$.

Согласно (14) положим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_2 = -k + 1$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} p_3 - p_2 + 1 = t + k$. Сделаем в уравнении (21) преобразование (9) с $\alpha = -k + 1$, $\beta = t + k$. При этом оно принимает вид

$$\begin{aligned}
& (t+k)^2 \left[\ddot{v} + \frac{t-k+1}{t+k} \frac{\dot{v}}{u} + \frac{k(k+1)}{(t+k)^2} \frac{v}{u^2} \right] = \\
& = \frac{1}{2} \left[(t+k)\dot{v} - k\frac{v}{u} \right]^2 \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v - u^{(k-1)/(t+k)}} + \frac{1}{v - u^{k/(t+k)}} \right) - \\
& - \frac{1}{u} \left[(t+k)\dot{v} - k\frac{v}{u} \right] \left(2 - \frac{1}{u^{1/(t+k)} - 1} + \frac{u^{k/(t+k)}}{v - u^{k/(t+k)}} \right) + \\
& + \frac{v(v - u^{(k-1)/(t+k)})(v - u^{k/(t+k)})}{u^2(u^{1/(t+k)} - 1)^2} \left[\frac{a}{u^{(2k-2)/(t+k)}} + \frac{bu^{1/(t+k)}}{v^2} + \right. \\
& \left. + \frac{c(u^{1/(t+k)} - 1)}{(v - u^{(k-1)/(t+k)})^2} + \frac{d(u^{1/(t+k)} - 1)u^{1/(t+k)}}{(v - u^{k/(t+k)})^2} \right]. \tag{36}
\end{aligned}$$

Если в уравнении (2.6) устремить u к бесконечности и считать, что v , v^{-1} и \dot{v} остаются конечными, то предельное уравнение зависит от значения $k > 0$.

При $k \neq 1$ предельное уравнение имеет вид (33). Решение (34) уравнения (33) имеет порядок равный двум, т.е. не является асимптотикой.

При $k = 1$ предельное уравнение есть

$$\ddot{v} = \frac{\dot{v}^2}{v}. \tag{37}$$

Оно имеет решение $v = C_1 e^{C_2 u}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Эти решения отделены от бесконечности, если $\text{Re}(C_2 u) \leq 0$.

Делаем обратное преобразование к преобразованию (9) с $\alpha = 0$, $\beta = t + 1$ и получаем трехпараметрическое семейство асимптотик

$$\mathcal{T}_2 : y = C_1 e^{C_2 x^{t+1}}, \tag{38}$$

где $t \in \mathbb{R}, t > 0$, t, C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $\text{Re}(C_2 x^{t+1}) \leq 0$ и $|x| \rightarrow \infty$.

2.7. Асимптотики, полученные из базовых. С помощью симметрии (29) уравнения (21) из базовых семейств \mathcal{T}_1 и \mathcal{T}_2 получаем еще 2 семейства при $x \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{T}_3 : y = 2x/(1 + \cosh(C_2 x^k + C_3)), \tag{39}$$

где $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, k , C_2 и C_3 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2 x^k) = 0$.

$$\mathcal{T}_4 : y = C_1 x / e^{C_2 x^{t+1}}, \quad (40)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, t , C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2 x^{t+1}) \leq 0$.

С помощью симметрии (28) уравнения (21) из 4 семейств при $x \rightarrow \infty$ получаем 4 семейства при $x \rightarrow 0$:

$$\mathcal{T}_5 : y = 2 / (1 + \cosh(C_2 x^{-k} + C_3)), \quad (41)$$

где $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, k , C_2 и C_3 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2/x^k) = 0$.

$$\mathcal{T}_6 : y = C_1 e^{-C_2 x^{-t-1}}, \quad (42)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, t , C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2/x^{t+1}) \geq 0$.

$$\mathcal{T}_7 : y = x(1 + \cosh(C_2 x^{-k} + C_3)) / 2, \quad (43)$$

где $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, k , C_2 и C_3 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2/x^k) = 0$.

$$\mathcal{T}_8 : y = C_1 x e^{C_2 x^{-t-1}}, \quad (44)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, t , C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2/x^{t+1}) \leq 0$.

С помощью третьей симметрии уравнения получаем 4 семейства при $x \rightarrow 1$:

$$\mathcal{T}_9 : y = 1 - 2 / (1 + \cosh(C_2 / (1 - x)^k + C_3)), \quad (45)$$

где $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, k , C_2 и C_3 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2 / (1 - x)^k) = 0$.

$$\mathcal{T}_{10} : y = 1 - C_1 e^{-C_2 (1-x)^{-t-1}}, \quad (46)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, t , C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2 / (1 - x)^{t+1}) \geq 0$.

$$\mathcal{T}_{11} : y = 1 - (1 - x) (1 + \cosh(C_2 / (1 - x)^k + C_3)) / 2, \quad (47)$$

где $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, k , C_2 и C_3 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2 / (1 - x)^k) = 0$.

$$\mathcal{T}_{12} : y = 1 - C_1 (1 - x) e^{C_2 (1-x)^{-t-1}}, \quad (48)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, t , C_1 и C_2 – произвольные постоянные, $\operatorname{Re}(C_2 / (1 - x)^{t+1}) \leq 0$.

§3. Асимптотики решений при $a \cdot b \cdot c \cdot (d - 1/2) = 0$

Рассмотрим систему уравнений (23) в случае $a = 0$, $bc(d - 1/2) \neq 0$. Сначала заметим, что параметры a , b , c , d системы (23) входят только в мономы, векторные показатели степени которых лежат в плоскости $q_2 = -1$. Таким образом, положение точек носителя $\tilde{\mathbf{S}}$ системы (23), расположенных в плоскостях $q_2 = 0$ и $q_2 = 1$, не зависит от параметров, т. е. постоянно. Обозначим $\tilde{\mathbf{S}}'$ носитель системы (23) при $a = 0$, $bc(d - 1/2) \neq 0$. Он состоит из точек (24) за исключением трех точек $\tilde{Q}_7 = (0, 6, -1)$, $\tilde{Q}_8 = (1, 5, -1)$, $\tilde{Q}_{28} = (0, 5, -1)$ (см. рис. 5). Его выпуклая оболочка это многогранник $\tilde{\Gamma}'$. В нем из случая $abc(d - 1/2) \neq 0$ сохраняются обобщенные грани $\tilde{\Gamma}_i^{(2)}$ с номерами $i = 1, 3, 4, 5, 8, 9$, т. е. сохраняются все асимптотики, соответствующие их укороченным системам. Обозначения объектов, которые не изменились, оставляем прежними. Два пятиугольника $\tilde{\Gamma}_2^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}_6^{(2)}$ многогранника $\tilde{\Gamma}$ превращаются в два четырехугольника $\tilde{\Gamma}'_2^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}'_6^{(2)}$ многогранника $\tilde{\Gamma}'$. Соответствующие им укороченные системы эквивалентны укороченным уравнениям, соответствующим левому вертикальному и верхнему наклонному ребрам многоугольника $\mathbf{S}(f)$ при $a = 0$, $c \neq 0$, которые были изучены в §4 и в §5 гл. 3 [4]. В случае $a = 0$, $bc(d - 1/2) \neq 0$ появляется новая грань – параллелограмм $\tilde{\Gamma}'_7^{(2)}$ с нормальным вектором $\tilde{N}'_7 = (0, 1, 1)$. Ему соответствует укороченная система, эквивалентная укороченному уравнению, соответствующему верхнему горизонтальному ребру многоугольника $\mathbf{S}(f)$ при $a = 0$, $c \neq 0$, которое изучалось в §3 гл. 3 [4] и не дает асимптотик. Из случая $abc(d - 1/2) \neq 0$ сохраняются все асимптотики решений укороченных систем, соответствующих ребрам кроме ребер $\tilde{\Gamma}_j^{(1)}$ с номерами $j = 7, 12, 17, 22$, и всем вершинам, кроме $\tilde{\Gamma}_9^{(0)}$. Укороченные системы, соответствующие ребрам $\tilde{\Gamma}'_7^{(1)} = [\tilde{Q}_{12}, \tilde{Q}_{26}, \tilde{Q}_{30}]$, $\tilde{\Gamma}'_{12}^{(1)} = [\tilde{Q}_3, \tilde{Q}_5, \tilde{Q}_6]$ многогранника $\tilde{\Gamma}'$ эквивалентны укороченным уравнениям соответствующих вершинам $(0, 4)$ и $(2, 4)$ многоугольника $\mathbf{S}(f)$ при $a = 0$, $c \neq 0$, которые были изучены в §2 и §5 гл. 3 [4]. Укороченная система $h(x, y)dz/dx = f(x, y)$, $dy/dx = 0$, соответствующая ребру $[\tilde{Q}_3, \tilde{Q}_{24}, \tilde{Q}_{26}]$ многогранника $\tilde{\Gamma}'$, имеет решение $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. Такие решения нас не интересуют. Таким образом, в случае $a = 0$, $bc(d - 1/2) \neq 0$ трехмерный анализ не дает новых асимптотик, отличных от вычисленных в случае $abc(d - 1/2) \neq 0$ и тех, что получены с помощью плоской степенной геометрии.

В случае $a = c = 0$, $b(d - 1/2) \neq 0$ обозначим носитель системы (23) $\tilde{\mathbf{S}}''$. Он состоит из точек носителя $\tilde{\mathbf{S}}'$ (носителя системы (23) в случае $a = 0$, $bc(d - 1/2) \neq 0$), кроме точки $\tilde{Q}_{26} = (0, 4, -1)$. Точка \tilde{Q}_{26} – это вершина многогранника $\tilde{\Gamma}'$. Она содержится в его четырехугольных гранях

$\tilde{\Gamma}'_2^{(2)}$ и $\tilde{\Gamma}'_7^{(2)}$ с нормальными векторами $\tilde{N}'_2 = (-1, 0, 1)$ и $\tilde{N}'_7 = (0, 1, 1)$ соответственно. Если $c = 0$ эти грани меняют форму: четырехугольник $\tilde{\Gamma}'_2^{(2)}$ становится параллелограмом $\tilde{\Gamma}''_2^{(2)}$ с нормальным вектором $\tilde{N}''_2 = (-1, 0, 1)$; четырехугольник $\tilde{\Gamma}'_7^{(2)}$ становится пятиугольником $\tilde{\Gamma}''_7^{(2)}$ с нормальным вектором $\tilde{N}''_7 = (0, 1, 1)$ (см. рис. 6) и все решения укороченных систем, соответствующих этим граням, сохраняются из случаев $abc(d - 1/2) \neq 0$ и $a = 0, bc(d - 1/2) \neq 0$. Точка \tilde{Q}_{26} содержится в треугольной грани $\tilde{\Gamma}_8^{(2)}$ многогранника $\tilde{\Gamma}'$ с нормальным вектором $(-2, -1, 0)$. Теперь вместо этой грани появляется трапеция многогранника $\tilde{\Gamma}''$ с нормальным вектором $(-1, 0, 0)$ (см. рис. 6), которую обозначим $\tilde{\Gamma}''_8^{(2)}$. Соответствующая ей укороченная система $dy/dx = 0, h(x, y)dz/dx = f(x, y, z)$ имеет решение $y = \text{const}$. Это решение укороченного уравнения соответствующего левому вертикальному ребру многоугольника $\Gamma(f)$ при $a = c = 0$ в §4 гл. 3 [4]. Из случаев $abc(d - 1/2) \neq 0$ и $a = 0, bc(d - 1/2) \neq 0$ кроме ребер $\tilde{\Gamma}_{12}^{(1)}$ и $\tilde{\Gamma}_{13}^{(1)}$, сохраняются все ребра многогранника $\tilde{\Gamma}'$. Соответствующие им асимптотики также сохраняются. Появляются новые четыре ребра – ребра трапеции $\tilde{\Gamma}''_8^{(2)}$. Поскольку каждому из них соответствует укороченная система вида $dy/dx = 0, h(x, y)dz/dx = f(x, y, z)$ с решением $y = \text{const}$, вектор порядков которого не попадает ни в один из нормальных конусов этих ребер, то укороченные системы, соответствующие этим ребрам, не дают асимптотик. Ребро $\tilde{\Gamma}_{12}^{(1)}$ в случае $a = c = 0, b(d - 1/2) \neq 0$ стало короче. Обозначим его $\tilde{\Gamma}''_{12}^{(1)}$. Укороченная система, соответствующая этому ребру, эквивалентна укороченному уравнению, соответствующему вершине $(2, 4)$ многоугольника $\mathbf{S}(f)$ при $a = c = 0$, и было изучено в §5 гл. 3 [4]. Укороченная система $h(x, y)dz/dx = f(x, y), dy/dx = 0$, соответствующая ребру $[\tilde{Q}_3, \tilde{Q}_{24}]$ многогранника $\tilde{\Gamma}'$, имеет решение $y = \text{const}$, нормальный вектор которого не лежит в нормальном конусе ребра, т. е. не является асимптотикой. Получаем, что здесь отсутствуют асимптотики, отличные от тех, что вычислены с помощью плоской степенной геометрии, и от вычисленных с помощью трехмерной степенной геометрии в случае $abc(d - 1/2) \neq 0$.

С помощью симметрий (28) и (29) асимптотики решений в случаях $a = 0, bc(d - 1/2) \neq 0$ и $a = c = 0, b(d - 1/2) \neq 0$ переходят в асимптотики решений в случаях $b = 0, ac(d - 1/2) \neq 0$ и $b = d - 1/2 = 0, ac \neq 0$ соответственно. Поэтому в этих случаях отсутствуют асимптотики, отличные от тех, что получены с помощью плоской степенной геометрии, и от найденных в случае $abc(d - 1/2) \neq 0$ с помощью трехмерной степенной геометрии.

Если $a = b = c = d - 1/2 = 0$, то все асимптотики сохраняются из случаев $a = c = 0$ и $b = d - 1/2 = 0$ и других асимптотик нет.

§4 . Сводка результатов

Методами пространственной степенной геометрии получены по 4 семейства асимптотик решений уравнения (21) вблизи каждой его особой точки $x = 0, 1, \infty$, которые существуют при всех значениях его четырех комплексных параметров a, b, c, d . Все 12 семейств асимптотик найдены впервые и относятся к новому типу асимптотик (*асимптотики типа Бутру*) решений шестого уравнения Пенлеве. При этом 6 семейств асимптотик определены на прямых комплексной плоскости, а другие 6 семейств – в полуплоскостях комплексной плоскости.

Литература

1. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Асимптотики Бутру решений уравнений Пенлеве и степенная геометрия // ДАН. 2008. Т. 422. №2. С. 157–160.
2. Розов Н.Х. Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1984. Т. 4. С. 233–234.
3. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.
4. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве // Труды московского математического общества, 2010. Т. 71. С. 6–118.
5. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Асимптотики решений третьего уравнения Пенлеве // ДАН. 2008. Т. 422. №6. С. 729-732.
6. Брюно А.Д., Горючкина И.В. Асимптотики решений четвертого уравнения Пенлеве // ДАН. 2008. Т. 423. №4. С. 443-448.

Таблица 1. Пары индексов i, j симметричных граней $\tilde{\Gamma}_i^{(d)} \leftrightarrow \tilde{\Gamma}_j^{(d)}$

i, j			
Симметрия (28)		Симметрия (29)	
Вершины	Ребра	Вершины	Ребра
1, 4	1, 4	1, 3	1, 2
2, 5	2, 5	2, 2	3, 6
3, 6	3, 6	4, 6	4, 5
7, 8	7, 10	5, 5	7, 9
9, 12	8, 11	7, 7	8, 8
10, 13	9, 12	8, 8	10, 12
11, 14	13, 16	9, 12	11, 11
	14, 15	10, 11	13, 14
	17, 20	13, 14	15, 16
	18, 21		17, 19
	19, 22		18, 18
			20, 22
			21, 21

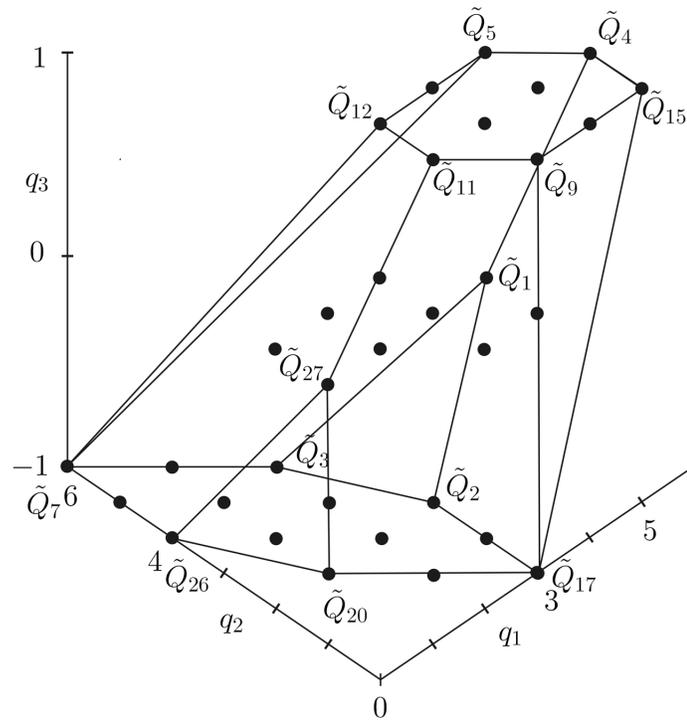


Рис. 1

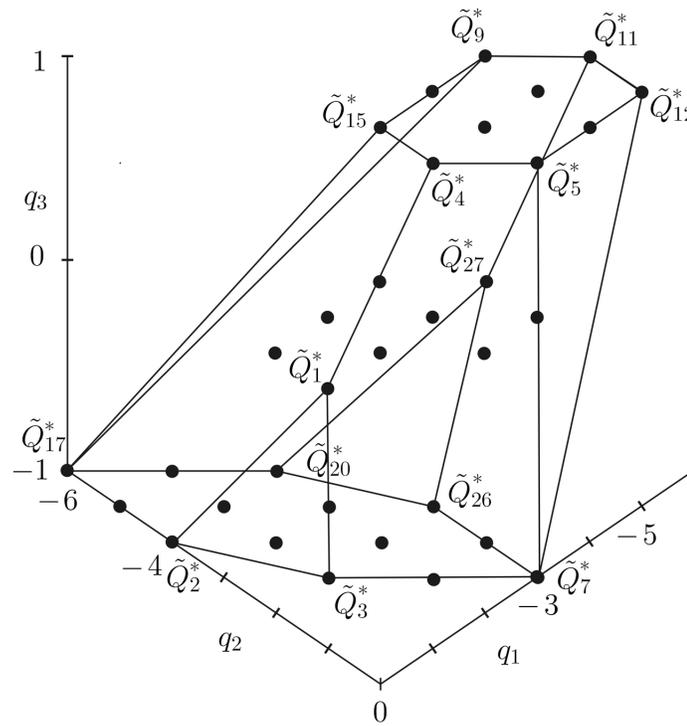


Рис. 2

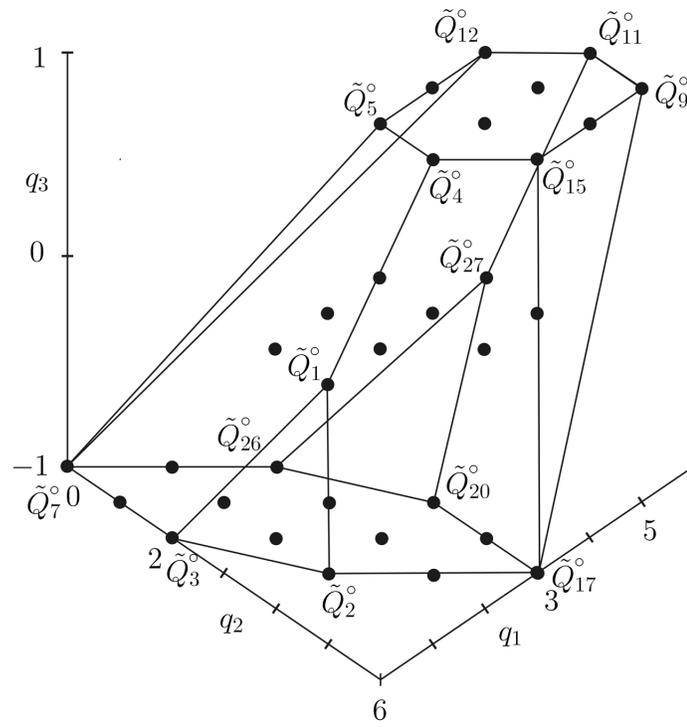


Рис. 3

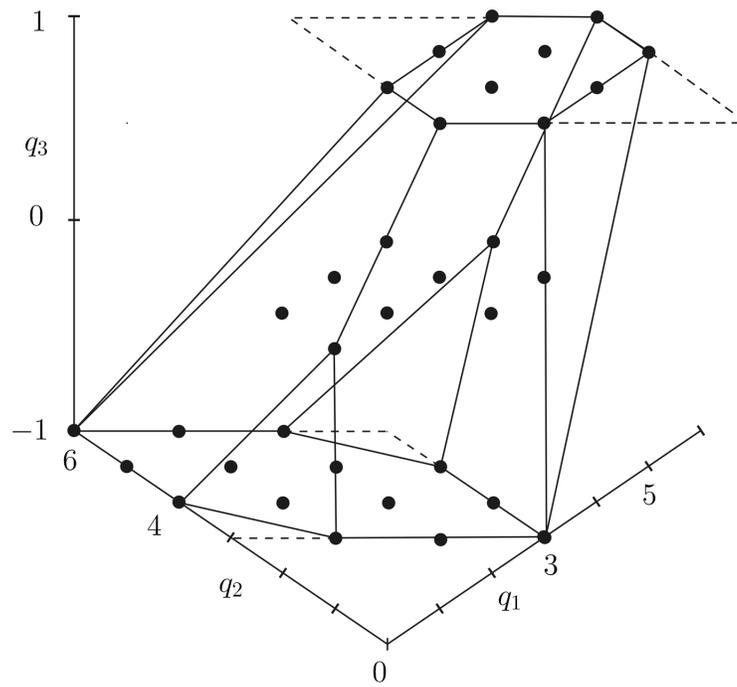


Рис. 4

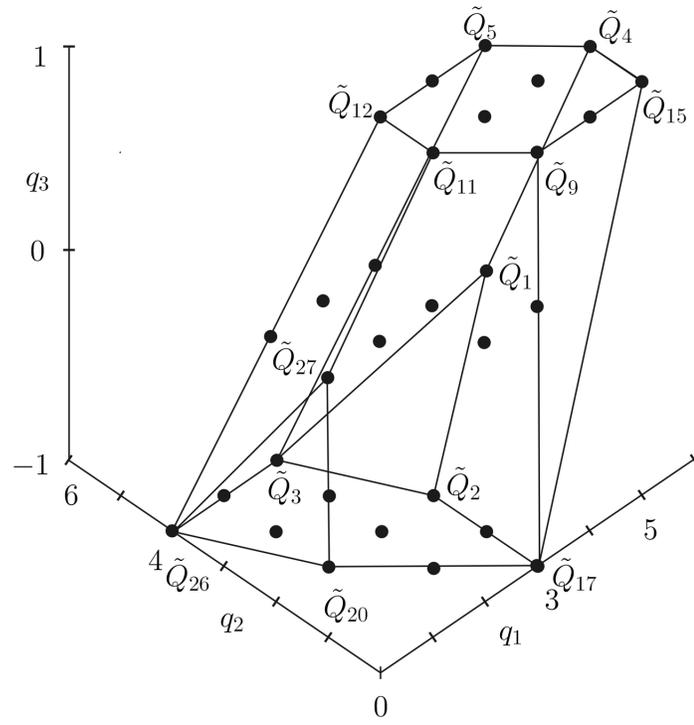


Рис. 5

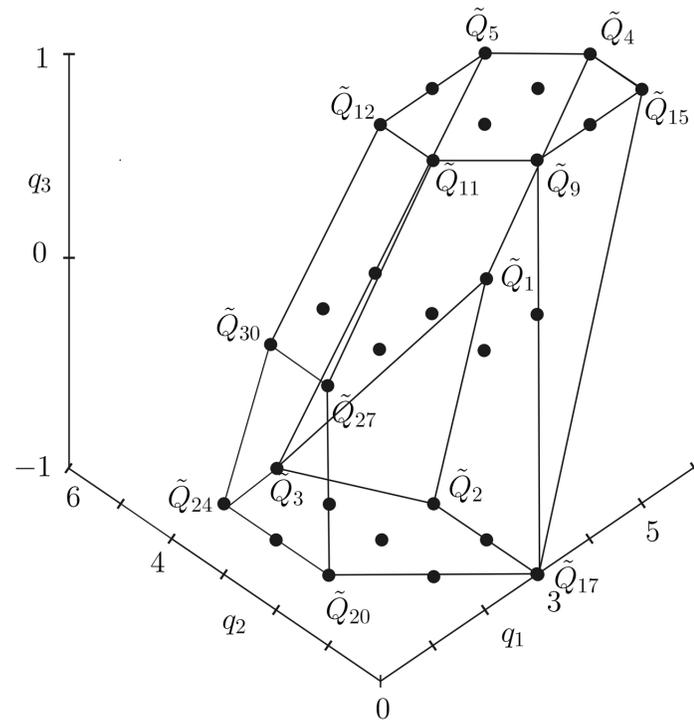


Рис. 6

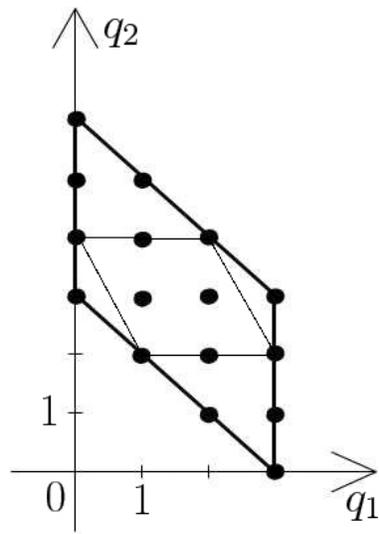


Рис. 7