ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 54 за 2010 г.

Пустыльников Л.Д.

Новое необходимое условие для справедливости гипотезы Римана

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Пустыльников Л.Д. Новое необходимое условие для справедливости гипотезы Римана // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 54. 8 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-54**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

Л. Д. Пустыльников

НОВОЕ НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ СПРАВЕДЛИВОСТИ ГИПОТЕЗЫ РИМАНА

Москва, 2010 г.

УДК 511.36

Л. Д. Пустыльников. Новое необходимое условие для справедливости гипотезы Римана. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Получены результаты, связанные с функцией Римана $\xi(s)$, которые дают новое необходимое условие для справедливости гипотезы Римана о нулях классической дзета–функции. Доказано, что, если бы хотя бы одна четная производная функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ была бы неположительна, то гипотеза Римана была бы неверна. Также доказано, что все четные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ строго положительны и найдена асимптотика значений четных производных функции $\xi(s)$ в той же точке, когда порядок производной стремится к бесконечности.

L. D. Pustyl'nikov. A new necessary condition for the validity of the Riemann hypothesis. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

It is obtained results related to the Riemann function $\xi(s)$ which give a new necessary condition for the validity of Riemann hypothesis on the zeros of the classical zeta–function. It is proved that if at least one even derivative of the function $\xi(s)$ at the point $s = 1/2$ is not positive, then the Riemann hypothesis would be false. However, it is also proved that all the even derivatives at the point $s = 1/2$ are strictly positive and their asymptotic form for the order of derivatives tending to infinity is found.

© ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08-01-00082 и 09-01-00291.

сайт: www.keldysh.ru

Введение

В последнее время получены новые результаты в теории дзета–функции Римана $\zeta(s)$, связанные с гипотезой Римана о ее нулях. Эти результаты можно разбить на две группы. Результаты, относящиеся к первой группе, связаны с построением оператора в гильбертовом пространстве, так что гипотеза Римана эквивалентна проблеме существования собственного вектора с собственным значением $\lambda = -1$ для этого оператора ([1, 2]). Результаты, относящиеся ко второй группе, связаны с поведением ξ–функции Римана $\xi(s)$ и ее производных в точке $s = 1/2$. Доказано, что, если хотя бы одна четная производная функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ была бы неположительна, то гипотеза Римана о нулях была бы несправедлива (п. 1, теорема 2). Вместе с тем, также доказано, что все четные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ строго положительные (п. 1, теорема 1), и асимптотика значений четных производных функции $\xi(s)$ в этой точке при стремлении порядка производной к бесконечности была найдена (п. 2, теорема 3). Эти результаты позволяют доказать, что гипотеза Римана несправедлива для сколь угодно точной аппроксимации функции $\zeta(s)$, удовлетворяющей тому же функциональному уравнению и обладающей теми же основными свойствами, что и функция $\zeta(s)$ ([1, 3]).

1. Новое необходимое условие для справеливости гипотезы Римана

В этом пункте доказывается одно свойство функции Римана $\xi(s)$ (теорема 1), которое дает необходимое условие для справедливости гипотезы Римана о нулях дзета–функции Римана $\zeta(s)$ (теорема 2). Функция Римана $\xi(s)$ получается из дзета–функции $\zeta(s)$ с помощью равенства

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\, s(s-1)\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{1}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма–функция Эйлера. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Все четные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ строго положительны.*

Замечание. В силу хорошо известного равенства $\xi(s) = \xi(1-s)$ все нечетные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ равны нулю.

Доказательство теоремы 1.

Лемма. *Пусть n — произвольное натуральное число. Тогда для любого натурального числа $r \geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_1^\infty \big(16r(r-1)\ln^{r-2} x - \ln^r x\big)\, x^{-3/4}\, \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\, dx > 0.$$

Доказательство леммы. Введем числа $x_r = \mathrm{e}^{4\sqrt{r(r-1)}}$, $\tilde{x}_r = \sqrt{x_r}$, $x_r^* = \mathrm{e}^r$ и докажем, что

$$16r(r-1)\int\limits_{x_{r-2}^*}^{\tilde{x}_r} \big(\ln^{r-2} x\big)\, x^{-3/4}\, \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\, dx > \int\limits_{\tilde{x}_r}^\infty (\ln^r x)\, x^{-3/4}\, \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\, dx. \qquad (2)$$

В области $x \geqslant 1$ функция $\dfrac{\ln x}{x^{1/r}}$ имеет единственный экстремум в точке $x = x_r^*$, который является максимумом, и поэтому, так как $\tilde{x}_r > x_r^*$ при $x \geqslant \tilde{x}_r$, то справедливо неравенство $\ln^r x < \left(\dfrac{\ln \tilde{x}_r}{\mathrm{e}^{\tilde{x}_r}}\right)\mathrm{e}^x$, из которого следует неравенство

$$x^{-3/4}\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\ln^r x \leqslant A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln^r \tilde{x}_r}{\mathrm{e}^{\tilde{x}_r}\, \tilde{x}^{3/4}}\mathrm{e}^{-(\pi n^2-1)x},\ (x \geqslant \tilde{x}_r). \qquad (3)$$

Точно таким же способом можно доказать, что в области $x_{r-2}^* \leqslant x \leqslant \tilde{x}_r$ справедливо неравенство

$$x^{-3/4}\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\ln^{r-2} x \geqslant B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln^{r-2} \tilde{x}_r}{\mathrm{e}^{\tilde{x}_r}\, \tilde{x}^{3/4}}\mathrm{e}^{-(\pi n^2-1)x}. \qquad (4)$$

Далее, в силу определений $\tilde{x}_r$ и x_r^* имеем:

$$\frac{3}{4}\int\limits_{x_{r-2}^*}^{\tilde{x}_r} \mathrm{e}^{-(\pi n^2-1)x}\, dx > \int\limits_{\tilde{x}_r}^\infty \mathrm{e}^{-(\pi n^2-1)x}\, dx. \qquad (5)$$

Поэтому в силу определений $\tilde{x}_r$, x_r^* и соотношения

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \ln^2 \tilde{x}_r < 16r(r-1)$$

неравенство (2) следует из неравенств (3), (4) и (5).

Заметим, что в области $x^*_{r-2} \leqslant x \leqslant \tilde{x}_r$ справедливо неравенство $\ln^2 x \leqslant 4r(r-1)$, и поэтому

$$16r(r-1)\int\limits_{x^*_{r-2}}^{\tilde{x}_r} \left(\ln^{r-2} x\right) x^{-3/4}\,\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\,dx - \int\limits_{x^*_{r-2}}^{\tilde{x}_r} \left(\ln^{r} x\right) x^{-3/4}\,\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant 12r(r-1)\int\limits_{x^*_{r-2}}^{\tilde{x}_r} \left(\ln^{r-2} x\right) x^{-3/4}\,\mathrm{e}^{-\pi n^2 x}\,dx$$

Теперь утверждение леммы следует из неравенства (2).

Лемма доказана.

Введем функцию $\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}$ и, используя хорошо известное равенство (см. [4], гл. III, §2)

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(x) = \int\limits_0^{\infty} x^{s/2-1}\omega(x)\,dx,$$

и равенство (1), при $r \geqslant 4$ имеем:

$$\frac{d^r\xi}{ds^r}\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-(r+2)}\int\limits_1^{\infty}\left(16r(r-1)\ln^{r-2} x - \ln^r x\right) x^{-3/4}\omega(x)\,dx.$$

Из этого равенства и леммы при $r \neq 2$, очевидно, следует утверждение теоремы 1. Для второй производной ($r = 2$) функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ прямое вычисление показывает, что $\dfrac{d^2\xi}{ds^2}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0{,}02997$ и $\dfrac{d^2\xi}{ds^2}\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если хотя бы одна четная производная функции $\xi(s)$ была бы неположительна, то гипотеза Римана о нулях функции $\zeta(s)$ была бы несправедлива: в этом случае существовал бы комплексный нуль функции $\zeta(s)$, не лежащий на прямой* $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right)$ комплексного переменного t, где $i = \sqrt{-1}$. Известно ([5]), что $\Xi(t)$ — целая функция первого порядка, принимающая вещественные значения при вещественных значениях t, и любой невещественный ноль z функции $\zeta(s)$ имеет вид $z = \frac{1}{2} + i\rho$, где ρ — произвольный ноль функции $\Xi(t)$. Поэтому из формулы Вейерштрасса для целых функций ([4]) следует, что функция $\Xi(t)$ может быть представлена в виде

$$\Xi(t) = \mathrm{e}^{a+bt} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\rho_n}\right) \mathrm{e}^{t/\rho_n}, \tag{6}$$

где a и b — константы, а числа ρ_n ($n = 1,2,\ldots$) пробегают все нули функции $\Xi(t)$. Так как для каждого нуля ρ_n число $-\rho_n$ содержится среди нулей функции $\Xi(t)$, то в силу четности функции $\Xi(t)$ и равенства (6) предположение гипотезы Римана приводит к равенству

$$\Xi(t) = \mathrm{e}^{a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\tilde{\rho}_n^2}\right), \tag{7}$$

где произведение распространяется на все положительные нули $\tilde{\rho}_n$ функции $\Xi(t)$. Если теперь разложить функцию (7) в ряд Тейлора $\Xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{2k}$ в точке $t = 0$, то из равенства (7) следует, что для любого натурального k соседние коэффициенты c_k и c_{k+1} имеют разные знаки, а в силу определения функции $\Xi(t)$ это означает, что все четные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ имеют такой же знак, как и число $\xi(1/2)$. Поэтому утверждение теоремы 2 следует из неравенства $\xi(1/2) > 0$.

Теорема 2 доказана.

2. Асимптотическая формула для коэффициентов Тейлора функции $\xi(s)$

Функция Римана $\xi(s)$, определенная в п. 1, — целая функция. В терминах этой функции функциональное уравнение для дзета–функции $\zeta(s)$ принимает вид $\xi(s) = \xi(1-s)$, из которого следует, что ряд Тейлора функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ имеет форму

$$\xi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \xi_r \left(s - \frac{1}{2}\right)^{2r}. \tag{8}$$

В этом пункте находится явное асимптотическое выражение для коэффициентов Тейлора ξ_r функции $\xi(s)$ в (8) при $r \to \infty$. Это асимптотическое выражение для $\xi(s)$ интересно само по себе, а также в связи с гипотезой Римана ([1, 3]).

Теорема 3. *При $r \to \infty$ справедливо следующее асимптотическое равенство:*

$$\xi_r \sim (2\pi)^{1/4} \frac{2^{-(2r-2)}}{(2r-2)!} \left(\ln \frac{2r-2}{\pi} - \ln\ln \frac{2r-2}{\pi} + \beta(r)\right)^{2r-2} \times$$
$$\times \exp\left(-(2r-2)\left(\ln \frac{2r-2}{\pi}\right)^{-1} \mathrm{e}^{\beta}\right)(r-1)^{-1/4}\left(\ln \frac{2r-2}{\pi}\right)^{1/4},$$

где $\beta = \beta(r)$ *— функция, удовлетворяющая условию* $\lim_{r\to\infty}\beta(r) = 0$.

Следствие. *Выполняется следующее равенство:*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{(r!\xi_r)^{(r+1)/r}}{(r+1)!\xi_{r+1}} = \mathrm{e}.$$

Список литературы

[1] L. D. Pustyl'nikov. New results of the theory of the classical Riemann zeta–function. In the book “Traces in Number Theory, Geometry and Quantum Fields”, Editors S. Albeverio et al., Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2008, p. 187–192.

[2] Л. Д. Пустыльников. О связи гипотезы Римана о нулях дзета–функции со спектром оператора, действующего в гильбертовом пространстве, и со свойствами одной динамической системы. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, № 43, 2009, 7 с.

[3] Л. Д. Пустыльников. О гипотезе Римана для приближенной дзета–функции. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, № 70, 2008, 6 с.

[4] А. А. Карацуба. Основы аналитической теории чисел. Издательство «Наука», Москва, 1975.

[5] Е. К. Титчмарш. Теория дзета–функции Римана. Издательство иностранной литературы, Москва, 1953.