ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 48 за 2010 г.

Арансон А.Б., Брюно А.Д.

Степенные разложения сдвинутых решений системы Н.Ковалевского

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Арансон А.Б., Брюно А.Д. Степенные разложения сдвинутых решений системы Н.Ковалевского // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 48. 32 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-48**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Б. Арансон, А.Д. Брюно

СТЕПЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
СДВИНУТЫХ РЕШЕНИЙ
СИСТЕМЫ Н.КОВАЛЕВСКОГО

Москва, 2010 г.

УДК 517.925+531.38

А.Б. Арансон, А.Д. Брюно. Степенные разложения сдвинутых решений системы Н. Ковалевского. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Продолжается вычисление степенных разложений решений сиситемы ОДУ Н. Ковалевского алгоритмами степенной геометрии. А.Брюно, В.Лунёв, И.Гашененко этими алгоритмами вычислили разложения решений этой системы во всех случаях, когда независимая переменная стремится к нулю и бесконечности. Теперь, для изучения случаев когда независимая переменная стремится к отличной от нуля и бесконечности константе, рассматривается модифицированная система Н. Ковалевского. Алгоритмами степенной геометрии вычислено 7 новых степенных разложений решений такой системы. Также сделана реализация применённых алгоритмов на языке системы символьных вычислений Maxima и на языке программирования C++.

A.B. Aranson, A.D. Bruno. Power expansions of the shifted solutions to the N. Kowalewski system. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

We continue the calculation of power expansion solutions to the N.Kowalewski ODE system by algorithms of power geometry. A.Bruno, V.Lunev, I.Gashenenko used these algorithms to calculate expansions of solutions of the system if independent variable tends to zero and tends to infinity. Now we consider modified system of N. Kowalewski to calculate power expansions of solutions if independent variable tends to bounded nonzero constant. The 7 new power expansions of solutions of the system are calculated by power geometry algorithms. Also the implementation of used algorithms by CAS Maxima and C++ programing languages is made.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00082.

E-mails: aboar@yandex.ru, bruno@keldysh.ru
http: www.keldysh.ru
(см. электронная библиотека, каталог публикаций сотрудников ИПМ, препринт).

1 Введение

1.1 Уравнения Эйлера–Пуассона

Система уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой имеет вид [1]

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr - Mg(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3),\\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp - Mg(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1),\\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq - Mg(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2),\\
\frac{d\gamma_1}{dt} &= r\gamma_2 - q\gamma_3,\\
\frac{d\gamma_2}{dt} &= p\gamma_3 - r\gamma_1,\\
\frac{d\gamma_3}{dt} &= q\gamma_1 - p\gamma_2,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где переменная t — время, A, B, C — главные моменты инерции твердого тела, которые удовлетворяют неравенствам треугольника

$$
A > 0,\ B > 0,\ C > 0,\ A + B \geqslant C,\ A + C \geqslant B,\ B + C \geqslant A,
$$

Mg — вес тела, x_0, y_0, z_0 — координаты центра масс твердого тела в системе координат, связанной с телом, p, q, r — проекции вектора угловой скорости на оси координат, связанные с телом, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы вертикали в системе координат, связанной с телом. Система уравнений (1.1) имеет три первых общих интеграла

$$
\begin{aligned}
&Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = h = \mathrm{const},\\
&Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = l = \mathrm{const},\\
&\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Это интегралы энергии, момента и геометрический. Первые два интеграла следуют из общих теорем механики.

Возьмем такую систему единиц, что $Mg = 1$. Остается 6 параметров : A, B, C, x_0, y_0, z_0 и два значения интегралов (1.2): h и l.

1.2 Уравнения Н.Ковалевского

Для случая

$$B \neq C, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 = z_0 = 0 \tag{1.3}$$

Н. Ковалевский [2] предложил рассматривать p как независимую переменную и ввёл новые зависимые переменные

$$\sigma = (B-C)q^2/A, \quad \tau = (B-C)r^2/A.$$

Тогда

$$q = \sqrt{A\sigma/(B-C)}, \quad r = \sqrt{A\tau/(B-C)}. \tag{1.4}$$

В результате подстановки (1.4) в первые три уравнения системы (1.1) и в первое уравнение системы (1.2) получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} = \sqrt{\sigma\tau}\frac{d}{dp}, \\ &\gamma_3 = -\frac{B}{2x_0}\sqrt{\frac{A}{B-C}}\left(\frac{d\sigma}{dp}\sqrt{\tau} - 2\frac{C-A}{B}\sqrt{\tau}p\right), \\ &\gamma_2 = \frac{C}{2x_0}\sqrt{\frac{A}{B-C}}\left(\sqrt{\sigma}\frac{d\tau}{dp} - 2\frac{A-B}{C}\sqrt{\sigma}p\right), \\ &\gamma_1 = -\frac{1}{2x_0}\left(h - \frac{AB}{B-C}\sigma - \frac{AC}{B-C}\tau - Ap^2\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Подстановки (1.4) и (1.5) в четвёртое уравнение системы (1.1) делают это уравнение тождеством. Теже подстановки в пятое и шестое уравнения системы (1.1) и во второе и третье уравнения системы (1.2) преобразуют их в систему двух уравнений

$$\begin{aligned} &f_1(\sigma,\tau,p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\sigma}{dp^2}\tau + \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{dp}\frac{d\tau}{dp} + a_1 + a_2\sigma + a_3p\frac{d\tau}{dp} + a_4\tau + a_5p^2 = 0, \\ &f_2(\sigma,\tau,p) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\frac{d^2\tau}{dp^2} + \frac{1}{2}\frac{d\sigma}{dp}\frac{d\tau}{dp} + b_1 + b_2p\frac{d\sigma}{dp} + b_3\sigma + b_4\tau + b_5p^2 = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

и два первых интеграла

$$\begin{aligned} &f_3(\sigma,\tau,p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\sigma}{dp}\tau - \sigma\frac{d\tau}{dp} + c_1 + c_2p + c_3p\sigma + c_4p\tau + c_5p^3 = 0, \\ &f_4(\sigma,\tau,p) \stackrel{\text{def}}{=} d_1\left(\frac{d\sigma}{dp}\right)^2\tau + \sigma\left(\frac{d\tau}{dp}\right)^2 + d_2 + d_3\sigma + d_4\tau + d_5\sigma^2 + \\ &+ d_6p\frac{d\sigma}{dp}\tau + d_7p\sigma\frac{d\tau}{dp} + d_8\sigma\tau + d_9\tau^2 + d_{10}p^2 + d_{11}p^2\sigma + d_{12}p^2\tau + d_{13}p^4 = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где коэффициенты $a_1, \dots, a_5$, $b_1, \dots, b_5$, $c_1, \dots, c_5$, $d_1, \dots, d_{13}$ равны

$$
\begin{aligned}
&a_1 = -z/y, \quad a_2 = x/(y-1), \quad a_3 = (x-2)/y,\\
&a_4 = (2xy + 2 - x - 2y)/(y(y-1)), \quad a_5 = (3x-2y)/y;\\
&b_1 = -z, \quad b_2 = 2y - x, \quad b_3 = (2y^2 + 2x - 2y - xy)/(y-1),\\
&b_4 = x/(y-1), \quad b_5 = 3x - 2;\\
&c_1 = -2(y-1)\lambda\xi/(xy), \quad c_2 = z(y-1)/y,\\
&c_3 = x - 2y, \quad c_4 = (x-2)/y, \quad c_5 = -x(y-1)/y;\\
&d_1 = y^2, \quad d_2 = (z^2 - 4\xi^2 m)(y-1)/x,\\
&d_3 = -2yz, \quad d_4 = -2z, \quad d_5 = xy^2/(y-1),\\
&d_6 = -4(1-x)y, \quad d_7 = -4(x-y), \quad d_8 = 2xy/(y-1),\\
&d_9 = x/(y-1), \quad d_{10} = -2z(y-1),\\
&d_{11} = 2(2x^2 - 3xy + 2y^2), \quad d_{12} = 2(2 - 3x + 2x^2), \quad d_{13} = x(y-1);
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

а параметры x, y, z, λ, ξ выражаются через параметры систем (1.1) и (1.2)

$$x = A/C, \quad y = B/C, \quad z = h/C, \quad \lambda = l/C, \quad \xi = x_0/C, \quad m = 1.$$

С помощью алгоритмов степенной геометрии А.Брюно, В.Лунёв, И.Гашененко [3] вычислили различные разложения решений системы (1.6) во всех случаях, когда независимая переменная $p \to 0$ и $p \to \infty$. Некоторые из полученных решений были известны ранее, другие решения были вычислены впервые.

1.3 Сдвинутые решения уравнений Н.Ковалевского

Теперь вычисляются степенные разложения решений системы (1.6), когда независимая переменная $p \to p_0$, где

$$p_0 = \mathrm{const} \in \mathbb{C}, \quad 0 \neq p_0 \neq \infty.$$

Для этого введём новую переменную $\tilde{p} = p - p_0$. Тогда условию $p \to p_0$ соответствует условие $\tilde{p} \to 0$. После подстановки $p = \tilde{p} + p_0$ в системы (1.6) и (1.7) получим уравнения

$$
\begin{aligned}
\tilde f_1(\sigma,\tau,\tilde p) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d^2\sigma}{d\tilde p^2}\tau + \frac{d\sigma}{d\tilde p}\frac{d\tau}{d\tilde p}/2\right) + \left(a_3\frac{d\tau}{d\tilde p}\tilde p + a_4\tau\right) + a_2\sigma + a_3p_0\frac{d\tau}{d\tilde p} + \\
&\quad + a_5\tilde p^2 + 2a_5p_0\tilde p + \left(a_5p_0^2 + a_1\right) = 0, \\
\tilde f_2(\sigma,\tau,\tilde p) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sigma\frac{d^2\tau}{d\tilde p^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde p}\frac{d\tau}{d\tilde p}/2\right) + \left(b_2\frac{d\sigma}{d\tilde p}\tilde p + b_3\sigma\right) + b_2p_0\frac{d\sigma}{d\tilde p} + b_4\tau + \\
&\quad + b_5\tilde p^2 + 2b_5p_0\tilde p + \left(b_5p_0^2 + b_1\right) = 0
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

и первые интегралы

$$
\begin{aligned}
\tilde f_3(\sigma,\tau,\tilde p) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d\sigma}{d\tilde p}\tau - \sigma\frac{d\tau}{d\tilde p}\right) + c_3\sigma\tilde p + c_3p_0\sigma + c_4\tau\tilde p + c_4p_0\tau + \\
&\quad + c_5\tilde p^3 + 3c_5p_0\tilde p^2 + \left(3c_5p_0^2 + c_2\right)\tilde p + \left(c_5p_0^3 + c_2p_0 + c_1\right) = 0, \\
\tilde f_4(\sigma,\tau,\tilde p) &\stackrel{\text{def}}{=} d_1\left(\frac{d\sigma}{d\tilde p}\right)^2\tau + \sigma\left(\frac{d\tau}{d\tilde p}\right)^2 + \\
&\quad + \left(d_6p_0\frac{d\sigma}{d\tilde p}\tau + d_7p_0\sigma\frac{d\tau}{d\tilde p}\right) + \left(d_6\frac{d\sigma}{d\tilde p}\tau\tilde p + d_7\sigma\frac{d\tau}{d\tilde p}\tilde p + d_8\sigma\tau\right) + \\
&\quad + d_5\sigma^2 + d_9\tau^2 + d_{11}\sigma\tilde p^2 + 2d_{11}p_0\sigma\tilde p + d_{12}\tau\tilde p^2 + 2d_{12}p_0\tau\tilde p + \\
&\quad + \left(d_{11}p_0^2 + d_3\right)\sigma + \left(d_{12}p_0^2 + d_4\right)\tau + d_{13}\tilde p^4 + 4d_{13}p_0\tilde p^3 + \\
&\quad + \left(6d_{13}p_0^2 + d_{10}\right)\tilde p^2 + \left(4d_{13}p_0^3 + 2d_{10}p_0\right)\tilde p + \left(d_{13}p_0^4 + d_{10}p_0^2 + d_2\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

где $\tilde p$ — новая независимая переменная.

Для системы уравнений (1.9) при $\tilde p \to 0$ вычислим степенные разложения её решений вида

$$
\sigma = \tilde p^{\alpha}\left(\sigma_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j\tilde p^{j\Delta}\right), \quad \tau = \tilde p^{\beta}\left(\tau_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\tau_j\tilde p^{j\Delta}\right), \tag{1.11}
$$

где $\sigma_0, \sigma_j, \tau_0, \tau_j \in \mathbb{C}$, $\sigma_0, \tau_0 \neq 0$, $\alpha, \beta, \Delta \in \mathbb{Q}$, $\Delta > 0$. Это можно сделать с помощью алгоритмов степенной геометрии.

2 Укорочения и нормальные конусы систем (1.9) и (1.10)

Уравнения систем (1.9) и (1.10) являются суммами конечного числа слагаемых. Слагаемые являются произведениями обычных мономов на конечное число производных. Такие слагаемые называются *дифференциальными мономами*. В дальнейшем слово дифференциальный будем опускать.

Введём пространство $\mathbb{R}^{2+1}$ векторов $Q = (q_1, q_2, q_3)$ векторных показателей степеней мономов уравнений систем (1.9) и (1.10). Коэффициентам a_j, b_j,

c_j, d_j, p_0 и полиномам от этих коэффициентов соответствует векторный показатель $Q(\mathrm{const} \neq 0) = (0,0,0)$. Степенным функциям соответствуют векторные показатели $Q(\sigma^{q_1}) = (q_1, 0, 0)$, $Q(\tau^{q_2}) = (0, q_2, 0)$ и $Q(\tilde{p}^{q_3}) = (0,0,q_3)$. Производным соответствуют векторные показатели $Q(d^l\sigma/d\tilde{p}^l) = (1, 0, -l)$ и $Q(d^l\tau/d\tilde{p}^l) = (0, 1, -l)$. Векторный показатель степени монома равен сумме векторных показателей степеней входящих в моном множителей.

Множество векторных показателей степеней мономов уравнения называется *носителем* уравнения.

Чтобы вычислять векторные показатели степеней мономов и носители для систем с конечным числом уравнений в виде сумм из конечного числа мономов написана функция на языке системы символьных вычислений Maxima.

С помощью этой функции для мономов уравнений систем (1.9) и (1.10) вычислены векторные показатели:

$$
\begin{aligned}
&Q((d^2\sigma/d\tilde{p}^2)\tau) = Q((d\sigma/d\tilde{p})(d\tau/d\tilde{p})/2) = Q_1,\\
&Q(a_3(d\tau)/(d\tilde{p})\tilde{p}) = Q(a_4\tau) = Q_2,\ Q(a_2\sigma) = Q_3,\ Q(a_3p_0(d\tau)/(d\tilde{p})) = Q_4,\\
&Q(a_5\tilde{p}^2) = Q_5,\ Q(2a_5p_0\tilde{p}) = Q_6,\ Q(a_5p_0^2 + a_1) = Q_7,\\
&Q(\sigma(d^2\tau/d\tilde{p}^2)) = Q((d\sigma/d\tilde{p})(d\tau/d\tilde{p})/2) = Q_1,\\
&Q(b_2(d\sigma)/(d\tilde{p})\tilde{p}) = Q(b_3\sigma) = Q_3,\ Q(b_2p_0(d\sigma)/(d\tilde{p})) = Q_8,\\
&Q(b_4\tau) = Q_2,\ Q(b_5\tilde{p}^2) = Q_5,\ Q(2b_5p_0\tilde{p}) = Q_6,\ Q(b_5p_0^2 + b_1) = Q_7,\\
&Q((d\sigma/d\tilde{p})\tau) = Q(-\sigma(d\tau/d\tilde{p})) = Q_9,\ Q(c_3\sigma\tilde{p}) = Q_{10},\ Q(c_3p_0\sigma) = Q_3,\\
&Q(c_4\tau\tilde{p}) = Q_{11},\ Q(c_4p_0\tau) = Q_2,\ Q(c_5\tilde{p}^3) = Q_{12},\ Q(3c_5p_0\tilde{p}^2) = Q_5,\\
&Q((3c_5p_0^2 + c_2)\tilde{p}) = Q_6,\ Q(c_5p_0^3 + c_2p_0 + c_1) = Q_7,\ Q(d_1(d\sigma/d\tilde{p})^2\tau) = Q_{13},\\
&Q(\sigma(d\tau/d\tilde{p})^2) = Q_{14},\ Q(d_6p_0(d\sigma/d\tilde{p})\tau) = Q(d_7p_0\sigma(d\tau/d\tilde{p})) = Q_9,\\
&Q(d_6(d\sigma/d\tilde{p})\tau\tilde{p}) = Q(d_7\sigma(d\tau/d\tilde{p})\tilde{p}) = Q(d_8\sigma\tau) = Q_{15},\ Q(d_5\sigma^2) = Q_{16},\\
&Q(d_9\tau^2) = Q_{17},\ Q(d_{11}\sigma\tilde{p}^2) = Q_{18},\ Q(2d_{11}p_0\sigma\tilde{p}) = Q_{10},\ Q(d_{12}\tau\tilde{p}^2) = Q_{19},\\
&Q(2d_{12}p_0\tau\tilde{p}) = Q_{11},\ Q((d_{11}p_0^2 + d_3)\sigma) = Q_3,\ Q((d_{12}p_0^2 + d_4)\tau) = Q_2,\\
&Q(d_{13}\tilde{p}^4) = Q_{20},\ Q(4d_{13}p_0\tilde{p}^3) = Q_{12},\ Q((6d_{13}p_0^2 + d_{10})\tilde{p}^2) = Q_5,\\
&Q(2(2d_{13}p_0^2 + d_{10})p_0\tilde{p}) = Q_6,\ Q(d_{13}p_0^4 + d_{10}p_0^2 + d_2) = Q_7,
\end{aligned}
$$

где $Q_1 = (1,1,-2)$, $Q_2 = (0,1,0)$, $Q_3 = (1,0,0)$, $Q_4 = (0,1,-1)$, $Q_5 = (0,0,2)$, $Q_6 = (0,0,1)$, $Q_7 = (0,0,0)$, $Q_8 = (1,0,-1)$, $Q_9 = (1,1,-1)$, $Q_{10} = (1,0,1)$, $Q_{11} = (0,1,1)$, $Q_{12} = (0,0,3)$, $Q_{13} = (2,1,-2)$, $Q_{14} = (1,2,-2)$, $Q_{15} = (1,1,0)$, $Q_{16} = (2,0,0)$, $Q_{17} = (0,2,0)$, $Q_{18} = (1,0,2)$, $Q_{19} = (0,1,2)$, $Q_{20} = (0,0,4)$, и носители $\mathcal{S}(\tilde{f}_1) = \mathcal{S}_1 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7\}$, $\mathcal{S}(\tilde{f}_2) = \mathcal{S}_2 = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8\}$, $\mathcal{S}(\tilde{f}_3) = \mathcal{S}_3 = \{Q_2, Q_3, Q_5, Q_6, Q_7, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}\}$, $\mathcal{S}(\tilde{f}_4) = \mathcal{S}_4 = \{Q_2, Q_3, Q_5, Q_6, Q_7, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{15}, Q_{16}, Q_{17}, Q_{18}, Q_{19}, Q_{20}\}$.

Некоторым различным мономам в одном уравнении соответствует один и тотже векторный показатель степени. Суммы таких мономов показаны в больших скобках. Пока предположим, что в уравненях систем (1.9) и (1.10) для каждого векторного показателя носителей $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_4$ присутствует не менее одного монома. В дальнейшем это предположение будем уточнять.

Введём пространство $\mathbb{R}^{2+1}_*$ векторов $R = (r_1, r_2, r_3)$, двойственное пространству $\mathbb{R}^{2+1}$, т.е. определено скалярное произведение $\langle Q, R\rangle = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3$. Каждому вектору $R \in \mathbb{R}^{2+1} \setminus \mathbf{0}$ в каждом носителе $\mathcal{S}_{i'}$, $i' = 1, 2, 3, 4$ соответствует *граничное подмножество*

$$\mathcal{S}_{i',R} = \{Q' \mid \langle Q', R\rangle = \max_{Q\in\mathcal{S}_{i'}} \langle Q, R\rangle\} \subseteq \mathcal{S}_{i'}. \tag{2.1}$$

Граничному подмножеству $\mathcal{S}_{i',R}$ соответствует *укороченное уравнение*

$$\tilde{f}_{i',R}(\sigma, \tau, \tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j g_j(\sigma, \tau, \tilde{p}) = 0, \quad Q(g_j(\sigma, \tau, \tilde{p})) \in \mathcal{S}_{i',R}.$$

где $g_j(\sigma, \tau, \tilde{p})$ — моном из $\tilde{f}_{i'}(\sigma, \tau, \tilde{p})$.

Набор граничных подмножеств $\mathcal{S}_{1,R}, \ldots, \mathcal{S}_{4,R}$ из всех носителей $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_4$, соответствующих одному и томуже вектору R называется набором *согласованных* граничных подмножеств. Этому согласованному набору соответствует система укороченных уравнений $\tilde{f}_{1,R}, \ldots, \tilde{f}_{4,R}$, называемая *укороченной системой* или *укорочением* по вектору R.

Для вычислений показателей и коэффициентов ведущих членов степенных разложений существует

Теорема 1 ([4]). *Если выражения* (1.11) *являются разложением решения уравнений* (1.9) *с первыми интегралами* (1.10) *при* $\tilde{p} \to 0$ *и показателями* $\alpha = r_1/r_3$, $\beta = r_2/r_3$, $r_3 < 0$, *то коэффициенты* $\sigma_0, \tau_0 \neq 0$ *являются решением укороченной системы*

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_{1,(r_1,r_2,r_3)}(\sigma_0 \tilde{p}^{r_1/r_3}, \tau_0 \tilde{p}^{r_2/r_3}, \tilde{p}) = 0, \\ &\tilde{f}_{2,(r_1,r_2,r_3)}(\sigma_0 \tilde{p}^{r_1/r_3}, \tau_0 \tilde{p}^{r_2/r_3}, \tilde{p}) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

а значения интегралов z, λ, ξ *удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{aligned} &\tilde{f}_{3,(r_1,r_2,r_3)}(\sigma_0 \tilde{p}^{r_1/r_3}, \tau_0 \tilde{p}^{r_2/r_3}, \tilde{p}) = 0, \\ &\tilde{f}_{4,(r_1,r_2,r_3)}(\sigma_0 \tilde{p}^{r_1/r_3}, \tau_0 \tilde{p}^{r_2/r_3}, \tilde{p}) = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если укороченные системы (2.2),(2.3) *не имеют решений* $\sigma_0, \tau_0 \neq 0$, *то решения уравнений* (1.9) *с первыми интегралами* (1.10) *не имеют разложений* (1.11) *при* $\tilde{p} \to 0$ *с показателями* $\alpha = r_1/r_3$, $\beta = r_2/r_3$, $r_3 < 0$.

Множество $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}_*^{2+1}$ векторов $R \in \mathbf{U}$, которым соответствует одно и тоже граничное подмножество $\mathcal{S}_{1,\mathbf{U}}, \ldots, \mathcal{S}_{4,\mathbf{U}}$ и одна и таже укороченная система $\tilde{f}_{1,\mathbf{U}}, \ldots, \tilde{f}_{4,\mathbf{U}}$ называется *нормальным конусом* этого укорочения.

В работе [5] описан алгоритм вычисления всех наборов согласованных граничных подмножеств и их нормальных конусов для конечного набора конечных носителей конечной размерности. По этому алгоритму для набора носителей составляется система однородных линейных неравенств и по решению этой системы вычисляются наборы согласованных граничных подмножеств и их нормальные конусы. Этот алгоритм, а также алгоритм Моцкина-Бургера решения систем линейных неравенств, реализованы в виде компьютерной программы на языке C++.

С помощью этой программы для набора носителей $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_4$ вычислены все наборы согласованных граничных подмножеств и их нормальные конусы.

Поскольку ищутся разложения решений при $\tilde{p} \to 0$, то надо рассматривать только те укорочения $\tilde{f}_{1,\mathbf{U}}, \ldots, \tilde{f}_{4,\mathbf{U}}$, у которых нормальные конусы $\mathbf{U}$ имеют непустое пересечение с полупространством $r_3 < 0$. Таких нормальных конусов 49. Сечения этих конусов гиперплоскостью $\gamma = r_3 = -1$ показаны на рис. 1. Эти сечения состоят из точек, открытых отрезков, открытых лучей и незамкнутых двумерных многогранных выпуклых множеств.

На рис. 1 видно, что 21 пара конусов симметричны друг другу относительно прямой $\alpha = \beta$. Этим парам конусов соответствуют пары укорочений, симметричных друг другу относительно замены переменных и параметров

$$(\sigma, \tau, x, y, z, \lambda, \xi) \leftrightarrow (-\tau, -\sigma, x/y, 1/y, z/y, \lambda/y, \xi/y). \tag{2.4}$$

Разложения решений, вычисленных по таким парам симметричных укорочений, также симметричны относительно замены (2.4). Поэтому достаточно вычислить разложение решения только по одному укорочению из пары симметричных.

Для 28 укорочений (по одному из 21 пары и 7 оставшихся) и их нормальных конусов были составлены и решены системы уравнений вида (2.2),(2.3). Сечения нормальных конусов укорочений, для которых системы уравнений вида (2.2),(2.3) имеют решения $\sigma_0, \tau_0 \neq 0$, отмечены на рис. 1 чёрным цветом и обозначены символами $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_5$ и $\bar{\mathbf{U}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{U}}_4$. Остальные конусы отмечены серым и белым цветами и никак не обозначены. Чёрточка над обозначением конуса означает, что для этого конуса имеется симметричный конус.

3 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_1$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_1$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,1} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2}\tau + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tau}{d\tilde{p}}/2\right) + a_3 p_0 \frac{d\tau}{d\tilde{p}} = 0, \\ \tilde{f}_{2,1} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sigma\frac{d^2\tau}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tau}{d\tilde{p}}/2\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{3,1} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tau - \sigma\frac{d\tau}{d\tilde{p}}\right) + c_4 p_0 \tau + \left(c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1\right) = 0, \\ \tilde{f}_{4,1} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left(\frac{d\tau}{d\tilde{p}}\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

при условиях

$$a_3 \neq 0,\ c_4 \neq 0,\ c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1 \neq 0. \tag{3.2$'$}$$

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_1$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является вектором (α, β, γ) с координатами $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{p}^{\alpha/\gamma} = \sigma_0 \tilde{p}, \quad \tau = \tau_0 \tilde{p}^{\beta/\gamma} = \tau_0 \tag{3.3}$$

являются первым приближением решения системы (1.9), то эти функции являются точным решением системы (3.1). Подстановка функций (3.3) в выражения (3.1) обращает последние в равенства при любых значениях коэффициентов σ_0 и τ_0. Также при любых значениях σ_0 и τ_0 всегда остаётся равенством выражение $\tilde{f}_{4,1}$ при подстановке в него функций (3.3). А подстановка в выражение $\tilde{f}_{3,1}$ обращает его в равенство

$$(\sigma_0 + c_4 p_0)\tau_0 + c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1 = 0$$

и позволяет выразить зависимость значения одного из первых интегралов, например, λ от коэффициентов первых приближений σ_0 и τ_0.

Для вычисления остальных членов разложения (1.11) в случае конуса $\mathbf{U}_1$ вычислим матрицу производных Фреше укорочения (3.1)

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \delta\tilde{f}_{1,1}/\delta\sigma & \delta\tilde{f}_{1,1}/\delta\tau \\ \delta\tilde{f}_{2,1}/\delta\sigma & \delta\tilde{f}_{2,1}/\delta\tau \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \tau\dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\tau}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{d\sigma}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} + a_3 p_0 \dfrac{d}{d\tilde{p}} + \dfrac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d\tau}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} + \dfrac{d^2\tau}{d\tilde{p}^2} & \sigma\dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\sigma}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} \end{array}\right].$$

В матрицу $\mathbf{F}$ подставим выражения (3.3), умножим результат справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+\alpha/\gamma}, \tilde{p}^{s+\beta/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+1}, \tilde{p}^{s}\right]$, а слева умножим на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s-g_1/\gamma}, \tilde{p}^{-s-g_2/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s+1}, \tilde{p}^{-s+1}\right]$, где $g_i = \max_{Q\in\mathcal{S}_i} \langle Q, R\rangle$, $R \in \mathbf{U}_1$, $i = 1, 2$. В результате получим характеристическую матрицу укорочения (3.1)

$$\mathcal{N}(s) = \begin{bmatrix} s(s+1)\tau_0 & s\dfrac{2a_3p_0+\sigma_0}{2} \\ 0 & s(2s-1)\dfrac{\sigma_0}{2} \end{bmatrix}.$$

Определитель $\nu(s) = \det \mathcal{N}(s)$ является характеристическим полиномом укорочения (3.1), а корни уравнения $\nu(s) = 0$

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad s_4 = -1$$

являются собственными числами укорочения (3.1). Наименьшее положительное собственное число равно $1/2$.

Для вычисления матрицы производных Фреше, характеристической матрицы и характеристического полинома систем сумм мономов написана функция на языке системы символьных вычислений Maxima.

Теперь согласно [6] вычислим величину приращения степени Δ разложения (1.11) в случае нормального конуса $\mathbf{U}_1$. Для этого в систему (1.9) сделаем подстановку $\sigma = \sigma_0\tilde{p} + \hat{\sigma}$, $\tau = \tau_0 + \hat{\tau}$ и получим систему уравнений с зависимыми переменными $\hat{\sigma}$, $\hat{\tau}$ и независимой переменной $\tilde{p}$

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(\hat{\sigma},\hat{\tau},\tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d\hat{\sigma}}{d\tilde{p}}\frac{d\hat{\tau}}{d\tilde{p}}/2 + \frac{d^2\hat{\sigma}}{d\tilde{p}^2}\hat{\tau}\right) + \left(a_3\frac{d\hat{\tau}}{d\tilde{p}}\tilde{p} + a_4\hat{\tau}\right) + \tau_0\frac{d^2\hat{\sigma}}{d\tilde{p}^2} + \\
&+ (\sigma_0/2 + a_3p_0)\frac{d\hat{\tau}}{d\tilde{p}} + a_2\hat{\sigma} + a_5\tilde{p}^2 + (a_2\sigma_0 + 2a_5p_0)\tilde{p} + (a_5p_0^2 + a_4\tau_0 + a_1) = 0 \\
&\varphi_2(\hat{\sigma},\hat{\tau},\tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d\hat{\sigma}}{d\tilde{p}}\frac{d\hat{\tau}}{d\tilde{p}}/2 + \hat{\sigma}\frac{d^2\hat{\tau}}{d\tilde{p}^2}\right) + \left(b_2\frac{d\hat{\sigma}}{d\tilde{p}}\tilde{p} + b_3\hat{\sigma}\right) + \sigma_0\left(\frac{d^2\hat{\tau}}{d\tilde{p}^2}\tilde{p} + \frac{d\hat{\tau}}{d\tilde{p}}/2\right) + \\
&+ b_2p_0\frac{d\hat{\sigma}}{d\tilde{p}} + b_4\hat{\tau} + b_5\tilde{p}^2 + ((b_2+b_3)\sigma_0 + 2b_5p_0)\tilde{p} + \\
&+ (b_5p_0^2 + b_4\tau_0 + b_2p_0\sigma_0 + b_1) = 0
\end{aligned}$$

и носителями

$\mathcal{S}(\varphi_1) = \{(1,1,-2),(0,1,0),(1,0,-2),(0,1,-1),(1,0,0),(0,0,2),(0,0,1),(0,0,0)\}$, $\mathcal{S}(\varphi_2) = \{(1,1,-2),(1,0,0),(0,1,-1),(1,0,-1),(0,1,0),(0,0,2),(0,0,1),(0,0,0)\}$

Множества векторов носителей $\mathcal{S}(\varphi_1)$ и $\mathcal{S}(\varphi_2)$ отобразим в двумерные множества $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_1)$ и $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_2)$ векторов (l_0, l_1), где $l_0 = (\langle\hat{Q}, R\rangle - \max\langle\hat{Q}, R\rangle)/\gamma$, $l_1 =$

$q_1+q_2+q_3-1$, $P \in \mathbf{U}_1$, $\hat{Q} \in \mathcal{S}(\varphi_i)$, $i=1,2$. После объединения результатов отображений получим множество $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_1) \cup \hat{\mathcal{S}}(\varphi_1) = \{(0,-2),(0,-1),(1,-1),(1,0),(2,0),(3,1)\}$. В этом множестве координаты всех векторов целочисленные и величина приращения степени Δ может быть равна 1. Но так как наименьшее положительное собственное число $s_1 = 1/2 < 1$, то $\Delta = 1/2$.

Таким образом, следующие члены разложения (1.11) в случае конуса $\mathbf{U}_1$ это $\sigma_1 \tilde{p}^{3/2}$ и $\tau_1 \tilde{p}^{1/2}$. Для вычисления коэффициентов σ_1 и τ_1 подставим выражения $\sigma = \sigma_0 \tilde{p} + \sigma_1 \tilde{p}^{3/2}$ и $\tau = \tau_0 + \tau_1 \tilde{p}^{1/2}$ в систему (1.9), приведём подобные члены и приравняем нулю коэффициенты при $\tilde{p}^{3/2}$ в первом уравнении и при $\tilde{p}^{1/2}$ во втором уравнении. Получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных σ_1 и τ_1. Решение этой системы

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_0 + 2a_3p_0}{3\tau_0}\tau_1, \quad \tau_1 - \text{произвольно.}$$

Аналогичным способом вычисляются остальные коэффициенты σ_j и τ_j, $j = 2, 3, \ldots$. Так, коэффициенты σ_2 и τ_2 являются решением системы двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} 2\tau_0 & \sigma_0/2 + a_3p_0 \\ 0 & \sigma_0/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \\ = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3((\sigma_0 + 2a_3p_0)/\tau_0)\tau_1^2 + 8a_4\tau_0 + 8a_5p_0^2 + 8a_1 \\ -((\sigma_0 + 2a_3p_0)/(3\tau_0))\tau_1^2 + 8b_4\tau_0 + 8b_2p_0\sigma_0 + 8b_5p_0^2 + 8b_1 \end{bmatrix}$$

с ненулевым определителем матрицы в правой части уравнения.

Таким образом, получено степенное разложение трёхпараметрического (параметры σ_0, τ_0 и σ_1) семейства решений $\mathcal{F}_1$ системы уравнений (1.9) при условиях (3.2′).

Поскольку имеется нормальный конус $\bar{\mathbf{U}}_1$, симметричный конусу $\mathbf{U}_1$, то заменой (2.4) в семействе решений $\mathcal{F}_1$ получится семейство решений $\bar{\mathcal{F}}_1$

4 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_2$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_2$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,2} &\stackrel{\text{def}}{=} a_3p_0\frac{d\tau}{d\tilde{p}} = 0, \\ \tilde{f}_{2,2} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sigma\frac{d^2\tau}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tau}{d\tilde{p}}/2\right) + b_4\tau + (b_5p_0^2 + b_1) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned}
&\tilde f_{3,2} \stackrel{\text{def}}{=} c_4 p_0 \tau + \left(c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1\right) = 0,\\
&\tilde f_{4,2} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \left(\frac{d\tau}{d\tilde p}\right)^2 + d_9 \tau^2 + \left(d_{12} p_0^2 + d_4\right)\tau + \left(d_{13} p_0^4 + d_{10} p_0^2 + d_2\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&a_3 \neq 0,\ b_4 \neq 0,\ b_5 p_0^2 + b_1 \neq 0,\ c_4 \neq 0,\ c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1 \neq 0,\\
&d_9 \neq 0,\ d_{12} p_0^2 + d_4 \neq 0,\ d_{13} p_0^4 + d_{10} p_0^2 + d_2 \neq 0.
\end{aligned} \tag{4.2$'$}$$

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_2$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является вектором (α, β, γ) с координатами $\alpha = -2$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0 \tilde p^{\alpha/\gamma} = \sigma_0 \tilde p^2, \quad \tau = \tau_0 \tilde p^{\beta/\gamma} = \tau_0 \tag{4.3}$$

являются первым приближением решения системы (1.9), то эти функции являются точным решением системы (4.1). Подстановка функций (4.3) в выражения (4.1) обращает их в равенство

$$b_4 \tau_0 + b_5 p_0^2 + b_1 = 0, \tag{4.4}$$

откуда следует, что значение коэффициента σ_0 произвольно, а значение коэффициента

$$\tau_0 = -(b_5 p_0^2 + b_1)/b_4. \tag{4.4$'$}$$

Подстановка функций (4.3) в выражения (4.2) обращает их в равенства

$$\begin{aligned}
&c_4 p_0 \tau_0 + c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1 = 0,\\
&d_9 \tau_0^2 + (d_{12} p_0^2 + d_4)\tau_0 + d_{13} p_0^4 + d_{10} p_0^2 + d_2 = 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

которые позволяют выразить зависимость значений первых интегралов от коэффициентов первых приближений σ_0 и τ_0.

Для вычисления остальных членов разложения (1.11) в случае конуса $\mathbf{U}_2$ вычислим матрицу производных Фреше укорочения (4.1)

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & a_3 p_0 \dfrac{d}{d\tilde p} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d\tau}{d\tilde p}\dfrac{d}{d\tilde p} + \dfrac{d^2\tau}{d\tilde p^2} & \sigma \dfrac{d^2}{d\tilde p^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\sigma}{d\tilde p}\dfrac{d}{d\tilde p} + b_4 \end{bmatrix}.$$

В матрицу $\mathbf{F}$ подставим выражения (4.3), умножим результат справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+\alpha/\gamma}, \tilde{p}^{s+\beta/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+2}, \tilde{p}^{s}\right]$, а слева умножим на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s-g_1/\gamma}, \tilde{p}^{-s-g_2/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s+1}, \tilde{p}^{-s}\right]$, где $g_i = \max_{Q\in\mathcal{S}_i} \langle Q, R\rangle$, $R \in \mathbf{U}_2$, $i = 1, 2$. В результате получим характеристическую матрицу укорочения (4.1)

$$\mathcal{N}(s) = \begin{bmatrix} 0 & a_3 p_0 s \\ 0 & s^2\sigma_0 + b_4 \end{bmatrix}.$$

Определитель $\nu(s) = \det \mathcal{N}(s)$ тождественно равен 0 и укорочения (4.1) недостаточно для вычисления разложения (1.11) в случае конуса $\mathbf{U}_2$.

Так как в рассматриваемом случае первым приближением переменной τ является константа τ_0, то для вычисления разложения введём новую зависимую переменную $\tilde{\tau} = \tau - \tau_0$. Тогда $\tau = \tilde{\tau} + \tau_0$. Подставим это выражение для τ в уравнения (1.9) и интегралы (1.10) и, учитывая (4.4), (4.5), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{f}}_1(\sigma, \tilde{\tau}, \tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2}\tilde{\tau} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}/2\right) + \left(a_3\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\tilde{p} + a_4\tilde{\tau}\right) + \\
&+ \tau_0\frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2} + a_3p_0\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}} + a_2\sigma + a_5\tilde{p}^2 + 2a_5p_0\tilde{p} + \left(\tau_0a_4 + a_5p_0^2 + a_1\right) = 0, \\
&\tilde{\tilde{f}}_2(\sigma, \tilde{\tau}, \tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sigma\frac{d^2\tilde{\tau}}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}/2\right) + \left(b_2\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{p} + b_3\sigma\right) + \\
&+ b_2p_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}} + b_4\tilde{\tau} + b_5\tilde{p}^2 + 2b_5p_0\tilde{p} = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

и систему интегралов

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{f}}_3(\sigma, \tilde{\tau}, \tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{\tau} - \sigma\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\right) + \tau_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}} + c_3\sigma\tilde{p} + c_3p_0\sigma + c_4\tilde{\tau}\tilde{p} + c_4p_0\tilde{\tau} + \\
&+ c_5\tilde{p}^3 + 3c_5p_0\tilde{p}^2 + \left(c_4\tau_0 + 3c_5p_0^2 + c_2\right)\tilde{p} = 0, \\
&\tilde{\tilde{f}}_4(\sigma, \tilde{\tau}, \tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} d_1\left(\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\right)^2\tilde{\tau} + \sigma\left(\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\right)^2 + d_1\tau_0\left(\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\right)^2 + \\
&+ \left(d_6p_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{\tau} + d_7p_0\sigma\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\right) + \left(d_6\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{\tau}\tilde{p} + d_7\sigma\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\tilde{p} + d_8\sigma\tilde{\tau}\right) + \\
&+ d_6\tau_0p_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}} + \left(d_6\tau_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{p} + \left(d_{11}p_0^2 + d_3 + \tau_0d_8\right)\sigma\right) + d_5\sigma^2 + d_9\tilde{\tau}^2 + \\
&+ d_{11}\sigma\tilde{p}^2 + 2d_{11}p_0\sigma\tilde{p} + d_{12}\tilde{\tau}\tilde{p}^2 + 2d_{12}p_0\tilde{\tau}\tilde{p} + \left(d_{12}p_0^2 + d_4 + 2\tau_0d_9\right)\tilde{\tau} + \\
&+ d_{13}\tilde{p}^4 + 4d_{13}p_0\tilde{p}^3 + \left(6d_{13}p_0^2 + d_{10} + \tau_0d_{12}\right)\tilde{p}^2 + \\
&+ 2\left(2d_{13}p_0^2 + d_{10} + \tau_0d_{12}\right)p_0\tilde{p} = 0,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где вместо зависимой переменной τ теперь зависимая переменная $\tilde{\tau}$. Вычислим степенные разложения

$$\sigma = \tilde{p}^2 \left(\sigma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \tilde{p}^{j\Delta} \right), \quad \tilde{\tau} = \tilde{p}^{\beta} \left(\tilde{\tau}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\tau}_j \tilde{p}^{j\Delta} \right) \tag{4.8}$$

решений системы (4.6) при $\tilde{p} \to 0$ и $\tilde{\tau} \to 0$, где $\tilde{\tau}_0 \neq 0$.

Уравнения (4.6) и (4.7) также являются суммами мономов и для вычисления разложений (4.8) можно использовать степенную геометрию. Для этого вычисляются носители уравнений (4.6) и (4.7), наборы их согласованных граничных подмножеств, нормальные конусы и укорочения. Сечения гиперплоскостью $\gamma = -1$ нормальных конусов согласованных граничных подмножеств носителей $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{f}}_1)$, $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{f}}_2)$, $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{f}}_3)$, $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{f}}_4)$ показаны на рис. 2. Чёрным цветом отмечены те сечения нормальных конусов укорочений, для которых системы уравнений вида (2.2),(2.3) имеют решения $\sigma_0, \tau_0 \neq 0$. Остальные конусы отмечены серым и белым цветами. Объяснения о конусах, отмеченных чёрным пунктиром, следуют ниже.

Теперь показатели степеней первых приближений разложений (4.8) должны удовлеворять условиям $\sigma = 2$, $\beta < 0$. Геометрически этим условиям соответствует луч, отмеченный на рис. 2 тёмно-серым цветом. С этим лучом пересекаются сечения конусов: в виде точки ($\mathbf{U}_7$) и в виде луча ($\mathbf{U}_8$).

4.1 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_7$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_7$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}_{1,7} &\stackrel{\text{def}}{=} a_3 p_0 \frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}} + \frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2}\tau_0 + (a_4\tau_0 + a_5 p_0^2 + a_1) = 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_{2,7} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sigma \frac{d^2\tilde{\tau}}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}/2 \right) + b_4\tilde{\tau} + b_2 p_0 \frac{d\sigma}{d\tilde{p}} + 2b_5 p_0 \tilde{p} = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}_{3,7} &\stackrel{\text{def}}{=} c_4 p_0 \tilde{\tau} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tau_0 + (c_4\tau_0 + 3c_5 p_0^2 + c_2)\tilde{p} = 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_{4,7} &\stackrel{\text{def}}{=} (2d_9\tau_0 + d_{12}p_0^2 + d_4)\tilde{\tau} + d_6 p_0 \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tau_0 + (2d_{12}p_0\tau_0 + 4d_{13}p_0^3 + 2d_{10}p_0)\tilde{p} = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

при условиях (4.2′) и условиях

$$\begin{gathered} \tau_0 a_4 + a_5 p_0^2 + a_1 \neq 0,\ b_2 \neq 0,\ b_5 \neq 0,\ c_4\tau_0 + 3c_5 p_0^2 + c_2 \neq 0, \\ d_6 \neq 0,\ 2d_9\tau_0 + d_{12}p_0^2 + d_4 \neq 0,\ 2d_{12}p_0\tau_0 + 4d_{13}p_0^3 + 2d_{10}p_0 \neq 0. \end{gathered} \tag{4.10′}$$

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_7$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является вектором (α, β, γ) с координатами $\alpha = -2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{p}^{\alpha/\gamma} = \sigma_0 \tilde{p}^2, \quad \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{\beta/\gamma} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p} \tag{4.11}$$

являются первым приближением решения системы (4.6), то эти функции являются точным решением системы (4.9). Подстановка функций (4.11) в выражения (4.9) даёт систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_3 p_0 \tilde{\tau}_0 + 2\sigma_0 \tau_0 + (a_4 \tau_0 + a_5 p_0^2 + a_1) = 0, \\ &\sigma_0 \tilde{\tau}_0 + b_4 \tilde{\tau}_0 + 2b_2 p_0 \sigma_0 + 2b_5 p_0 = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Из первого уравнения этой системы можно выразить $\tilde{\tau}_0$ и подставить это выражение во второе уравнение. Тогда для неизвестного σ_0 получится квадратное уравнение

$$\begin{aligned} 2\tau_0\sigma_0^2 - \left(2a_3 b_2 p_0^2 - 2b_4\tau_0 - (a_4\tau_0 + a_5 p_0^2 + a_1)\right)\sigma_0 - \\ - \left(2a_3 b_5 p_0^2 - b_4(a_4\tau_0 + a_5 p_0^2 + a_1)\right) = 0 \end{aligned}$$

Подстановка функций (4.11) в выражения (4.10) даёт уравнения, линейно зависимые от первого уравнения системы (4.12).

Для вычисления остальных членов разложения (4.8) в случае конуса $\mathbf{U}_7$ вычислим матрицу производных Фреше укорочения (4.9)

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \tau_0 \dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} & a_3 p_0 \dfrac{d}{d\tilde{p}} \\ \dfrac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}} \dfrac{d}{d\tilde{p}}/2 + b_2 p_0 \dfrac{d}{d\tilde{p}} + \dfrac{d^2\tilde{\tau}}{d\tilde{p}^2} & \sigma \dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} + \dfrac{d\sigma}{d\tilde{p}} \dfrac{d}{d\tilde{p}}/2 + b_4 \end{bmatrix}.$$

В матрицу $\mathbf{F}$ подставим выражения (4.11), умножим результат справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+\alpha/\gamma}, \tilde{p}^{s+\beta/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+2}, \tilde{p}^{s+1}\right]$, а слева умножим на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s-g_1/\gamma}, \tilde{p}^{-s-g_2/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s}, \tilde{p}^{-s-1}\right]$, где $g_i = \max_{Q \in \mathcal{S}_i} \langle Q, R \rangle$, $R \in \mathbf{U}_7$, $i = 1, 2$. В результате получим характеристическую матрицу укорочения (4.9)

$$\mathcal{N}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2)\tau_0 & a_3 p_0 (s+1) \\ (s+2)(\tilde{\tau}_0 + 2b_2 p_0)/2 & (s+1)^2 \sigma_0 + b_4 \end{bmatrix}.$$

Определитель

$$\begin{aligned} \nu(s) = \det \mathcal{N}(s) = \\ = (s+1)(s+2)\left((s+1)^2 \tau_0 \sigma_0 + b_4 \tau_0 - a_3 p_0 (\tilde{\tau}_0 + 2b_2 p_0)/2\right) \end{aligned}$$

является характеристическим полиномом укорочения (4.9). Его корни

$$s_1 = -2,\ s_2 = -1,\ s_{3,4} = -1 \pm \sqrt{\frac{a_3 p_0(\tilde{\tau}_0 + 2b_2 p_0) - 2b_4\tau_0}{2\tau_0\sigma_0}}$$

являются собственными числами укорочения (4.9). В случаях, когда у собственных чисел $\mathrm{Re}(s_{3,4}) < 0$ система уравнений (4.6) имеет степенное разложение $\mathcal{F}_7$ при условиях (4.2′) и (4.10′). Поскольку нормальный конус $\mathbf{U}_7$ получен в результате анализа укорочения с нормальным конусом $\mathbf{U}_2$, а для конуса $\mathbf{U}_2$ имеется симметричный конус $\bar{\mathbf{U}}_2$, то заменой $(\sigma, \tilde{\tau}, x, y, z, \lambda, \xi) \leftrightarrow (-\tau, -\tilde{\sigma}, x/y, 1/y, z/y, \lambda/y, \xi/y)$ в решении $\mathcal{F}_7$ получится решение $\bar{\mathcal{F}}_7$.

Случай $\mathrm{Re}(s_{3,4}) \geqslant 0$ пока не рассматривается.

4.2 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_8$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_8$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}_{1,8} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2}\tau_0 + (a_4\tau_0 + a_5 p_0^2 + a_1) = 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_{2,8} &\stackrel{\text{def}}{=} b_2 p_0 \frac{d\sigma}{d\tilde{p}} + 2b_5 p_0 \tilde{p} = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}_{3,8} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tau_0 + (c_4\tau_0 + 3c_5 p_0^2 + c_2)\tilde{p} = 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_{4,8} &\stackrel{\text{def}}{=} d_6 p_0 \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tau_0 + (2d_{12}p_0\tau_0 + 4d_{13}p_0^3 + 2d_{10}p_0)\tilde{p} = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

при условиях (4.2′) и (4.10′) кроме неравенства $2d_9\tau_0 + d_{12}p_0^2 + d_4 \neq 0$.

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_8$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является вектором (α, β, γ) с координатами $\alpha = -2$, $\beta = -(1+\eta)$, $\gamma = -1$, $0 < \eta$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{p}^{\alpha/\gamma} = \sigma_0 \tilde{p}^2, \quad \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{\beta/\gamma} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{1+\eta} \tag{4.15}$$

являются первым приближением решения системы (4.6), то эти функции являются точным решением системы (4.13). Подстановка функций (4.15) в выражения (4.13) даёт систему уравнений

$$\begin{aligned} &2\sigma_0\tau_0 + (a_4\tau_0 + a_5 p_0^2 + a_1) = 0, \\ &2(b_2\sigma_0 + b_5)p_0 = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Из этой системы следует, что значение коэффициента $\tilde{\tau}_0$ произвольно. Из второго уравнения этой системы можно вычислить значение $\sigma_0 = -b_5/b_2$.

Тогда первое уравнение вместе с $(4.4')$ даёт зависимость параметра p_0 от остальных параметров системы.

Подстановка функций (4.15) в выражения (4.14) даёт уравнения, линейно зависимые от первого уравнения системы (4.16).

Для вычисления остальных членов разложения (4.8) в случае конуса $\mathbf{U}_8$ вычислим матрицу производных Фреше укорочения (4.13)

$$\mathbf{F} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} \tau_0 \dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} & 0 \\ b_2 p_0 \dfrac{d}{d\tilde{p}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как второй столбец матрицы $\mathbf{F}$ является нулевым, то и определитель $\nu(s) = \det \mathcal{N}(s)$ характеристической матрицы тождественно равен 0. Следовательно, укорочения (4.13) недостаточно для вычисления разложения (4.8) в случае конуса $\mathbf{U}_8$.

Поскольку первые приближения (4.15) не являются константами, то замены переменных как в случае конуса $\mathbf{U}_2$ не существует. Согласно [6] в уравнениях (4.6) и (4.7) надо сделать подстановку $\sigma = \sigma_0 \tilde{p}^2 + \tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{1+\eta} + \tilde{\tilde{\tau}}$. С учётом (4.16) получается система уравнений

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_1(\tilde{\sigma}, \tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{p}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{d^2\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}^2} \tilde{\tilde{\tau}} + \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}} \frac{d\tilde{\tilde{\tau}}}{d\tilde{p}} / 2 \right) + \left(\tilde{\tau}_0 \frac{d^2\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}^2} \tilde{p}^{1+\eta} + (\eta+1)\tilde{\tau}_0 \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}} \tilde{p}^{\eta}/2 \right) + \\
&+ \tau_0 \frac{d^2\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}^2} + \left((a_3+\sigma_0) \frac{d\tilde{\tilde{\tau}}}{d\tilde{p}} \tilde{p} + (a_4 + 2\sigma_0)\tilde{\tilde{\tau}} \right) + a_3 p_0 \frac{d\tilde{\tilde{\tau}}}{d\tilde{p}} + a_2 \tilde{\sigma} + \\
&+ (a_5 + a_2\sigma_0)\tilde{p}^2 + ((\eta+3)\sigma_0 + (\eta+1)a_3 + a_4)\tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{1+\eta} + \\
&+ 2a_5 p_0 \tilde{p} + (\eta+1) a_3 \tilde{\tau}_0 p_0 \tilde{p}^{\eta} = 0, \\
&\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_2(\tilde{\sigma}, \tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{p}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\tilde{\sigma} \frac{d^2\tilde{\tilde{\tau}}}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}} \frac{d\tilde{\tilde{\tau}}}{d\tilde{p}} / 2 \right) + \left(\sigma_0 \frac{d^2\tilde{\tilde{\tau}}}{d\tilde{p}^2} \tilde{p}^2 + \sigma_0 \frac{d\tilde{\tilde{\tau}}}{d\tilde{p}} \tilde{p} + b_4 \tilde{\tilde{\tau}} \right) + \\
&+ \left((\eta+1)\tilde{\tau}_0 \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}} \tilde{p}^{\eta}/2 + (\eta^2+\eta)\tilde{\tau}_0 \tilde{\sigma} \tilde{p}^{\eta-1} \right) + \left(b_2 \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}} \tilde{p} + b_3 \tilde{\sigma} \right) + \\
&+ b_2 p_0 \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}} + (b_3\sigma_0 + 2b_2\sigma_0 + b_5)\tilde{p}^2 + ((\eta^2 + 2\eta + 1)\sigma_0 + b_4)\tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{1+\eta} = 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

от новых зависимых переменных $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tilde{\tau}}$. Интегралы $\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_j(\tilde{\sigma}, \tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{p}) = 0$, $j = 3, 4$ выписывать не будем ввиду их громоздского вида. Для системы (4.17) алгоритмами степенной геометрии ищем степенные разложения решений вида

$$\tilde{\sigma} = \tilde{p}^2 \left(\tilde{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_j \tilde{p}^{j\Delta} \right), \quad \tilde{\tilde{\tau}} = \tilde{p}^{1+\eta} \left(\tilde{\tilde{\tau}}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\tau}}_j \tilde{p}^{j\Delta} \right) \tag{4.18}$$

при $\tilde{p} \to 0$.

В мономах системы (4.17) присутствуют множители $\tilde{p}^\eta$ с переменным показателем степени. Для таких мономов описанная в [5] программа вычисления согласованных граничных подмножеств и нормальных конусов не работает. Поэтому вычислим укорочения непосредственно по формуле (2.1). Носители выражений $\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_1, \tilde{\tilde{\tilde{f}}}_2$:

$\mathcal{S}(\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_1) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}\}$, $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_2) = \{Q_1, Q_2, Q_4, Q_6, Q_7, Q_8, Q_{11}\}$, где

$Q_1 = (1, 1, -2)$, $Q_2 = (0, 1, 0)$, $Q_3 = (0, 1, -1)$, $Q_4 = (1, 0, \eta - 1)$, $Q_5 = (1, 0, -2)$, $Q_6 = (1, 0, 0)$, $Q_7 = (0, 0, 2)$, $Q_8 = (0, 0, \eta + 1)$, $Q_9 = (0, 0, 1)$, $Q_{10} = (0, 0, \eta)$, $Q_{11} = (1, 0, -1)$,

Показатели степеней первых приближений укорочений (4.18) должны удовлетворять условиям $\alpha = 2$, $\beta = 1+\eta$. Вычислим набор множеств скалярных произведений $\langle Q \in \mathcal{S}(\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_1), R\rangle, \langle Q \in \mathcal{S}(\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_2), R\rangle$, $R \in \mathbf{U}_8$:

$\{-\eta - 1, -\eta, 0, -2, -1\}$, $\{-\eta - 1, -2, -1\}$,

Напомним, что параметр $0 < \eta$. Тогда набор максимумов скалярных произведений при допустимых значениях η это 0, -1. Набору этих максимумов соответствует набор согласованных граничных подмножеств $\mathcal{S}_{\mathbf{U}_8}(\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_1) = \{Q_5\}$, $\mathcal{S}_{\mathbf{U}_8}(\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_2) = \{Q_{11}\}$,

и укороченная система

$$\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{1,\mathbf{U}_8} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_0 \frac{d^2\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}^2} = 0,$$
$$\tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{2,\mathbf{U}_8} \stackrel{\text{def}}{=} b_2 \tilde{p}_0 \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{p}} = 0.$$

Тогда система уравнений для коэффициентов первых приближений

$$2\tau_0 \tilde{\sigma}_0 = 0,$$
$$b_2 \tilde{p}_0 \tilde{\sigma}_0 = 0,$$

не имеет решений $\tilde{\sigma}_0 \neq 0$.

Таким образом, в случае конуса $\mathbf{U}_8$ у системы (4.6) хотя имеются ненулевые коэффициенты σ_0, $\tilde{\tau}_0$, но степенных разложений нет. Поэтому конус $\mathbf{U}_8$ обозначен на рис. 2 чёрным пунктиром.

5 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_3$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_3$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{1,3} &\stackrel{\text{def}}{=} a_3 p_0 \frac{d\tau}{d\tilde{p}} = 0,\\
\tilde{f}_{2,3} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sigma \frac{d^2\tau}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tau}{d\tilde{p}}/2\right) + b_4\tau + (b_5 p_0^2 + b_1) = 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{3,3} &\stackrel{\text{def}}{=} c_4 p_0 \tau + \left(c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1\right) = 0,\\
\tilde{f}_{4,3} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma \left(\frac{d\tau}{d\tilde{p}}\right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

при условиях

$$a_3 \neq 0,\ b_4 \neq 0,\ b_5 p_0^2 + b_1 \neq 0,\ c_4 \neq 0,\ c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1 \neq 0. \tag{5.2$'$}$$

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_3$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является отрезком (α, β, γ), где $\alpha = -(1+\mu)$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, $0 < \mu < 1$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{p}^{\alpha/\gamma} = \sigma_0 \tilde{p}^{1+\mu}, \quad \tau = \tau_0 \tilde{p}^{\beta/\gamma} = \tau_0 \tag{5.3}$$

являются первым приближением решения системы (1.9), то эти функции являются точным решением системы (5.1). Подстановка функций (5.3) в выражения (5.1) обращает последние в равенства при любых значениях коэффициентов σ_0 и τ_0. Также при любых значениях σ_0 и τ_0 всегда остаётся равенством выражение $\tilde{f}_{4,3}$ при подстановке в него функций (5.3). А подстановка в выражение $\tilde{f}_{3,3}$ обращает его в равенство

$$c_4 p_0 \tau_0 + c_5 p_0^3 + c_2 p_0 + c_1 = 0 \tag{5.4}$$

и позволяет выразить зависимость значения одного из первых интегралов, например, λ от коэффициентов первых приближений σ_0 и τ_0.

Матрица производных Фреше укорочения (5.1)

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & a_3 p_0 \dfrac{d}{d\tilde{p}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d\tau}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} + \dfrac{d^2\tau}{d\tilde{p}^2} & \sigma\dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\sigma}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} \end{bmatrix}.$$

В матрицу $\mathbf{F}$ подставим выражения (5.3), умножим результат справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+\alpha/\gamma}, \tilde{p}^{s+\beta/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+1+\mu}, \tilde{p}^{s}\right]$, а слева умножим на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s-g_1/\gamma}, \tilde{p}^{-s-g_2/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s+1}, \tilde{p}^{-s+1-\mu}\right]$, где $g_i = \max_{Q\in\mathcal{S}_i}\langle Q, R\rangle$, $R \in \mathbf{U}_3$, $i = 1, 2$. В результате получим характеристическую матрицу укорочения (5.1)

$$\mathcal{N}(s) = \begin{bmatrix} 0 & a_3 p_0 s \\ 0 & s\left(2s + (\mu - 1)\right)\dfrac{\sigma_0}{2} \end{bmatrix}.$$

Так как первый столбец характеристической матрицы является нулевым, то её определитель $\nu(s) = \det\mathcal{N}(s)$ тождественно равен 0 и укорочения (5.1) недостаточно для вычисления разложения (1.11) в случае конуса $\mathbf{U}_3$.

Как и в случае конуса $\mathbf{U}_2$ первым приближением переменной τ является константа τ_0. Поэтому для вычисления разложения введём новую зависимую переменную $\tilde{\tau} = \tau - \tau_0$, тогда $\tau = \tilde{\tau} + \tau_0$. После подстановки этого выражения для τ в уравнения (1.9) и интегралы (1.10) и, учитывая (5.4), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\tilde{\tilde{f}}_1(\sigma, \tilde{\tau}, \tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2}\tilde{\tau} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}/2\right) + \left(a_3\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\tilde{p} + a_4\tilde{\tau}\right) + \\
+ \tau_0\frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2} + a_3 p_0\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}} + a_2\sigma + a_5\tilde{p}^2 + 2a_5 p_0\tilde{p} + \left(\tau_0 a_4 + a_5 p_0^2 + a_1\right) = 0, \\
\tilde{\tilde{f}}_2(\sigma, \tilde{\tau}, \tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sigma\frac{d^2\tilde{\tau}}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}/2\right) + \left(b_2\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{p} + b_3\sigma\right) + \\
+ b_2 p_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}} + b_4\tilde{\tau} + b_5\tilde{p}^2 + 2b_5 p_0\tilde{p} + \left(\tau_0 b_4 + b_5 p_0^2 + b_1\right) = 0
\end{gathered} \tag{5.5}$$

и систему интегралов

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{f}}_3(\sigma,\tilde{\tau},\tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{\tau} - \sigma\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\right) + \tau_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}} + c_3\sigma\tilde{p} + c_3p_0\sigma + c_4\tilde{\tau}\tilde{p} + c_4p_0\tilde{\tau} + \\
&+ c_5\tilde{p}^3 + 3c_5p_0\tilde{p}^2 + \left(c_4\tau_0 + 3c_5p_0^2 + c_2\right)\tilde{p} = 0, \\
&\tilde{\tilde{f}}_4(\sigma,\tilde{\tau},\tilde{p}) \stackrel{\text{def}}{=} d_1\left(\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\right)^2\tilde{\tau} + \sigma\left(\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\right)^2 + d_1\tau_0\left(\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\right)^2 + \\
&+ \left(d_6p_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{\tau} + d_7p_0\sigma\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\right) + \left(d_6\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{\tau}\tilde{p} + d_7\sigma\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\tilde{p} + d_8\sigma\tilde{\tau}\right) + \\
&+ d_6\tau_0p_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}} + \left(d_6\tau_0\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tilde{p} + \left(d_{11}p_0^2 + d_3 + \tau_0d_8\right)\sigma\right) + d_5\sigma^2 + d_9\tilde{\tau}^2 + \\
&+ d_{11}\sigma\tilde{p}^2 + 2d_{11}p_0\sigma\tilde{p} + d_{12}\tilde{\tau}\tilde{p}^2 + 2d_{12}p_0\tilde{\tau}\tilde{p} + \left(d_{12}p_0^2 + d_4 + 2\tau_0d_9\right)\tilde{\tau} + \\
&+ d_{13}\tilde{p}^4 + 4d_{13}p_0\tilde{p}^3 + \left(6d_{13}p_0^2 + d_{10} + \tau_0d_{12}\right)\tilde{p}^2 + \\
&+ 2\left(2d_{13}p_0^2 + d_{10} + \tau_0d_{12}\right)p_0\tilde{p} + \\
&+ \left(d_{13}p_0^4 + \tau_0\left(d_{12}p_0^2 + d_4\right) + d_{10}p_0^2 + \tau_0^2d_9 + d_2\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Для системы (5.5) алгоритмами степенной геометрии ищем степенные разложения решений вида

$$
\sigma = \tilde{p}^{1+\mu}\left(\sigma_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j\tilde{p}^{j\Delta}\right), \quad \tilde{\tau} = \tilde{p}^{\beta}\left(\tilde{\tau}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\tilde{\tau}_j\tilde{p}^{j\Delta}\right) \tag{5.7}
$$

при $\tilde{p} \to 0$ и $\tilde{\tau} \to 0$, где $\tilde{\tau}_0 \neq 0$. Для этого вычисляются носители уравнений (5.5) и (5.6), наборы их согласованных граничных подмножеств, нормальные конусы и укорочения. Сечения гиперплоскостью $\gamma = -1$ нормальных конусов согласованных граничных подмножеств носителей $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{f}}_1)$, $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{f}}_2)$, $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{f}}_3)$, $\mathcal{S}(\tilde{\tilde{f}}_4)$ показаны на рис. 3. Чёрным цветом и символом $\mathbf{U}_6$ отмечено сечение нормального конуса укорочения, для которого система уравнений вида (2.2),(2.3) имеют решение $\sigma_0, \tau_0 \neq 0$. Остальные конусы отмечены серым и белым цветами.

Теперь показатели степеней первых приближений разложений (5.7) должны удовлеворять условиям $\alpha = -(1+\mu)$, $\beta < 0$. Геометрически этим условиям соответствует полуполоса, отмеченная на рис. 3 светло-серым цветом. Сечение конуса $\mathbf{U}_6$ пересекается с этой полуполосой.

5.1 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_6$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_6$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{f}}_{1,6} \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_3 p_0 \frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}} + \tau_0 \frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2} = 0,\\
&\tilde{\tilde{f}}_{2,6} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\sigma \frac{d^2\tilde{\tau}}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}/2\right) = 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{f}}_{3,6} \stackrel{\mathrm{def}}{=} c_4 p_0 \tilde{\tau} + \tau_0 \frac{d\sigma}{d\tilde{p}} = 0,\\
&\tilde{\tilde{f}}_{4,6} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma \left(\frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\right)^2 + \left(d_{13}p_0^4 + \tau_0\left(d_{12}p_0^2 + d_4\right) + d_{10}p_0^2 + \tau_0^2 d_9 + d_2\right) = 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

при условиях $(5.2')$ и условии

$$d_{13}p_0^4 + \tau_0\left(d_{12}p_0^2 + d_4\right) + d_{10}p_0^2 + \tau_0^2 d_9 + d_2 \neq 0. \tag{5.9$'$}$$

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_6$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является вектором (α, β, γ) с координатами $\alpha = -4/3$, $\beta = -1/3$, $\gamma = -1$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{p}^{\alpha/\gamma} = \sigma_0 \tilde{p}^{4/3}, \quad \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{\beta/\gamma} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{1/3} \tag{5.10}$$

являются первым приближением решения системы (5.5), то эти функции являются точным решением системы (5.8). Подстановка функций (5.10) в выражения (5.8) обращает равенство $\tilde{\tilde{f}}_{2,6}$ в тождество, а равенство $\tilde{\tilde{f}}_{1,6}$ становится уравнением

$$3a_3 p_0 \tilde{\tau}_0 + 4\sigma_0 \tau_0 = 0. \tag{5.11}$$

Из уравнения (5.11) следует, что $\tilde{\tau}_0 = -4\tau_0\sigma_0/(3a_3p_0)$.

Подстановка функций (5.10) в выражения (5.9) даёт систему уравнений

$$\begin{aligned}
&3c_4 p_0 \tilde{\tau}_0 + 4\tau_0\sigma_0 = 0,\\
&\sigma_0 \tilde{\tau}_0^2/9 + d_9\tau_0^2 + d_{13}p_0^4 + \tau_0(d_{12}p_0^2 + d_4) + d_{10}p_0^2 + d_2 = 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Первое уравнение системы (5.12) пропорционально уравнению (5.11), а второе уравнение позволяет выразить зависимость значения одного из первых интегралов от коэффициентов первых приближений σ_0 и $\tilde{\tau}_0$.

Для вычисления остальных членов разложения (5.7) в случае конуса $\mathbf{U}_6$ вычислим матрицу производных Фреше укорочения (5.8)

$$\mathbf{F} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left[\begin{array}{cc} \tau_0 \dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} & a_3 p_0 \dfrac{d}{d\tilde{p}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} + \dfrac{d^2\tilde{\tau}}{d\tilde{p}^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{d\sigma}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} + \sigma\dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} \end{array} \right].$$

В матрицу $\mathbf{F}$ подставим выражения (5.10), умножим результат справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+\alpha/\gamma}, \tilde{p}^{s+\beta/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+4/3}, \tilde{p}^{s+1/3}\right]$, а слева на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s-g_1/\gamma}, \tilde{p}^{-s-g_2/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s+2/3}, \tilde{p}^{-s+1/3}\right]$, где $g_i = \max_{Q\in\mathcal{S}_i}\langle Q, R\rangle$, $R \in \mathbf{U}_6$, $i = 1, 2$. В результате получим характеристическую матрицу укорочения (5.8)

$$\mathcal{N}(s) = \begin{bmatrix} \tau_0 \dfrac{9s^2+15s+4}{9} & \dfrac{a_3p_0}{3}(3s+1) \\ -\dfrac{\tilde{\tau}_0}{6}s & \dfrac{\sigma_0}{3}(3s+1)s \end{bmatrix}.$$

Определитель $\nu(s) = \det\mathcal{N}(s)$ является характеристическим полиномом укорочения (5.8), а его корни

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -\frac{1}{3}, \quad s_3 = -\frac{2}{3}, \quad s_4 = -1$$

являются собственными числами укорочения (5.8).

Теперь вычислим величину приращения степени Δ разложения (5.7) в случае нормального конуса $\mathbf{U}_6$. Аналогично случаю конуса $\mathbf{U}_1$ в системе (5.5) сделаем подстановку $\sigma = \sigma_0\tilde{p}^{4/3} + \hat{\sigma}$, $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0\tilde{p}^{1/3} + \hat{\tau}$ и получим систему уравнений $\varphi_1(\hat{\sigma}, \hat{\tau}, \tilde{p}) = 0$, $\varphi_2(\hat{\sigma}, \hat{\tau}, \tilde{p}) = 0$ с зависимыми переменными $\hat{\sigma}$, $\hat{\tau}$ и независимой переменной $\tilde{p}$. Для этой системы вычисляем носители $\mathcal{S}(\varphi_1)$ и $\mathcal{S}(\varphi_2)$, множества $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_1)$, $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_2)$ и объединение $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_1) \cup \hat{\mathcal{S}}(\varphi_1)$. В результате получаем, что величина приращения степени Δ равна $1/3$.

Таким образом, следующие члены разложения (5.7) в случае конуса $\mathbf{U}_6$ это $\sigma_1\tilde{p}^{5/3}$ и $\tilde{\tau}_1\tilde{p}^{2/3}$. Для вычисления коэффициентов σ_1 и $\tilde{\tau}_1$ подставим выражения $\sigma = \sigma_0\tilde{p} + \sigma_1\tilde{p}^{5/3}$ и $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 + \tilde{\tau}_1\tilde{p}^{2/3}$ в систему (5.5), приведём подобные члены и приравняем нулю коэффициенты при $\tilde{p}^{-1/3}$ в первом уравнении и при свободном коэффициенте во втором уравнении. Получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных σ_1 и $\tilde{\tau}_1$. Решение этой системы

$$\sigma_1 = \frac{8\sigma_0^3\tau_0 + 27(a_3p_0)^2(b_4\tau_0 + b_5p_0^2 + b_1)}{12a_3p_0\sigma_0\tau_0},$$
$$\tilde{\tau}_1 = \frac{8\sigma_0^3\tau_0 - 135(a_3p_0)^2(b_4\tau_0 + b_5p_0^2 + b_1)}{36(a_3p_0)^2\sigma_0}.$$

Аналогичным способом вычисляются остальные коэффициенты σ_j и $\tilde{\tau}_j$, $j = 2, 3, \ldots$. Так, коэффициенты σ_2 и $\tilde{\tau}_2$ являются решением системы двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} 2\tau_0 & a_3p_0 \\ -\dfrac{4\sigma_0\tau_0}{27a_3p_0} & \dfrac{2}{3}\sigma_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3a_3p_0} \begin{bmatrix} \dfrac{3a_3p_0(8\sigma_0\tilde{\tau}_1 + 9a_4\tau_0 + 9a_5p_0^2 + 9a_1) - 50\sigma_0\sigma_1\tau_0}{3} \\ a_3p_0\sigma_1\tilde{\tau}_1 - 4b_4\sigma_0\tau_0 + 4a_3b_2p_0^2\sigma_0 \end{bmatrix}$$

с ненулевым определителем матрицы в правой части уравнения.

Таким образом, получено степенное разложение однопараметрического (параметр σ_0) семейства $\mathcal{F}_6$ решений системы уравнений (5.5) при условиях (5.2$'$) и (5.9$'$). Поскольку нормальный конус $\mathbf{U}_6$ получен в результате анализа укорочения с нормальным конусом $\mathbf{U}_3$, а для конуса $\mathbf{U}_3$ имеется симметричный конус $\bar{\mathbf{U}}_3$, то заменой $(\sigma, \tilde{\tau}, x, y, z, \lambda, \xi) \leftrightarrow (-\tau, -\tilde{\sigma}, x/y, 1/y, z/y, \lambda/y, \xi/y)$ в семействе решений $\mathcal{F}_6$ получится семейство решений $\bar{\mathcal{F}}_6$.

6 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_4$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_4$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,4} &\overset{\text{def}}{=} a_3p_0\frac{d\tau}{d\tilde{p}} = 0, \\ \tilde{f}_{2,4} &\overset{\text{def}}{=} b_4\tau + (b_5p_0^2 + b_1) = 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{3,4} &\overset{\text{def}}{=} c_4p_0\tau + \big(c_5p_0^3 + c_2p_0 + c_1\big) = 0, \\ \tilde{f}_{4,4} &\overset{\text{def}}{=} d_9\tau^2 + \big(d_{12}p_0^2 + d_4\big)\tau + \big(d_{13}p_0^4 + d_{10}p_0^2 + d_2\big) = 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

при условиях (4.2$'$).

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_4$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является лучом (α, β, γ), где $\alpha = -(2+\eta)$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, $0 < \eta$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0\tilde{p}^{\alpha/\gamma} = \sigma_0\tilde{p}^{2+\eta}, \quad \tau = \tau_0\tilde{p}^{\beta/\gamma} = \tau_0 \tag{6.3}$$

являются первым приближением решения системы (1.9), то эти функции являются точным решением системы (6.1). После подстановки функций (6.3) в выражения (6.1) и (6.2) получаются равенства (4.4) и (4.5) как в случае конуса $\mathbf{U}_2$. Следовательно, значение коэффициента σ_0 произвольно, а значение коэффициента $\tau_0 = -(b_5 p_0^2 + b_1)/b_4$.

Матрица производных Фреше укорочения (6.1)

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & a_3 p_0 \dfrac{d}{d\tilde{p}} \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Так как первый столбец матрицы $\mathbf{F}$ является нулевым, то и определитель $\nu(s)$ характеристической матрицы тождественно равен 0. Следовательно, укорочения (6.1) недостаточно для вычисления разложения (1.11) в случае конуса $\mathbf{U}_4$.

Как и в случае конусов $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$ первым приближением переменной τ является константа τ_0. Поэтому для вычисления разложения введём новую зависимую переменную $\tilde{\tau} = \tau - \tau_0$, тогда $\tau = \tilde{\tau} + \tau_0$. После подстановки этого выражения для τ в уравнения (1.9) и интегралы (1.10) и учитывая (4.4), (4.5) снова получим систему уравнений (4.6) и интегралов (4.7). Но теперь для системы (4.6) алгоритмами степенной геометрии ищем степенные разложения решений вида

$$\sigma = \tilde{p}^{2+\eta}\left(\sigma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \tilde{p}^{j\Delta}\right), \quad \tilde{\tau} = \tilde{p}^{\beta}\left(\tilde{\tau}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\tau}_j \tilde{p}^{j\Delta}\right) \tag{6.4}$$

при $\tilde{p} \to 0$ и $\tilde{\tau} \to 0$, где $\tilde{\tau}_0 \neq 0$.

Теперь показатели степеней первых приближений разложений (6.4) должны удовлеворять условиям $\alpha = 2 + \eta$, $\beta < 0$. Геометрически этим условиям соответствует сектор, отмеченный на рис. 2 светло-серым цветом. С этим сектором пересекается сечение конуса в виде луча ($\mathbf{U}_9$).

6.1 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_9$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_9$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}_{1,9} &\stackrel{\text{def}}{=} a_3 p_0 \frac{d\tilde{\tau}}{d\tilde{p}} + (a_4 \tau_0 + a_5 p_0^2 + a_1) = 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_{2,9} &\stackrel{\text{def}}{=} b_4 \tilde{\tau} + 2 b_5 p_0 \tilde{p} = 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}_{3,9} &\stackrel{\text{def}}{=} c_4 p_0 \tilde{\tau} + (c_4 \tau_0 + 3 c_5 p_0^2 + c_2)\tilde{p} = 0, \\ \tilde{\tilde{f}}_{4,9} &\stackrel{\text{def}}{=} (2 d_9 \tau_0 + d_{12} p_0^2 + d_4)\tilde{\tau} + (2 d_{12} p_0 \tau_0 + 4 d_{13} p_0^3 + 2 d_{10} p_0)\tilde{p} = 0 \end{aligned} \tag{6.6}$$

при условиях (4.2′) и условиях

$$\begin{aligned}&\tau_0 a_4 + a_5 p_0^2 + a_1 \neq 0,\ b_5 \neq 0,\ c_4\tau_0 + 3c_5 p_0^2 + c_2 \neq 0,\\&2d_9\tau_0 + d_{12}p_0^2 + d_4 \neq 0,\ 2d_{12}p_0\tau_0 + 4d_{13}p_0^3 + 2d_{10}p_0 \neq 0.\end{aligned} \tag{6.6′}$$

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_9$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является вектором (α, β, γ) с координатами $\alpha = -(2+\eta)$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{p}^{\alpha/\gamma} = \sigma_0 \tilde{p}^{2+\eta}, \quad \tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p}^{\beta/\gamma} = \tilde{\tau}_0 \tilde{p} \tag{6.7}$$

являются первым приближением решения системы (4.6), то эти функции являются точным решением системы (6.5). Подстановка функций (6.7) в выражения (6.5) даёт систему уравнений

$$\begin{aligned}&a_3 p_0 \tilde{\tau}_0 + (a_4\tau_0 + a_5 p_0^2 + a_1) = 0,\\&b_4\tilde{\tau}_0 + 2b_5 p_0 = 0.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Из этой системы следует, что значение коэффициента σ_0 произвольно. Из второго уравнения этой системы можно вычислить значение $\tilde{\tau}_0 = -2b_5 p_0/b_4$. Тогда первое уравнение вместе с (4.4′) даёт зависимость параметра p_0 от остальных параметров системы.

Подстановка функций (6.7) в выражения (6.6) даёт уравнения, линейно зависимые от первого уравнения системы (6.8).

Для вычисления остальных членов разложения (6.4) в случае конуса $\mathbf{U}_9$ вычислим матрицу производных Фреше укорочения (6.5)

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & a_3 p_0 \dfrac{d}{d\tilde{p}} \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Так как первый столбец матрицы $\mathbf{F}$ является нулевым, то и определитель $\nu(s)$ характеристической матрицы тождественно равен 0. Следовательно, укорочения (6.5) недостаточно для вычисления разложения (6.4) в случае конуса $\mathbf{U}_9$.

Снова первые приближения (6.7) не являются константами, но теперь в уравнениях (4.6) и (4.7) надо сделать подстановку $\sigma = \sigma_0\tilde{p}^{2+\eta} + \tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0\tilde{p} + \tilde{\tilde{\tau}}$ и для полученной таким образом системы уравнений и её первых интегралов от новых зависимых переменных $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tilde{\tau}}$ искать алгоритмами степенной геометрии степенные разложения решений вида

$$\tilde{\sigma} = \tilde{p}^{2+\eta}\left(\tilde{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_j \tilde{p}^{j\Delta}\right), \quad \tilde{\tilde{\tau}} = \tilde{p}\left(\tilde{\tilde{\tau}}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\tilde{\tau}}_j \tilde{p}^{j\Delta}\right) \tag{6.9}$$

при $\tilde{p} \to 0$.

Аналогично случаю конуса $\mathbf{U}_8$ для системы уравнений от переменных $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tilde{\tilde{\tau}}}$ вычисляем носители и по формуле (2.1) с учётом конуса $\mathbf{U}_9$ получаем единственное укорочение

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{1,\mathbf{U}_9} &\stackrel{\text{def}}{=} a_3\tilde{p}_0\frac{d\tilde{\tilde{\tilde{\tau}}}}{d\tilde{p}} = 0, \\ \tilde{\tilde{\tilde{f}}}_{2,\mathbf{U}_9} &\stackrel{\text{def}}{=} b_4\tilde{\tilde{\tilde{\tau}}}. \end{aligned}$$

Тогда система уравнений для коэффициентов первых приближений

$$\begin{aligned} a_3\tilde{p}_0\tilde{\tilde{\tilde{\tau}}}_0 &= 0, \\ b_4\tilde{\tilde{\tilde{\tau}}}_0 &= 0, \end{aligned}$$

не имеет решений $\tilde{\tilde{\tilde{\tau}}}_0 \neq 0$.

Таким образом, в случае конуса $\mathbf{U}_9$ у системы (4.6) хотя имеются ненулевые коэффициенты σ_0, $\tilde{\tau}_0$, но степенных разложений нет. Поэтому конус $\mathbf{U}_9$ обозначен на рис. 2 чёрным пунктиром.

7 Случай нормального конуса $\mathbf{U}_5$

Нормальному конусу $\mathbf{U}_5$ соответствует укороченная система уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{1,5} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2}\tau + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tau}{d\tilde{p}}/2 = 0, \\ \tilde{f}_{2,5} &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma\frac{d^2\tau}{d\tilde{p}^2} + \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\frac{d\tau}{d\tilde{p}}/2 = 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

и укороченная система первых интегралов

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{3,5} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\tau - \sigma\frac{d\tau}{d\tilde{p}} = 0, \\ \tilde{f}_{4,5} &\stackrel{\text{def}}{=} d_1\left(\frac{d\sigma}{d\tilde{p}}\right)^2\tau + \sigma\left(\frac{d\tau}{d\tilde{p}}\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

при условии

$$d_1 \neq 0. \tag{7.2$'$}$$

Сечение нормального конуса $\mathbf{U}_5$ гиперплоскостью $\gamma = -1$ является лучом (α, β, γ), где $\alpha = -(1/2-\eta)$, $\beta = -(1/2-\eta)$, $\gamma = -1$, $0 < \eta$. Следовательно, если функции

$$\sigma = \sigma_0 \tilde{p}^{\alpha/\gamma} = \sigma_0 \tilde{p}^{\eta - 1/2}, \quad \tau = \tau_0 \tilde{p}^{\beta/\gamma} = \tau_0 \tilde{p}^{\eta - 1/2} \tag{7.3}$$

являются первым приближением решения системы (1.9), то эти функции являются точным решением системы (7.1). После подстановки функций (7.3) в выражения (7.1) получается система двух одинаковых алгебраических уравнений вида

$$(12\eta^2 - 4\eta - 1)\sigma_0\tau_0/8 = 0. \tag{7.4}$$

Выражение (7.4) обращается в равенство при условиях $\sigma_0, \tau_0 \neq 0$, $0 < \eta$, только если $\eta = 1/2$ и из всего луча сечения нормального конуса $\mathbf{U}_5$ надо рассмотреть только точку с координатами $(0, 0, -1)$. При этом коэффициенты σ_0 и τ_0 произвольны.

При подстановке функций (7.3) в выражение $\tilde{f}_{3,5}$ последнее становится равенством при любых значениях коэффициентов σ_0 и τ_0. Подстановка функций (7.3) в выражение $\tilde{f}_{4,5}$ превращает последнее в уравнение

$$(4\eta^2 - 4\eta + 1)(\sigma_0\tau_0^2 + d_1\sigma_0^2\tau_0)/4 = 0, \tag{7.5}$$

которое также является равенством при любых значениях коэффициентов σ_0 и τ_0, если $\eta = 1/2$.

Таким образом, в случае конуса $\mathbf{U}_5$ первые приближения (7.3) являются константами

$$\sigma = \sigma_0, \quad \tau = \tau_0. \tag{7.6}$$

Для вычисления остальных членов разложения (1.11) в случае конуса $\mathbf{U}_5$ вычислим матрицу производных Фреше укорочения (7.1)

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \tau\dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\tau}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{d\sigma}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} + \dfrac{d^2\sigma}{d\tilde{p}^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d\tau}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} + \dfrac{d^2\tau}{d\tilde{p}^2} & \sigma\dfrac{d^2}{d\tilde{p}^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{d\sigma}{d\tilde{p}}\dfrac{d}{d\tilde{p}} \end{bmatrix}.$$

В матрицу $\mathbf{F}$ подставим выражения (7.6), умножим результат справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{s+\alpha/\gamma}, \tilde{p}^{s+\beta/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^s, \tilde{p}^s\right]$, а слева умножим на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s-g_1/\gamma}, \tilde{p}^{-s-g_2/\gamma}\right] = \operatorname{diag}\left[\tilde{p}^{-s+2}, \tilde{p}^{-s+2}\right]$, где $g_i = \max_{Q\in\mathcal{S}_i}\langle Q, R\rangle$, $R \in \mathbf{U}_5$, $i = 1, 2$. В результате получим характеристическую матрицу укорочения (7.1)

$$\mathcal{N}(s) = \begin{bmatrix} s(s-1)\tau_0 & 0 \\ 0 & s(s-1)\sigma_0 \end{bmatrix}.$$

Определитель $\nu(s) = \det \mathcal{N}(s)$ является характеристическим полиномом укорочения (7.1), а его корни

$$s_1 = s_2 = 1, \quad s_3 = s_4 = 0$$

являются собственными числами укорочения (7.1). Наименьшее положительное собственное число равно 1.

Теперь вычислим величину приращения степени Δ разложения (1.11) в случае нормального конуса $\mathbf{U}_5$. Аналогично случаю конуса $\mathbf{U}_1$ в системе (1.9) сделаем подстановку $\sigma = \sigma_0 + \hat{\sigma}$, $\tau = \tau_0 + \hat{\tau}$ и получим систему уравнений $\varphi_1(\hat{\sigma}, \hat{\tau}, \tilde{p}) = 0$, $\varphi_2(\hat{\sigma}, \hat{\tau}, \tilde{p}) = 0$ с зависимыми переменными $\hat{\sigma}$, $\hat{\tau}$ и независимой переменной $\tilde{p}$. Для этой системы вычисляем носители $\mathcal{S}(\varphi_1)$ и $\mathcal{S}(\varphi_2)$, множества $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_1)$, $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_2)$ и объединение $\hat{\mathcal{S}}(\varphi_1) \cup \hat{\mathcal{S}}(\varphi_1)$. В этом объединении координаты всех векторов целочисленные, а наименьшее положительное собственное число равно 1. Поэтому величина $\Delta = 1$.

Таким образом, следующие члены разложения (1.11) в случае конуса $\mathbf{U}_5$ это $\sigma_1 \tilde{p}$ и $\tau_1 \tilde{p}$. Для вычисления коэффициентов σ_1 и τ_1 подставим выражения $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \tilde{p}$ и $\tau = \tau_0 + \tau_1 \tilde{p}$ в систему (1.9), приведём подобные члены и в первом и втором уравнениях приравняем нулю коэффициенты при мономе $\tilde{p}^{-1}$. Получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных σ_1 и τ_1. Решение этой системы

$$\sigma_1 - \text{произвольно}, \quad \tau_1 - \text{произвольно}.$$

Аналогичным способом вычисляются остальные коэффициенты σ_j и τ_j, $j = 2, 3, \ldots$. Так, коэффициенты σ_2 и τ_2 равны

$$\sigma_2 = \frac{1}{4} \frac{(\sigma_1 + 2a_3 p_0)\tau_1 + 2a_2\sigma_0 + 2a_4\tau_0 + 2a_5 p_0^2 + 2a_1}{\tau_0},$$
$$\tau_2 = \frac{1}{4} \frac{(\tau_1 + 2b_2 p_0)\sigma_1 + 2b_3\sigma_0 + 2b_4\tau_0 + 2b_5 p_0^2 + 2b_1}{\sigma_0}.$$

Таким образом, получено степенное разложение четырёхпараметрического (параметры σ_0, τ_0 и σ_1, τ_1) семейства $\mathcal{F}_5$ решений системы уравнений (1.9) при условии (7.2′).

8 Заключение

С помощью алгоритмов степенной геометрии, реализованных в виде отдельных компьютерных программ и функций в системе символьных вычислений

Maxima, вычислены семейства $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_6$, $\mathcal{F}_7$ четырёх степенных разложений решений модифицированной системы Н.Ковалевского. По трём решениям $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_6$, $\mathcal{F}_7$ получаются ещё три $\bar{\mathcal{F}}_1$, $\bar{\mathcal{F}}_6$, $\bar{\mathcal{F}}_7$ путём замены переменых и параметров $(\sigma, \tau, x, y, z, \lambda, \xi) \leftrightarrow (-\tau, -\sigma, x/y, 1/y, z/y, \lambda/y, \xi/y)$.

При дальнейшем анализе конуса $\mathbf{U}_7$ могут быть вычислены другие степенные разложения решений модифицированной системы Н.Ковалевского.

Список литературы

[1] *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: ГИТТЛ, 1953.

[2] *Kowalevski N.* Eine neue partikulare Losung der Differenzialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Korpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1908, B. 65, S. 528–537.

[3] *Брюно А.Д.* Анализ уравнений Эйлера-Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы. // ПММ. 2007. Т. 71. No. 2. С. 192–226.

[4] *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

[5] *Aranson A.* Computation of Collections of Correlate Faces for Several Polyhedrons. // Computer Algebra in Scientific Computing. Munchen: Techn. Univ. Munchen, 2003. P. 13–17.

[6] *Брюно А.Д.* Степенные асимптотики решений системы ОДУ. // ДАН. 2006. Т. 410. No 5. С. 583-586.

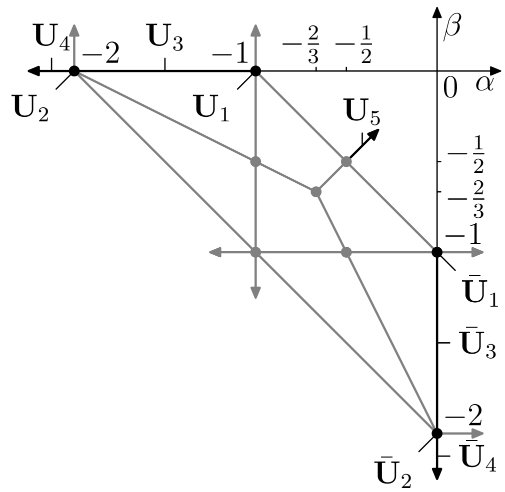

Рис. 1. Сечения нормальных конусов для (1.9) и (1.10).

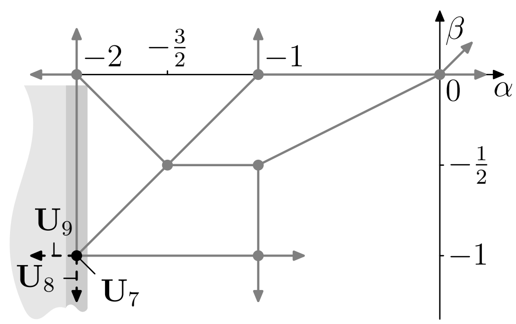

Рис. 2. Сечения нормальных конусов укорочений для (4.6) и (4.7) в случае конусов $\mathbf{U}_2$ и $\mathbf{U}_4$.

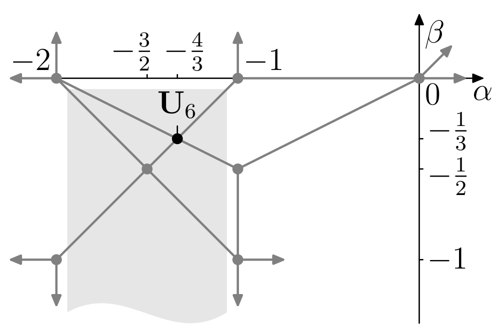

Рис. 3. Сечения нормальных конусов укорочений для (5.5) и (5.6) в случае конуса $\mathbf{U}_3$.