



Максимов Д.Ю., Марченко Н.А.,
Семилетов В.А., Томин П.Ю.

Некоторые методы
улучшения сходимости
нелинейных итераций в
численном моделировании
процессов многофазной
фильтрации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Некоторые методы улучшения сходимости нелинейных итераций в численном моделировании процессов многофазной фильтрации / Д.Ю.Максимов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 44. 18 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-44>

Российская академия наук
Ордена Ленина
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша

Д. Ю. Максимов, Н. А. Марченко, В. А. Семилетов,
П. Ю. Томин

**Некоторые методы улучшения сходимости
нелинейных итераций в численном моделировании
процессов многофазной фильтрации**

Москва 2010

Д. Ю. Максимов, Н. А. Марченко, В. А. Семилетов, П. Ю. Томин, Некоторые методы улучшения сходимости нелинейных итераций в численном моделировании процессов многофазной фильтрации.

Аннотация. Работа посвящена рассмотрению некоторых типичных проблемных ситуаций, возникающих при численном решении уравнений многофазной многокомпонентной фильтрации с использованием неявной аппроксимации по времени. Описаны подходы, позволяющие в ряде случаев улучшить сходимость нелинейных итераций. Представлены результаты тестирования на задачах, входящих в систему тестов *Society of Petroleum Engineers*.

D. Yu. Maksimov, N. A. Marchenko, V. A. Semiletov, P. Yu. Tomin, Some nonlinear convergence improving approaches in numerical simulation of multiphase flow problems.

Abstract. The paper discusses some typical issues appearing in numerical simulation of multicomponent multiphase flow problems using fully implicit time approximation schemes. Some approaches improving nonlinear iterations convergence are described. The results of testing using *Society of Petroleum Engineers* test cases are presented.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00823).

Содержание

Содержание	2
Введение	3
Постановка задачи.....	4
Метод Ньютона.....	6
Причины отсутствия или замедления сходимости нелинейных итераций.....	8
Слайн-интерполяция	10
Проблема смены шаблона на итерациях.....	13
Ограничение приращений.....	14
Заключение	17
Литература	18

Введение

Процессы многофазной фильтрации сжимаемых флюидов в пористых средах описываются системой нелинейных уравнений, представляющих собой законы сохранения массы, дополненные уравнениями состояния. Для связи между вектором скорости фазы и градиентом порового давления, как правило, используется закон Дарси, в обобщенной форме включающий функцию относительной фазовой проницаемости, измеряемую экспериментально. Также в лабораторных экспериментах получают уравнения состояния флюидов, например, зависимости плотности от давления. Как следствие, данные функции оказываются заданными в табличном виде, в результате чего возникает проблема интерполяции исходных данных.

Уравнения системы не могут быть отнесены ни к параболическому, ни к гиперболическому типу, однако обладают свойствами как того, так и другого [1]. В силу этого может быть введено число Куранта, определяющее ограничения, налагаемые на шаг по времени при явной аппроксимации, например, в схеме типа IMPES [2]. Оказывается, что в практических задачах этот шаг может оказаться неприемлемо малым. Чтобы избежать данной проблемы, используется неявная по времени разностная схема. Независимо от метода пространственной аппроксимации, в результате получается система нелинейных уравнений. Индустриальным стандартом решения таких систем является метод Ньютона. Это связано с достаточно высоким порядком сходимости метода, что позволяет эффективно решать нелинейные системы большой размерности.

Нужно иметь в виду то обстоятельство, что существует ряд особенностей в постановке задачи, которые затрудняют сходимость итераций. Эти особенности можно условно разделить на физические и обусловленные выбором математической модели процесса, которые, например, могут быть связаны с разрывами производных функций, входящих в систему, и связанные с выбранной дискретизацией уравнений. К последним, в частности, относится выбор неизвестных в заданном шаблоне по принципу up-wind для достижения устойчивости схемы.

Возвращаясь к затронутой проблеме интерполяции, следует отметить, что влияние на скорость сходимости оказывают негладкие коэффициенты, полученные линейной интерполяцией таблично заданных функций. Тогда как

гладкие коэффициенты в уравнениях обеспечивают быструю квадратичную сходимость метода Ньютона.

В общем случае, в силу сложности уравнений, получаемых с использованием полностью неявных схем, метод Ньютона для заданного шага по времени может разойтись, в частности, в силу того что не выполнены условия теоремы о сходимости. Одним из наиболее универсальных способов решения данной проблемы является метод ограничения приращений вектора неизвестных на нелинейных итерациях.

Ниже более подробно обсуждаются особенности применения метода Ньютона для решения рассматриваемых систем и некоторые способы повышения скорости и стабильности сходимости нелинейных итераций.

Постановка задачи

Рассматриваются процессы подземной многофазной фильтрации в рамках модели черной нефти (Black Oil), описанной, например, в работе [3]. Конкретная математическая постановка и используемая разностная схема подробно изложены в работе [4].

Уравнения массового баланса и замыкающие соотношения для модели трехфазной трехкомпонентной фильтрации имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(m\rho_w S_w) + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{u}_w) &= q_w^M, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left[m(C_{oL}\rho_L S_L + C_{oG}\rho_G S_G)\right] + \operatorname{div}(C_{oL}\rho_L \mathbf{u}_L + C_{oG}\rho_G \mathbf{u}_G) &= q_o^M, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left[m(C_{gL}\rho_L S_L + C_{gG}\rho_G S_G)\right] + \operatorname{div}(C_{gL}\rho_L \mathbf{u}_L + C_{gG}\rho_G \mathbf{u}_G) &= q_g^M, \\ P_L - P_w &= P_{cow}(S_w), \quad P_G - P_L = P_{cgo}(S_G), \\ S_w + S_L + S_G &= 1, \\ \mathbf{u}_\alpha &= -\hat{K} \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla P_\alpha - \mathbf{g} \cdot \rho_\alpha), \\ \sum_{j=o,g} C_{j\alpha} &= 1, \quad \alpha = L, G. \end{aligned}$$

Здесь

$j = w, o, g$ — компоненты: вода, и две углеводородные фракции, тяжелая и легкая, именуемые сокращенно нефть и газ;

$\alpha = W, L, G$ — фазы: вода, жидкая и газообразная фазы углеводородной смеси;

P_α, S_α — поровые давления и насыщенности (объёмные концентрации) фазы α ;

m — пористость;

$\rho_{L,G}$ — плотности жидкой и газообразной углеводородной фазы как смесей двух углеводородных компонент без учёта пористости и водонасыщенности (как если бы не было скелета породы и воды); ρ_W — плотность воды;

$C_{j\alpha}$ — массовые концентрации углеводородной компоненты j ($j = o, g$) в фазе α ;

$\mathbf{u}_\alpha$ — скорость фазы α ;

q_j^M — функции массовых источников компонента флюида j ;

P_{cow}, P_{cgo} — капиллярные давления.

Определяющие соотношения:

$\hat{K}$ — абсолютная проницаемость, являющаяся, вообще говоря, полным симметричным тензором;

$\mu_\alpha, k_{r\alpha}$ — вязкость и относительная проницаемость фазы α ;

$\mathbf{g} = (0, 0, g_z) = g_z \cdot \mathbf{e}_z$ — гравитационный фактор;

$g_z = 9.8 \text{ м/с}^2$ — нормальное ускорение силы тяжести.

В качестве основных неизвестных выберем P — давление нефти, S — насыщенность воды, C — массовая концентрация газовой компоненты в углеводородной смеси.

Кратко опишем функций источников q_j^M , входящих в правую часть уравнений. Формула массового притока фазы α в случае диагонального тензора проницаемости для вертикальной скважины имеет следующий вид [5]:

$$q_\alpha^M = -2\pi h \frac{K \cdot k_{r\alpha} \cdot \rho_\alpha}{\mu_\alpha} \frac{P - P_{BH} - H}{\ln r_{eff} / r_{well}},$$

h — эффективная толщина ячейки, $K = \sqrt{k_x k_y}$ — абсолютная проницаемость, P — давление в ячейке, P_{BH} — забойное давление, H — гравитационный

член, r_{eff} — эффективный радиус (расстояние от оси скважины, на котором давление равно P), r_{well} — радиус скважины.

При аппроксимации исходная система может быть записана в виде

$$\begin{cases} H_w = \hat{m}\hat{\rho}_w\hat{S} - \tau(q_w^M(P, S) - F_w(P, S)) + m\rho_w S = 0, \\ H_{HC} = \hat{m}(1 - \hat{S})\hat{\rho}_{HC} - \tau(q_o^M(P, S, C) + q_g^M(P, S, C) - F_o(P, S, C) - F_g(P, S, C)) + \\ + m(1 - S)\rho_{HC} = 0, \\ H_g = \hat{m}(1 - \hat{S})\hat{C}\hat{\rho}_{HC} - \tau(q_g^M(P, S, C) - F_g(P, S, C)) + m(1 - S)C\rho_{HC} = 0; \end{cases}$$

$\hat{\rho}_{HC}$ — плотность углеводородной смеси.

В выписанном виде система имеет единообразную форму для двухфазных случаев: вода-нефть и вода-газ.

Введены обозначения аппроксимаций

$$\begin{aligned} F_w(P, S) &= \langle \operatorname{div} A_w(P, S) \rangle_\Omega, \\ F_o(P, S, C) &= \langle \operatorname{div} A_o(P, S, C) \rangle_\Omega, \\ F_g(P, S, C) &= \langle \operatorname{div} A_g(P, S, C) \rangle_\Omega, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_w &= \rho_w \mathbf{u}_w, \\ A_o &= (1 - C_L)\rho_L \mathbf{u}_L + (1 - C_G)\rho_G \mathbf{u}_G, \\ A_g &= C_L\rho_L \mathbf{u}_L + C_G\rho_G \mathbf{u}_G. \end{aligned}$$

В силу существенной нелинейности полученной системы, для ее решения стандартно используется метод Ньютона.

Метод Ньютона

Напомним кратко суть метода. Пусть имеется система нелинейных уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0.$$

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — отображающий оператор из линейного нормированного пространства H на линейное нормированное пространство Y . $\|\cdot\|_H$ и $\|\cdot\|_Y$ — нормы в этих пространствах. Производной оператора назовем величину $\mathbf{F}'$,

удовлетворяющую условию $\|\mathbf{F}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}\|_Y = o(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_H)$ при $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_H \rightarrow 0$.

Этому условию удовлетворяет оператор вида $\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right)$.

В предположении, что оператор $\mathbf{F}'$ обратим, итерационный процесс можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}^n))^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^n).$$

Имеет место следующая теорема о сходимости метода Ньютона [6].

Теорема. Пусть $\Omega_a = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{X}\|_H < a\}$. Пусть при некоторых a , a_1 , a_2 , $a > 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 < \infty$, выполнены условия

$$\|(\mathbf{F}'(\mathbf{X}))^{-1}\|_Y \leq a_1 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in \Omega_a,$$

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_2) - \mathbf{F}'(\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\|_Y \leq a_2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_H^2$$

при $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \Omega_a$. Обозначим $c = a_1 a_2$, $b = \min(a, c^{-1})$. Пусть $\mathbf{X}$ — решение уравнения $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$. Тогда при выборе начального приближения $\mathbf{x}^0 \in \Omega_b$ итерационный процесс Ньютона сходится с оценкой погрешности

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{X}\|_H \leq c^{-1} \left(c \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{X}\|_H \right)^{2^n}.$$

Таким образом, при соблюдении указанных выше необходимых условий, итерации сходятся квадратично, что, вообще говоря, является критерием правильности реализации алгоритма.

Применительно к полученной в предыдущем пункте системе метод Ньютона кратко будет иметь следующий вид

$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}^n) \delta \mathbf{x} = -\mathbf{H}(\mathbf{x}^n), \quad \delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n$$

$\Updownarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_w}{\partial P} & \frac{\partial H_w}{\partial S} & \frac{\partial H_w}{\partial C} \\ \frac{\partial H_{HC}}{\partial P} & \frac{\partial H_{HC}}{\partial S} & \frac{\partial H_{HC}}{\partial C} \\ \frac{\partial H_g}{\partial P} & \frac{\partial H_g}{\partial S} & \frac{\partial H_g}{\partial C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P \\ \delta S \\ \delta C \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} H_w(P^n, S^n, C^n) \\ H_{HC}(P^n, S^n, C^n) \\ H_g(P^n, S^n, C^n) \end{pmatrix}.$$

Причины отсутствия или замедления сходимости нелинейных итераций

Существует ряд факторов, замедляющих сходимость итерационного метода, либо приводящих к его расходимости при отсутствии специальных ограничений вектора приращений. Обозначим такие проблемные ситуации.

- *Несоблюдение условий теоремы о сходимости*

Очевидно, что сходимость не гарантируется в случае, если условия теоремы не выполняются. Что касается скорости сходимости, то на практике оценка констант, входящих в ограничения теоремы весьма затруднительна. Поэтому гораздо чаще используются полуэмпирические методы улучшения сходимости.

- *Относительные фазовые проницаемости (ОФП)*

Следует отметить, что функции относительных фазовых проницаемостей, а также PVT-свойств в практических расчетах задаются в виде таблиц. Линейная интерполяция между заданными точками приводит к кусочно-постоянным производным. Сходимость может портиться при переходе между неподвижным и подвижным состоянием флюида, так как производная функции относительной фазовой проницаемости от насыщенности в данном случае разрывна. Кроме того, часто производные функций относительных фазовых проницаемостей являются заметно немонотонными функциями в силу значительной крутизны исходных кривых, что может привести к неравномерным величинам производных, входящих в матрицу Якоби. Ухудшение обусловленности матрицы приводит к проблемам при ее обращении, которые в свою очередь могут ухудшить качество получаемого решения, что также замедляет сходимость нелинейного метода.

- *Фазовые переходы*

В случае многофазной многокомпонентной фильтрации возможны фазовые переходы компонентов между фазами. Это приводит к разрывам производных функций плотности и вязкости на границах фазовых переходов.

- *Предельный градиент*

Проблемы, аналогичные описанным для относительных фазовых проницаемостей, могут иметь место при учете эффекта порогового градиента сдвига. Фаза остается неподвижной вплоть до достижения градиентом давления некоторого порогового значения, после которого справедлив линейный закон Дарси.

- *Смена шаблона на итерациях*

Для аппроксимации насыщенности в функциях относительных фазовых проницаемостей, как правило, используется простейшая схема сноса против потока. Это приводит к тому, что из-за изменения на итерациях поля давления меняются направления потоков и, как следствие, набор неизвестных, относящихся к насыщенности. Естественно, такие изменения приводят к ухудшению сходимости нелинейных итераций.

- *Смена режимов работы скважин*

В прикладных расчетах закладываются два основных режима работы скважин. Первый — управление по дебиту Q , второй — управление по забойному давлению P_{BH} . На скважинах задаются два ограничения: максимальный дебит и предел по забойному давлению. При достижении этого предела скважина переходит с первого режима работы на второй. Математически это выражается в изменении функциональной зависимости в выражении для источника, как следствие меняется оператор $\mathbf{F}$. Для получения корректного результата необходимо учитывать этот момент в процессе нелинейных итераций, что негативно влияет на скорость сходимости.

- *Смена направления потока на скважинах*

Выражения для потока, втекающего в скважину и вытекающего из нее, вообще говоря, имеют различный вид. Этот факт может привести к проблемам, аналогичным описанным выше.

Перечислим рассматриваемые в настоящей работе пути решения некоторых из обозначенных выше проблем:

- *Сплайн-интерполяция*

Для улучшения свойств гладкости функций и их производных можно использовать сплайн-интерполяцию между точками исходной таблицы. Ниже формулируются необходимые условия, которым должны удовлетворять интерполяции таблично заданных функций и обсуждаются результаты расчетов, полученные с использованием построенных гладких функций в сравнении с традиционной кусочно-линейной интерполяцией.

- *Ограничение приращений неизвестных*

На основании условий теоремы о сходимости метода Ньютона в практических расчетах успешно применяются полуэмпирические методы, общим принципом которых является ограничение на приращение

неизвестной в процессе итерации. Некоторые из этих методов более подробно будут рассмотрены ниже.

Сплайн-интерполяция

Опишем метод аппроксимации сплайнами для интерполяции функций относительных фазовых проницаемостей.

Наложим следующие естественные требования к получаемой в результате функции:

1. Функция должна проходить через исходно заданные в таблице точки.
2. Функция должна сохранять монотонность.
3. Функция должна быть гладкой, то есть иметь непрерывную производную.

Типичный вид таблиц функций ОФП позволяет ограничиться классом полиномиальных функций, у которых с учетом требований минимальная степень многочлена равна трем.

Алгоритм построения сплайна выбранного типа аналогичен методам, описанным в работах [7] и [8]. Здесь подробно приведен его вывод для выбранного класса функций.

Пусть в некоторых точках x_i заданы значения функции $f_i, i=1..n$. Требуется построить сплайн третьей степени, сохраняющий монотонность функции, принимающий в точках x_i значения f_i . Обозначим $\Delta x_i = x - x_i$. Будем искать функцию в виде

$$f(x) = f_i + \Delta x_i \left[d_i^{(1)} + \Delta x_i \left(d_i^{(2)} + \Delta x_i d_i^{(3)} \right) \right]$$

Положим

$$\begin{aligned} h_i &= x_{i+1} - x_i, i=1..n-1, \\ \Delta_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, i=1..n-1, \\ h_n &= h_{n-1}, \\ \Delta_n &= \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}. \end{aligned}$$

Искомые параметрами являются величины $d_i^{(1)}, d_i^{(2)}, d_i^{(3)}$.

Внутри отрезка «первую производную» $d_i^{(1)}$ будем считать как линейную комбинацию взвешенных правых и левых численных производных:

$$d_i^{(1)} = \Delta_{i-1} \frac{h_i}{h_i + h_{i-1}} + \Delta_i \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}, i = 2..n-1.$$

На границах с каждой стороны по крайним трем точкам строим параболу и считаем производную

$$d_1^{(1)} = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} + \frac{f_1 - f_3}{x_1 - x_3} - \frac{f_2 - f_3}{x_2 - x_3},$$

$$d_n^{(1)} = -\frac{f_{n-2} - f_{n-1}}{x_{n-2} - x_{n-1}} + \frac{f_{n-2} - f_n}{x_{n-2} - x_n} - \frac{f_{n-1} - f_n}{x_{n-1} - x_n}.$$

Если парабола загибается не в ту сторону, полагаем производную равной нулю: если $d_1^{(1)}\Delta_1 \leq 0$, то $d_1^{(1)} = 0$. Аналогично, если $d_n^{(1)}\Delta_n \leq 0$, то $d_n^{(1)} = 0$.

Если $\Delta_i = 0$, то одно из условий монотонности: $d_i^{(1)} = 0, d_{i+1}^{(1)} = 0$, $d_i^{(2)} = 3\frac{\Delta_i}{h_i}, d_i^{(3)} = -2\frac{\Delta_i}{h_i^2}$, таким образом функция на отрезке будет постоянной.

В остальных случаях

$$d_i^{(2)} = -\frac{\Delta_i}{h_i} \left(\frac{2d_i^{(1)} + d_{i+1}^{(1)}}{\Delta_i} - 3 \right), d_i^{(3)} = 6\frac{\Delta_i}{h_i^2} \left(\frac{d_i^{(1)} + d_{i+1}^{(1)}}{\Delta_i} - 2 \right), i = 1..n-1.$$

В последней точке используем линейную экстраполяцию

$$d_n^{(1)} = d_{n-1}^{(1)} + h_{n-1} \left[d_{n-1}^{(2)} + \frac{h_{n-1}d_{n-1}^{(3)}}{2} \right], d_n^{(2)} = 0, d_n^{(3)} = 0.$$

Покажем монотонность построенного сплайна. Необходимое условие монотонности

$$\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0.$$

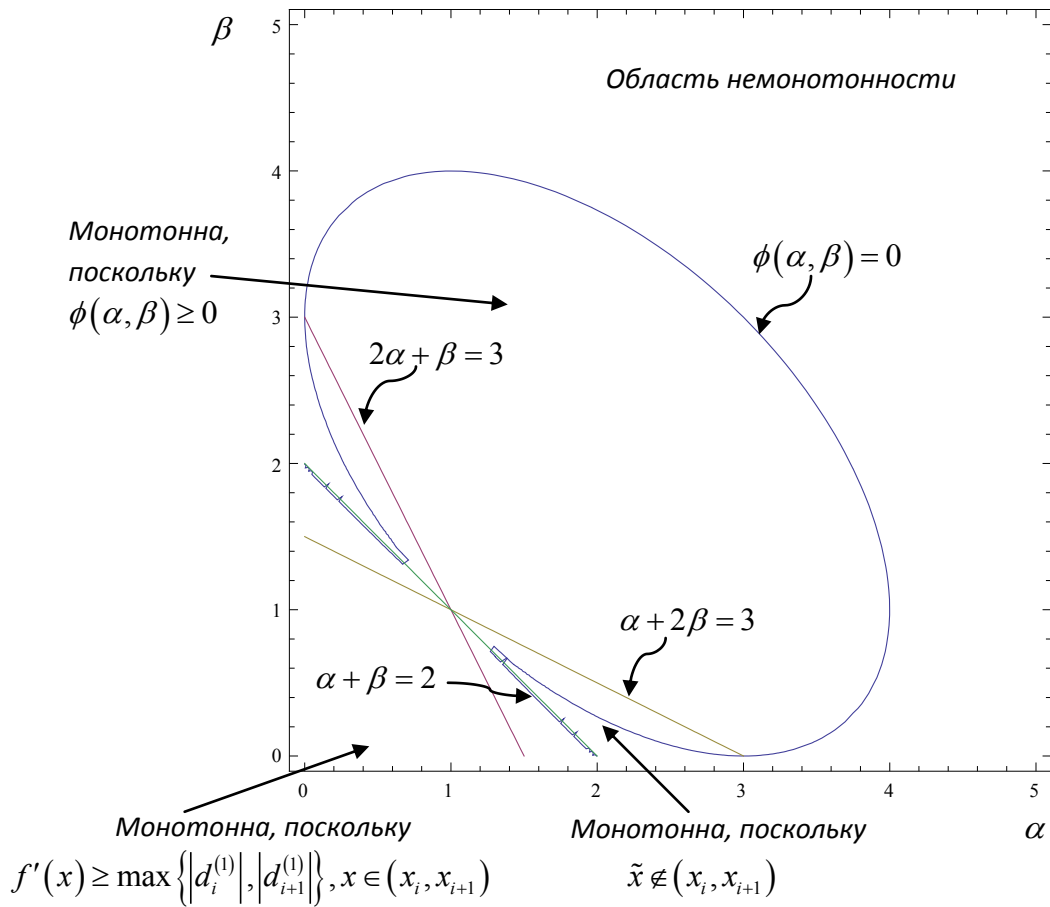
В силу того, что производная — полином второй степени, монотонность функции зависит от значения производной в точке ее экстремума

$$\tilde{x} = x_i + \frac{h_i}{3} \frac{2\alpha + \beta - 3}{\alpha + \beta - 2} \quad (\alpha + \beta \neq 2)$$

$$f'(\tilde{x}) = \phi(\alpha, \beta)\Delta_i,$$

$$\phi(\alpha, \beta) = \alpha - \frac{1}{3} \frac{(2\alpha + \beta - 3)^2}{\alpha + \beta - 2}.$$

Графически область монотонности изображена на рисунке ниже.



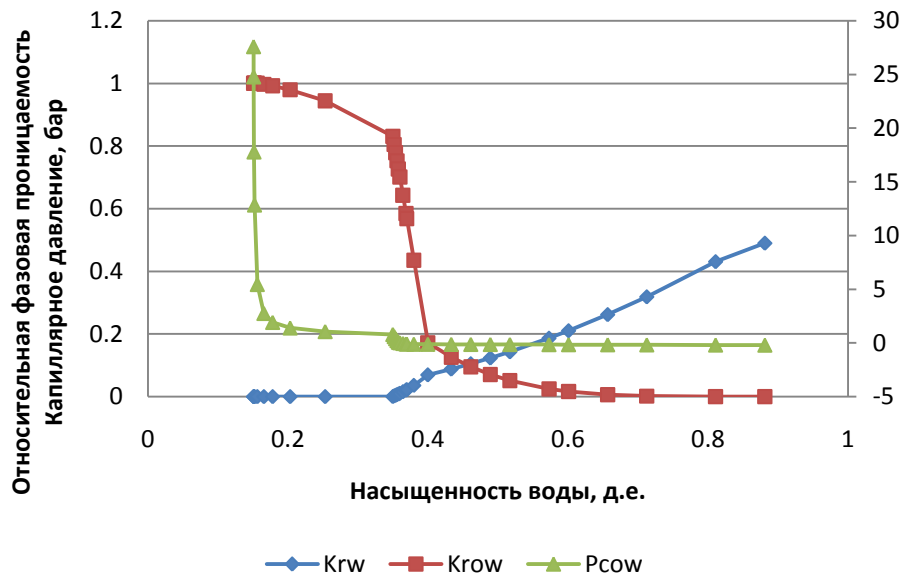
Окончательно имеем область монотонности Ω , ограниченную кривой $\phi(\alpha, \beta) = 0$ и координатными осями. Пусть ω — подмножество множества Ω . В случае если $(\alpha, \beta) \notin \omega$, проводится следующая корректировка: подбирается наибольшее значение параметра τ , такое чтобы $(\tau\alpha, \tau\beta) \in \omega$, и полагается $d_i^{(1)} = \tau d_i^{(1)}, d_{i+1}^{(1)} = \tau d_{i+1}^{(1)}$. Ситуация, когда $\alpha < 0$ и $\beta < 0$, соответствует немонотонным данным и должна быть диагностирована заранее.

Выбор множества ω неоднозначен, в приведенных ниже расчетах оно имело вид $\omega = \{\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta < 3\}$, таким образом критерий монотонности строго соблюдался.

Для сравнения эффективности использования сплайн-интерполяции были проведены два расчета:

- с использованием линейной интерполяции функций и кусочно-постоянной интерполяции производных между заданными узлами;
- с использованием описанной сплайн-интерполяции.

Оценка проводилась на тестовой задаче *SPE9* [9]. Задача характеризуется сложной формой кривых относительных фазовых проницаемостей и функций PVT-свойств. Для иллюстрации ниже приведены графики относительных фазовых проницаемостей (K_{rw} , K_{ro}) и капиллярного давления в системе вода-нефть (P_{cow}) для случая (а).



Среднее число нелинейных итераций на один шаг по времени для первого варианта составило 5.8 при среднем шаге по времени 3.614 суток. В случае сплайн-интерполяции среднее число нелинейных итераций уменьшилось до 4.9, при этом средний шаг удалось увеличить до 13.636 суток. Общее время счета задачи сократилось в 2.6 раз.

Отметим, что использование построенной аппроксимации для других зависимостей, например PVT-свойств, также приемлемо, поскольку к интерполяции этих величин предъявляются аналогичные требования.

Проблема смены шаблона на итерациях

В качестве примера рассматривается влияние up-wind'a на скорость сходимости. В аппроксимации уравнений рассмотрим аппроксимацию потока

$$\frac{k(S)\rho K}{\mu}(\nabla P - g\rho\nabla z).$$

Величину в скобках можно условно назвать градиентом напора и обозначить через $\nabla\Phi$.

В зависимости от направления градиента напора, в аппроксимацию $k(S)$ входит значение насыщенности в той ячейке, где напор больше.

Далее, в очередном приближении метода Ньютона направление $\nabla\Phi$ может измениться, а значит, решаемое уравнения перестроится. Вообще говоря, метод Ньютона в этом случае может вообще не сойтись или заикнуться.

В данной ситуации обеспечить сходимость может внесение поправок к выбранной схеме, по которым направления up-wind'a будет по возможности сохраняться. В частности, ряд численных экспериментов показывает, что следует не менять направление up-wind'a, если:

1) градиент напора изменил направление, но по абсолютной величине уменьшился в N_Φ раз;

2) приращение насыщенности данной фазы достигло заданной точности метода Ньютона.

Значение N_Φ подбирается экспериментально. В результате многочисленных расчетов было подобрано значение $N_\Phi = 100$.

Ограничение приращений

Как отмечалось выше, вид функционала может существенно меняться в процессе итераций. Поэтому целесообразно ограничивать изменения неизвестных за одну нелинейную итерацию, с тем чтобы оставаться в зоне сходимости метода.

Метод, основанный на данном утверждении, был впервые применен для задач многофазной фильтрации в 1980 году Эппльярдом (Appleyard) [10] и в литературе получил название *Appleyard chop* (см., например, [11]).

Одними из параметров, характеризующих доверительную зону изменения неизвестных, являются особые точки. Для насыщенности это так называемые критические точки S_{cr} , при переходе через которые фаза становится подвижной. Пусть S — значение насыщенности на предыдущей итерации, $\hat{S}$ — полученное на текущей. Предложенный Эппльярдом метод для этой ситуации имеет следующий вид [12]. На каждой итерации, локально, ячейка за ячейкой при переходе от неподвижного к подвижному состоянию: $S \leq S_{cr}$, $\hat{S} > S_{cr}$, значение приращения насыщенности масштабируется так, чтобы оказаться в слабо подвижном состоянии: $\hat{S} = S_{cr} + \varepsilon$. При обратном переходе из подвижного состояния в неподвижное: $S > S_{cr}$, $\hat{S} \leq S_{cr}$, приращение выбирается таким образом, чтобы сохранить фазу в подвижном

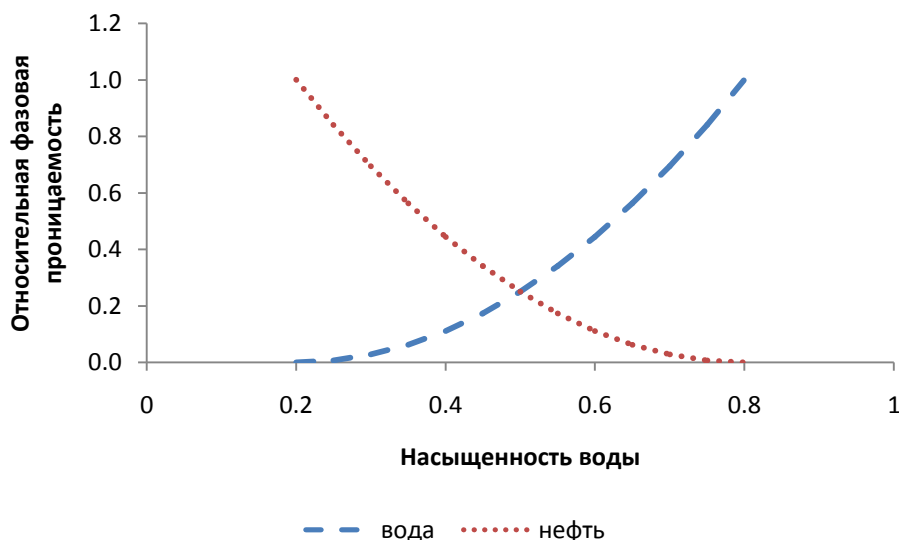
состоянии на протяжении некоторого количества итераций: $\hat{S} = S_{cr} + \varepsilon$, $NI \leq NI_{cr}$, где NI — номер нелинейной итерации. Здесь ε — некоторое малое значение, подбираемое экспериментально, число NI_{cr} также выбирается эмпирически.

В дополнение к описанному методу на практике часто применяется простое ограничение на величину приращения насыщенности в ячейке за одну итерацию. Максимально допустимое приращение подбирается экспериментально. Аналогичная методика может применяться и для ограничения приращения давления, особенно в случаях моделирования закачки больших объемов флюида в пласт.

Перечисленные методики протестированы на задаче, полученной из теста *SPE10* [13]. Из исходной модели вырезан один слой. Размеры модели — 60x220x1 ячеек.

Особенностью задачи является сильно неоднородное поле проницаемости и большие дебиты скважин (суточная добыча или закачка сравнимы с поровыми объемами ячеек), что приводит к быстрому, то есть на несколько ячеек за один временной шаг порядка месяца, продвижению фронта насыщенности, приобретающего сложную форму. Использование ограничения на приращение оказывается необходимым при расчете с шагами, не удовлетворяющими критерию Куранта.

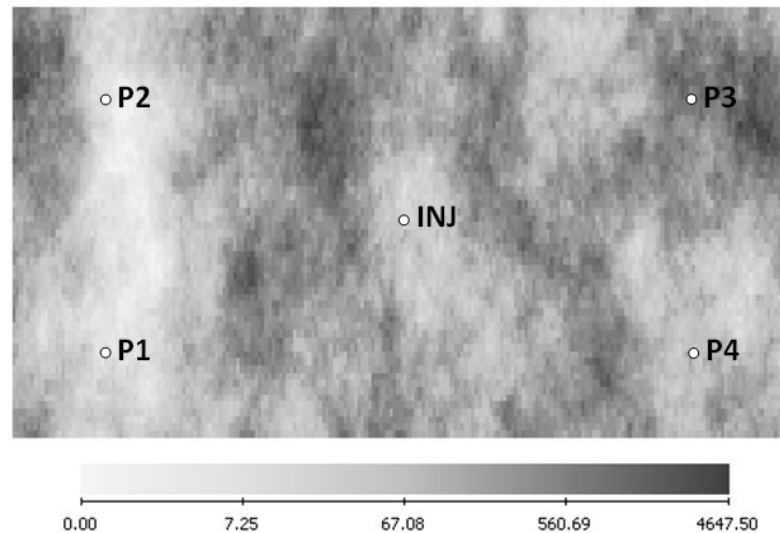
Кривые относительных фазовых проницаемостей изображены ниже.



На нагнетательной скважине (INJ) задавалась приемистость воды равной 100 м³/сут, при этом контролировалось ограничение на максимум

забойного давления, равное 700 бар. Добывающие скважины (P1–P4) работают с фиксированным забойным давлением, равным 275 бар.

На рисунке ниже представлено поле проницаемости и конфигурация скважин.



Для оценки эффективности алгоритма будем использовать число нелинейных итераций на каждом шаге по времени.

В первой серии расчетов задавался фиксированный шаг по времени $\tau_1 = 2.5$ суток.

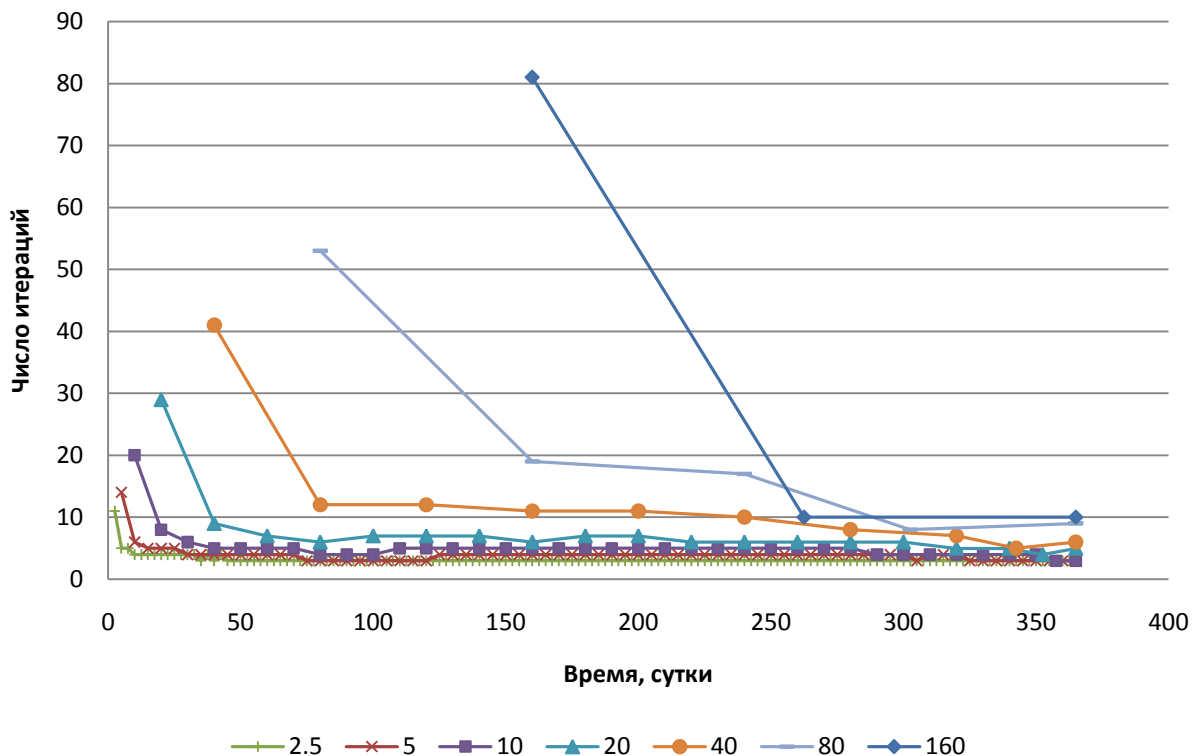
В варианте без модификации вектора приращений с заданным шагом $\tau_1 = 2.5$ суток расходятся нелинейные итерации. Далее рассматривались два варианта модификации расчетной схемы:

1. ограничение приращения по критическим точкам;
2. фиксированное ограничение приращения.

Среднее число итераций за расчет годового периода для вариантов 1 и 2 составило 4.2 и 3.2 соответственно.

При увеличении шага по времени до $\tau_2 = 5.0$ суток счет идет только при использовании метода фиксированного ограничения приращения. Среднее число нелинейных итераций в этом случае составило 3.9 за расчет года разработки.

Количество итераций в зависимости от времени для различных величин временных шагов представлено на графике ниже.



Метод фиксированного ограничения приращения позволяет получить стабильную сходимость даже при шаге по времени, равном 365 суток, первый шаг потребовал 89 нелинейных итераций.

Заключение

Сформулированы проблемные ситуации, возникающие при использовании метода Ньютона для решения систем уравнений, описывающих процессы подземной многофазной фильтрации. Рассмотрены методы улучшения сходимости за счет аппроксимации таблично заданных функций сплайнами необходимой гладкости, а также метод ограничения приращений на итерациях, позволяющий добиться сходимости даже при шагах по времени, значительно превышающих время, определяемое критерием Куранта. Показана эффективность предложенных методов на примере расчета тестовых задач, опубликованных *Society of Petroleum Engineers*. Следует отметить, что методы, затронутые в работе, имеют универсальный характер и могут быть легко обобщены на другие задачи математической физики.

Авторы благодарят А. Х. Пергамент за неоценимую помощь при подготовке данной работы.

Литература

1. Ю. Б. Радвогин, Характеристические свойства уравнений двухкомпонентной фильтрации. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша №37, 2001.
2. A. Kh. Pergament, S. B. Popov, The Godunov Predictor–Corrector Method and Non-Isothermal MKT Reservoir Simulator. Proceedings of ECMOR-X, B021, 2006.
3. K. Aziz, A. Settari, Petroleum Reservoir Simulation, Applied Science Publishers, London, England, 1979.
4. Н. А. Марченко, А. Х. Пергамент, С. Б. Попов, В. А. Семилетов, П. Ю. Томин, Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задач многофазной фильтрации. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша № 97, Москва, 2008.
5. D. W. Peaceman, Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation. Soc. Petrol. Eng. Journal, V. 18, N. 3, P. 183–194, 1978.
6. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, Численные методы. Москва, БИНОМ, 2004.
7. F. N. Fritsch, R. E. Carlson, Piecewise Cubic Interpolation Methods. The Department of Energy's (DOE) Information Bridge: DOE Scientific and Technical Information, November 1978.
8. J. M. Hyman, Accurate monotonicity preserving cubic interpolation. SIAM J. Sci. Stat. Comput., V. 4, N. 4, December 1983.
9. J. E. Killough, Ninth SPE Comparative Solution Project: A Reexamination of Black-Oil Simulation. SPE 29110, 1995.
10. P. F. Naccache, A Fully-Implicit Thermal Reservoir Simulator. SPE 37985, 1997.
11. Geoquest, Schlumberger, ECLIPSE Technical Description 2007.1. P. 956.
12. R. M. Younis, H. Tchelepi, K. Aziz, Adaptively-localized-continuation-Newton; Reservoir Simulation Nonlinear Solvers that Converge All the Time. Proceedings of XI European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, A10, 2006.
13. M. A. Christie, M. J. Blunt, Tenth SPE Comparative Solution Project: A Comparison of Upscaling Techniques. SPE 66599, 2001.