[ИПМ им.М.В.Келдыша РАН](http://keldysh.ru/) • [Электронная библиотека](http://library.keldysh.ru/)

[Препринты ИПМ](http://library.keldysh.ru/preprints/) • [Препринт № 23 за 2010 г.](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-23)

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Брюно А.Д., Батхин А.Б.,
Варин В.П.**

Вычисление множеств устойчивости в многопараметрических задачах

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Брюно А.Д., Батхин А.Б., Варин В.П. Вычисление множеств устойчивости в многопараметрических задачах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 23. 22 с.
URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-23**

Публикации по материалам препринта

Батхин А.Б., Брюно А.Д. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых задач // Вестник ННГУ им. Н. И. Лобачевского. 2011. 4. часть 2. С. 57-58. ISSN 1993-1778.

Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76, № 1. С. 80-133. ISSN 0032-8235.

Batkhin A.B., Bruno A.D., Varin V.P. Stability sets of multiparameter Hamiltonian systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76, no. 1. Pp. 56-92. ISSN 0021-8928.
DOI: **10.1016/j.jappmathmech.2012.03.006**
URL: **http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892812000329**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно, А. Б. Батхин, В. П. Варин

ВЫЧИСЛЕНИЕ МНОЖЕСТВ УСТОЙЧИВОСТИ В МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Москва, 2010 г.

УДК 512.77+531.36

А. Д. Брюно, А. Б. Батхин, В. П. Варин. Вычисление множеств устойчивости в многопараметрических задачах. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Продолжено исследование устойчивости линейной системы Гамильтона, описывающей динамику в одной гироскопической задаче. Это система с четырьмя степенями свободы и с постоянными коэффициентами, зависящими от трех параметров. Изучена устойчивость этой системы в случае нулевых собственных чисел. Получены неравенства, эффективно выделяющие множество устойчивости в пространстве параметров. Рассмотрен альтернативный способ выделения множества устойчивости с использованием техники инноров. Также исследовано обобщение задачи для случая четырех параметров.

A. D. Bruno, A. B. Batkhin, V. P. Varin. Computation of the sets of stability in multiparameter problems. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

We continue our investigation of stability of the linear Hamiltonian system which describes the dynamics in a gyroscopic problem. The system has four degrees of freedom and constant coefficients depending on three parameters. We study stability of the system in the case of zero eigenvalues. We obtaine inequalities which effectively isolate the set of stability in the space of parameters. An alternative way of isolation of the set of stability with the innor's technic is considered. The generalization of the problem on the case of four parameters is considered as well.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 08-01-00082.

E-mails: abruno@keldysh.ru, batkhin@gmail.com, varin@keldysh.ru
сайт: www.keldysh.ru

Этот препринт написан как продолжение препринтов [1, 2], поэтому все ссылки на формулы с номерами $(a.b)$ и на теоремы $a.b$, где $a < 4$, относятся к препринту [1], а для $a = 4$ — к препринту [2]. В силу ограниченного объема препринтов авторам не удалось в указанных выше работах осветить многие важные результаты, без которых исследование задачи п. 4.1 нельзя считать завершенным. Кроме того, профессором кафедры теоретической механики и механотроники МГУ им. М. В. Ломоносова А. В. Карапетяном была указана книга [3], где приведены утверждения, позволяющие выделять области устойчивости в терминах инноров характеристического многочлена матрицы JA в уравнении (4.2). Пользуясь случаем, авторы выражают благодарность проф. А. В. Карапетяну за указанную ссылку. Наконец, методами, описанными в [1, § 3], было исследовано естественное обобщение задачи для случая четырех параметров.

5. Завершение большого примера

5.1. Отсутствие дополнительных компонент множества $\mathcal{G}$. В [2, п. 4.10] было дано описание строения множества $\mathcal{G}$, которое представляет собой объединение линейчатой поверхности $\widetilde{\mathcal{G}}$ и одномерных ветвей $\mathcal{P}^{\pm}_{1,2}$ парабол. Однако остался открытым вопрос: существуют ли другие изолированные компоненты множества $\mathcal{G}$? Ответ на этот вопрос может быть получен следующим образом.

Предположим, что множество $\mathcal{G}$ имеет изолированные компоненты, тогда в силу исчерпывающего анализа особых точек эти компоненты не должны содержать особенностей. Более того, асимптотический анализ множества $\mathcal{G}$ вблизи бесконечности (см. [2, п. 4.9]) не выявил никаких других компонент, кроме уже описанных. Следовательно, изолированные компоненты могут быть только ограниченными, а значит в их экстремальных точках некоторые из частных производных функции $g(Q)$ обращаются в нуль, т. е. изолированные компоненты должны быть решением систем вида

$$g(Q) = 0, \quad \partial g(Q)/\partial s = 0, \quad \partial g(Q)/\partial t = 0, \tag{5.1}$$

где s, t — две координаты из набора x, y, z. Анализ решений всех систем вида (5.1) показал, что других решений, кроме найденных ранее семейств особых точек первого порядка множества $\mathcal{G}$ нет. Это доказывает, что исследование множества $\mathcal{G}$ выполнено полностью.

5.2. Устойчивость в случае нулевых корней. Случай нулевых корней характеристического многочлена $f(\mu)$ требует дополнительного исследования. Вещественная гамильтонова нормальная форма матрицы JA линейной гамильтоновой системы $\dot{X} = JAX$ приведена в [4, гл. I, п. 1.B]. Элементарные делители матрицы $\lambda E - JA$, соответствующие нулевым собственным числам, имеют вид либо λ^l и λ^l, l — нечетное (случай R4), либо вид λ^{2l} (случай R5). При этом нормальная форма функции Гамильтона H является суммой функций H_λ, соответствующих либо паре элементарных делителей с одним собственным числом λ, либо одному элементарному делителю, а каждая подфункция H_λ зависит только от своих переменных и не зависит от переменных, входящих в остальные слагаемые этой суммы. Поэтому вопрос об устойчивости достаточно рассмотреть только для функций Гамильтона, соответствующих двум указанным случаям.

Пусть имеется пара элементарных делителей λ^l и λ^l, l — нечетное. Если $l = 1$, то в нормальной форме матрица $A = 0$ и система Гамильтона имеет вид

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0.$$

Все ее решения являются неподвижными, и нулевое решение $x = y = 0$ устойчиво. Если $l = 3$, то в нормальной форме $A = \begin{pmatrix} 0 & C^{\mathrm{T}} \\ C & 0 \end{pmatrix}$, где $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. функция Гамильтона имеет вид

$$H = \varepsilon(x_1 y_2 + x_2 y_3),$$

ε — ненулевая вещественная постоянная. Следовательно, система Гамильтона имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0, & \dot{y}_1 &= -\varepsilon y_2, \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon x_1, & \dot{y}_2 &= -\varepsilon y_3, \\ \dot{x}_3 &= \varepsilon x_2, & \dot{y}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Она имеет решения

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \mathrm{const} = c_2, \quad x_3 = \varepsilon c_2 t, \quad y_1 = y_2 = y_3 = 0.$$

При малых $c_2 \neq 0$ эти решения проходят сколь угодно близко к неподвижной точке $X = Y = 0$, а при $t \to \infty$ они уходят в бесконечность по x_3. Следовательно, точка $X = Y = 0$ неустойчива. Аналогично доказывается неустойчивость при любом $l > 3$.

Пусть имеем один элементарный делитель λ^{2l}. Нормальная форма функции Гамильтона имеет вид

$$H = \varepsilon \sum_{j=1}^{l-1} x_j y_{j+1} + \sigma y_1^2/2,$$

где $\sigma = \pm 1$ — дополнительный вещественный инвариант. При $l = 1$ имеем нормальную форму функции Гамильтона $H = (\sigma/2)y_1^2$, а система имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \sigma y_1, \quad \dot{y}_1 = 0, \\ &\dot{x}_2 = 0, \qquad \dot{y}_2 = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Она имеет решения $x_1 = \sigma c_1 t$, $y_1 = c_1 = \mathrm{const}$, $x_2 = y_2 = 0$. При малых $c_1 \neq 0$ они проходят близко к неподвижной точке $X = Y = 0$ и уходят в бесконечность. Следовательно, точка $X = Y = 0$ неустойчива.

При $l = 2$ получаем систему

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \sigma y_1, \quad \dot{y}_1 = -\varepsilon y_2, \\ &\dot{x}_2 = \varepsilon x_1, \quad \dot{y}_2 = -\varepsilon y_3, \\ &\dot{x}_3 = \varepsilon x_2, \quad \dot{y}_3 = -\varepsilon y_4, \\ &\dot{x}_4 = \varepsilon x_3, \quad \dot{y}_4 = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Она имеет решение $x_1 = x_2 = y_1 = y_4 = 0$, $x_3 = c_3 = \mathrm{const}$, $x_4 = \varepsilon c_3 t$, которое при малом c_3 проходит вблизи точки $X = Y = 0$ и уходит в бесконечность по x_4. Следовательно, эта точка неустойчива. Аналогично доказывается неустойчивость при $l > 2$. Итак, доказана

Теорема 5.1. *В гамильтоновой системе $\dot{Z} = JAZ$ неподвижная точка $Z = 0$ неустойчива, если у матрицы $\lambda E - JA$ имеется непростой элементарный делитель, соответствующий нулевому собственному числу $\lambda = 0$. Если же все эти элементарные делители просты, а все ненулевые собственные числа вещественны и отрицательны, то точка $Z = 0$ устойчива.*

Характеристический многочлен $f(\mu)$ имеет нулевые корни только на конусе $\mathcal{C}_0 = \{Q : f_{00}(Q) = 0\}$. Исследуем взаимное расположение конуса $\mathcal{C}_0$ и множества $D(f) = 0$. Напомним, что $D(f) = l^4(Q) \cdot g(Q)/256$.

Система уравнений $g(Q) = 0$, $f_{00}(Q) = 0$ имеет два семейства решений $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$.

Первое представляет собой образующую конуса $\mathcal{C}_0$

$$\mathcal{C}_1 : y = 2z/3, \quad x = 0. \tag{5.4}$$

вдоль которой происходит касание поверхностей $\widetilde{\mathcal{G}}$ и $\mathcal{C}_0$. Это прямая, которая проходит через особую точку Q_0 — вершину конуса $\mathcal{C}_0$ и точку Q_5 — вершину параболы $\mathcal{P}_2$ (4.30). Элементарные делители матрицы JA для этого семейства имеют вид

$$\lambda^2,\ \lambda^2,\ \lambda - \lambda_1,\ \lambda + \lambda_1,\ \lambda - \lambda_2,\ \lambda + \lambda_2, \tag{5.5}$$

где $\lambda_{1,2} = i\left(\sqrt{-3\,z+9} \pm 3\right)/3$. Таким образом, вдоль семейства $\mathcal{C}_1$ устойчивости не будет, хотя на интервале $0 < z < 3$ собственные числа $\lambda_{1,2}$ являются число мнимыми.

Второе семейство $\mathcal{C}_2$ есть пересечение конуса $\mathcal{C}_0$ с поверхностью криволинейного тетраэдра S и представляет собой криволинейный треугольник, одна из вершин которого есть точка Q_0. Система уравнений $l = 0 = f_{00}$ имеет два семейства решений $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_3 = \{x = 2z,\ y = 0\}$. Анализ матрицы JA на конусе $\mathcal{C}_0$ вне семейства $\mathcal{C}_1$ показал, что ее жорданова форма,соответствующая нулевым собственным числам, имеет простую структуру. Тем самым, имеет место

Утверждение 5.1. *Если* $f_{00}(Q) = 0$, *то матрица* JA *имеет простые элементарные делители всюду кроме исключительной прямой* $\mathcal{C}_1$.

5.3. Эффективное выделение множеств устойчивости. В [2, п. 4.10] было дано описание множества устойчивости задачи. Здесь приведем систему неравенств, которая позволяет эффективно определять принадлежность произвольной точки Q пространства параметров множеству устойчивости. Для этого напомним основные свойства множества устойчивости задачи.

Границей множества устойчивости служит двумерная компонента $\widetilde{\mathcal{G}}$ множества $\mathcal{G}$, которая является линейчатой поверхностью. Ее параметризация задается формулой (4.52). Эта поверхность имеет участки самопересечения вдоль сегментов $\mathcal{P}_1^0$ и $\mathcal{P}_2^0$ однопараметрических семейств особых точек первого порядка и делит пространство параметров на 4 области: W_i, $i = 0,\ldots,3$. Область W_1 — «шапка» — выделяется поверхностью $\widetilde{\mathcal{G}}$ при значении параметра $u \leqslant 0$. Эта область содержит «рога» — одномерные компоненты $\mathcal{P}_2^{\pm}$. Область W_2 — «тело» — представляет собой криволинейный тетраэдр, натянутый на сегменты $\mathcal{P}_1^0$, $\mathcal{P}_2^0$ и $\mathcal{F}$, его поверхность соответствует значениям параметра $0 \leqslant u \leqslant 1$. Область W_3 — «юбка» — выделяется поверхностью $\widetilde{\mathcal{G}}$ при значении параметра $u \geqslant 1$. Эта область содержит «копыта» — одномерные компоненты $\mathcal{P}_1^{\pm}$. Область W_2 «соединяется» с областями W_1 и W_3 вдоль сегментов $\mathcal{P}_1^0$ и $\mathcal{P}_2^0$, соответственно. Наконец, область $W_0 = \mathbb{R}^3 \setminus (W_1 \cup W_2 \cup W_3)$ — внешняя часть, дополняющая пространство параметров $\mathbb{R}^3$. Схематически деление пространства параметров на области W_i показано на рис. 1, где знаки $+$ и $-$ в каждой из областей указывают знак дискриминанта $D(f)$.

Дискриминант $D(f)$ принимает неотрицательные значения в областях W_i, $i = 1,2,3$, однако в области W_1 многочлен $f(\mu)$ имеет две пары комплексно сопряженных корней, поэтому эта область не входит в множество устойчивости. Сформулируем неравенства, позволяющие отделить область W_1 от области неотрицательных значений дискриминанта. Для этого введем косоугольную систему координат с базисом

$$R_1 = (Q_1 - Q_0)/2, \quad R_2 = (Q_2 - Q_3)/2, \quad R_3 = 2(Q_5 - Q_4). \tag{5.6}$$

Точки Q_i, $i = 0, \ldots, 3$ являются особыми точками второго порядка множества $\mathcal{G}$, а точки Q_4 и Q_5 суть вершины парабол $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, соответственно. Рассмотрим проекцию семейств особых точек множества $\mathcal{G}$ на плоскость $\mathcal{T}$, натянутую на векторы R_2 и R_3 (см. рис. 2). Координаты X, Y на плоскости $\mathcal{T}$ задаются соотношениями

$$X = (Q, R_1, R_2), \quad Y = (Q, R_3, R_1),$$

где $(\cdot,\cdot,\cdot)$ — смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$, т. е. определитель из указанных векторов. Проекция семейства $\mathcal{P}_2$ на плоскость $\mathcal{T}$ задается уравнением $Y^2+4X+8=0$. Особые точки Q_2 и Q_3, выделяющие на параболе $\mathcal{P}_2$ сегмент $\mathcal{P}_2^0$, перейдут при проектировании в точки с координатами $(X,Y) = (-3,-2)$ и $(-3,2)$, соответственно. Следовательно, область W_1 отделяется двумя неравенствами:

$$\begin{aligned} &Y^2 + 4X \geqslant -8, \\ &X \geqslant -3. \end{aligned} \tag{5.7}$$

В исходных переменных Q эти неравенства записываются в виде

$$\begin{aligned} &x^2 + 6\,xy - 4\,xz + 9\,y^2 - 12\,yz + 4\,z^2 + 4\,x + 20\,y - 16\,z + 8 \geqslant 0, \\ &x + 5\,y - 4\,z + 3 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Таким образом, с учетом утверждения 5.1 можно сформулировать

Утверждение 5.2. *Множество устойчивости задачи § 4 определяется системой неравенств*

$$\begin{aligned} &g(Q) \geqslant 0, \\ &x^2 + 6\,xy - 4\,xz + 9\,y^2 - 12\,yz + 4\,z^2 + 4\,x + 20\,y - 16\,z + 8 \geqslant 0, \\ &x + 5\,y - 4\,z + 3 \geqslant 0, \\ &2z \neq 3y \ \textit{при}\ x = 0. \end{aligned}$$

6. Альтернативный подход к выделению множеств устойчивости

Условие устойчивости линейной гамильтоновой системы в случае ненулевых корней может быть сформулировано в виде условий на коэффициенты характеристического многочлена $f(\mu)$ матрицы JA с использованием техники инноров [3].

6.1. Теория.

Определение 6.1. Пусть Δ_n — произвольная квадратная матрица размером $n \times n$, тогда матрица Δ_{n-2}, образованная из исходной вычеркиванием первых и последних строк и столбцов, называется *иннором* матрицы Δ_n. Продолжая указанную процедуру к полученному иннору Δ_{n-2}, получим следующую матрицу Δ_{n-4} и т. д. Любой элемент получившейся последовательности называется *иннором* матрицы Δ_n.

Будем обозначать через I_n определитель иннора Δ_n.

Определение 6.2. Матрица Δ_n называется *innорно–положительной,* если ее определитель и определители всех ее инноров положительны.

Критерий принадлежности корней многочлена $F(z)$ отрицательной вещественной полуоси может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 6.1 ([5]). *Все n нулей многочлена $F(z)$ с вещественными положительными коэффициентами различны и лежат на отрицательной вещественной полуоси тогда и только тогда, когда все корни многочлена*

$$\widehat{F}(z) = F(iz) + i\frac{dF(iz)}{d(iz)}$$

принадлежат открытой левой полуплоскости.

Для вспомогательного многочлена $\widehat{F}(z)$ теперь может быть применена теорема Гурвица 2.1, которую мы сформулируем в иннорной постановке, поскольку многочлен $\widehat{F}(z)$ имеет комплексные коэффициенты.

Пусть $F(z)$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами.

Теорема 6.2. *Для того, чтобы все корни многочлена $F(z)$ принадлежали открытой левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы матрица Δ_{2n} многочлена*

$$\widetilde{F}(iz) = (b_n + ic_n)z^n + (b_{n-1} + ic_{n-1})z^{n-1} + \ldots + b_0 + ic_0$$

была иннорно-положительна. Матрица Δ_{2n} строится по схеме

$$\Delta_{2n} = \begin{pmatrix} c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_0 \\ 0 & \ldots & 0 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 \\ 0 & \ldots & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 & \ldots & 0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Рассмотрим иннорную технику на многочленах порядков 2, 3 и 4.

6.1.1. Квадратное уравнение. Пусть $F_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0$, тогда матрица Δ_4 вспомогательного уравнения $\widehat{F}_2(x)$ имеет вид

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & a_1 \\ 0 & 1 & -a_1 & a_0 \\ 1 & -a_1 & a_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Поскольку $I_2 = 2$, то условие вещественности и неположительности корней многочлена $F_2(x)$ сводится к неравенствам

$$a_1 \geqslant 0, \quad a_0 \geqslant 0, \quad I_4 \equiv a_1^2 - 4a_0 \geqslant 0. \tag{6.3}$$

Здесь I_4 — это дискриминант многочлена $F_2(x)$.

6.1.2. Кубическое уравнение. Пусть

$$F_3(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{6.4}$$

тогда матрица Δ_6 вспомогательного многочлена $\widehat{F}_3(x)$ имеет вид

$$\Delta_6 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2\,a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2\,a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2\,a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & a_2 & -a_1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 \\ -1 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

Матрица Δ_6 имеет два нетривиальных иннора, определители которых равны

$$\begin{aligned} I_6 &= -27\,a_0^2 + 18\,a_0 a_2 a_1 + a_2^2 a_1^2 - 4\,a_2^3 a_0 - 4\,a_1^3, \\ I_4 &= -6\,a_1 + 2\,a_2^2. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Определитель I_6 совпадает с дискриминантом уравнения (6.4), т. е. условие $I_6(a_0, a_1, a_2) = 0$ выделяет в пространстве параметров — коэффициентов уравнения — множество корней кратности 2 и выше. Докажем, что из системы неравенств $a_i \geqslant 0$, $I_6 \geqslant 0$ следует выполнение неравенства $I_4 \geqslant 0$. Заметим, что величина I_4 есть дискриминант многочлена $F_3'(x) = 3x^2 + a_2 x + a_1$.

Пусть многочлен (6.4) с неотрицательными коэффициентами, имеет вещественные и неположительные корни, но тогда корни многочлена $F_3'(x)$ также вещественны и отрицательны, поскольку корни производной от функции являются точками экстремума самой функции и располагаются между корнями последней. Следовательно, из неравенства $I_6 \geqslant 0$ следует неравенство $I_4 \geqslant 0$ при условии неотрицательности коэффициентов.

Итак, для вещественности и неположительности корней многочлена (6.4) необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_i \geqslant 0, \quad i = 0{,}1{,}2, \quad D(F_3) \geqslant 0,$$

как было указано в теореме 3.1.

Укажем, что системы уравнений

$$I_4(a_0, a_1, a_2) = 0, \quad I_6(a_0, a_1, a_2) = 0$$

определяют в пространстве параметров однопараметрическое семейство, на котором уравнение (6.4) имеет корень кратности 3:

$$a_0 = a_2^3/27, \quad a_1 = a_2^2/3, \quad x_{1,2,3} = -a_2/3.$$

6.1.3. Уравнение четвертой степени. Пусть

$$F_4(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{6.7}$$

тогда матрица Δ_8 вспомогательного многочлена $\widehat{F}_4(x)$ имеет вид

$$\Delta_8 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3\,a_3 & -2\,a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3\,a_3 & -2\,a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3\,a_3 & -2\,a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3\,a_3 & -2\,a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 1 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

Определитель I_8 матрицы Δ_8 совпадает с дискриминантом уравнения (6.7), а определители двух других инноров равны

$$I_6 = -6\,a_1a_3^3 + 2\,a_2^2a_3^2 - 12\,a_0a_3^2 + 28\,a_1a_2a_3 - 8\,a_2^3 + 32\,a_0a_2 - 36\,a_1^2, \tag{6.9}$$

$$I_4 = -8a_2 + 3a_3^2. \tag{6.10}$$

Отметим, что I_4 кратен дискриминанту многочлена $F_4''(x) = 12x^2+6a_1x+2a_2$.

Система уравнений

$$I_8(a_0, a_1, a_2, a_3) = I_6(a_0, a_1, a_2, a_3) = I_4(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0 \tag{6.11}$$

выделяет в пространстве параметров однопараметрическое семейство $\mathcal{J}_1$, на котором уравнение (6.7) имеет корень кратности 4:

$$a_0 = a_3^4/256, \quad a_1 = a_3^3/16, \quad a_2 = 3a_3^2/8, \quad x_{1,2,3,4} = -a_3/4.$$

Решения системы уравнений

$$I_8(a_0, a_1, a_2, a_3) = I_6(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0 \tag{6.12}$$

определяют два двупараметрических семейства $\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_3$ в пространстве параметров, на которых уравнение (6.7) имеет корни с кратностью больше 2. На семействе $\mathcal{J}_2$

$$a_0 = a_3^3/64 - a_2a_3^2/8 + a_2^2/4, \quad a_1 = a_3(4a_2 - a_3^2)/8$$

имеется пара двукратных корней

$$x_{1,2} = -(a_3 + \sqrt{I_4})/4, \quad x_{3,4} = -(a_3 - \sqrt{I_4})/4.$$

Нетрудно убедиться, что условием $I_4 \geqslant 0$ обеспечивается вещественность и неположительность этих корней.

На семействе $\mathcal{J}_3$

$$a_0 = -a_2^2/12 + a_3a_1/4, \quad a_1 = a_3(4a_2 - a_3^2)/8 + \sqrt{3I_4^3}/72$$

имеется корень тройной кратности

$$x_{1,2,3} = -a_3/4 + \sqrt{3I_4^3}/12, \quad x_4 = -a_3/4 - \sqrt{3I_4^3}/4.$$

Семейства $\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_3$ пересекаются по семейству $\mathcal{J}_1$.

Итак, можно сформулировать следующую

Теорема 6.3. *Многочлен* (6.7) *имеет вещественные неположительные корни тогда и только тогда, когда все его коэффициенты неотрицательны и удовлетворяют неравенствам*

$$I_8(a_0, a_1, a_2, a_3) \geqslant 0, \quad I_6(a_0, a_1, a_2, a_3) \geqslant 0, \quad I_4(a_0, a_1, a_2, a_3) \geqslant 0. \tag{6.13}$$

При этом уравнение (6.7) *имеет корень кратности 4 при выполнении условия* (6.11)*, пару двукратных корней или корень кратности 3 при выполнении условия* (6.12) *и корень кратности 2 при выполнения условия* $I_8 = 0$.

6.1.4. Уравнения степени $n > 4$. Описанные выше результаты для уравнений малых степеней могут быть некоторым образом обобщены на случай многочлена произвольной степени n. Сформулируем некоторые утверждения, доказательство который вполне элементарно.

Пусть

$$F_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 \tag{6.14}$$

многочлен с вещественными коэффициентами, тогда определитель I_{2n} его иннора Δ_{2n}, составленного по схеме (6.8), совпадает с его дискриминантом, определитель $I_2 = n$, а определитель I_4 пропорционален дискриминанту его $(n-2)$–й производной.

Условие

$$I_{2n} = I_{2n-2} = \ldots = I_4 = 0$$

выделяет в пространстве параметров — коэффициентов многочлена (6.14) — однопараметрическое семейство, на котором многочлен n–й степени имеет корень $x = -a_{n-1}/n$ кратности n.

Условие $I_{2n} = 0$ выделяет в пространстве параметров множество, на котором многочлен (6.14) имеет двукратный корень. Каждое следующее условие $I_{2(n-k)} = 0$, $k = 1, \ldots, n-2$ вместе с предыдущими выделяет множества, на которых многочлен (6.14) имеет корни большей кратности.

6.2. Исследование инноров матрицы JA большого примера. Применим описанную выше иннорную технику для выделения множества устойчивости задачи. В выражения для определителей инноров I_8, I_6 и I_4 подставим значения коэффициентов характеристического многочлена $f(\mu)$. Как было отмечено выше, I_8 совпадает с дискриминантом $D(f)$, вид которого задается формулами (4.14)–(4.16). Два других выражения в координатах $Q = (x, y, z)$ задаются следующим образом

$$I_4 = 8\,z^2 - 4\,zx - 28\,zy + x^2 + 6\,yx + 25\,y^2 + 8\,x - 24\,y + 48. \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
I_6 = {} & -32z^5 + 232z^4y + 40z^4x - 640z^3y^2 - 232z^3yx - 24z^3x^2 \\
& + 805z^2y^3 + 495z^2y^2x + 99z^2yx^2 + 9z^2x^3 - 410zy^4 - 456zy^3x \\
& - 132zy^2x^2 - 24zyx^3 - 2zx^4 + 125y^5/4 + 605y^4x/4 + 109y^3x^2/2 \\
& + 33y^2x^3/2 + 9/4yx^4 + 1/4x^5 - 4z^4 - 32z^3y - 80z^3x + 454z^2y^2 \\
& + 212z^2yx + 86z^2x^2 - 1156zy^3 - 160zy^2x - 196zyx^2 - 24zx^3 \\
& + 3371y^4/4 + 41y^3x + 225y^2x^2/2 + 25yx^3 + 11/4x^4 - 192z^3 \\
& - 192z^2y + 448z^2x + 1968zy^2 - 992zyx - 144zx^2 - 1872y^3 \\
& + 464y^2x + 176yx^2 + 16x^3 + 1152z^2 - 3456zy - 384zx + 2592y^2 \\
& + 576yx + 32x^2
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Обозначим множества

$$\mathcal{I}_6 = \{Q : I_6(Q) = 0\}\,, \quad \mathcal{I}_4 = \{Q : I_4(Q) = 0\}\,. \tag{6.17}$$

Множества $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}_6$ и $\mathcal{I}_4$ пересекаются в точках Q_1, Q_2, Q_3, в которых многочлен $f(\mu)$ имеет корень четвертой кратности. Пересечением множеств $\mathcal{G}$ и $\mathcal{I}_6$ служат семейства $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{F}$, причем на семействе $\mathcal{P}_1$ происходит касание первого порядка, а на семействах $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{F}$ пересечение. Взаимное расположение множеств $\mathcal{G}$ и $\mathcal{I}_6$ легко определить, воспользовавшись параметризацией (4.52) двумерной компоненты $\widetilde{\mathcal{G}}$. Для упрощения выражений перейдем от тригонометрической к рациональной параметризации:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+s^2}, \quad \sin^2\varphi = \frac{s^2}{1+s^2},$$

тогда на поверхности $\widetilde{\mathcal{G}}$ выражение $I_6(Q)$ имеет вид

$$I_6(u,s) = 32\,\frac{u\,(u-1)^2\left(-s^4+us^4+2\,us^2+2\,s^2-1+u\right)^2}{\left(1+s^2\right)^6},$$

откуда следует, что при $u<0$, т. е. на «шапке», $I_6<0$. Следовательно, неравенства $I_6 \geqslant 0$ и $I_8 \geqslant 0$ выделяют области в пространстве параметров, в которых характеристический многочлен $f(\mu)$ имеет неотрицательные вещественные корни. Остается заметить, что неравенство $I_4 \geqslant 0$ позволяет отделить неустойчивые сегменты $\mathcal{P}_2^{\pm}$ семейства $\mathcal{P}_2$, поскольку на них функции $g(Q)$ и $I_6(Q)$ обнуляются.

Таким образом, с учетом утверждения 5.1 можно сформулировать

Утверждение 6.1. *Множество устойчивости задачи § 4 определяется системой неравенств (см.* (4.16), (6.15), (6.16)*)*

$$g(Q)\geqslant 0, \quad I_6(Q)\geqslant 0, \quad I_4(Q)\geqslant 0, \quad 2z\neq 3y \text{ при } x=0.$$

Заметим, что в утверждении 5.2 второе и третье неравенства существенно проще.

7. Обобщение большого примера

Может сложиться впечатление, что в § 4 особые свойства характеристического многочлена $f(\mu)$ матрицы JA, а именно:

- свободный член $f_0(Q)$ есть полный квадрат и поверхность $f_0(Q)=0$ не может служить границей области устойчивости;

- дискриминант многочлена $D(f)$ факторизуется с выделением множителя $g(Q)$;
- двумерная компонента множества $\mathcal{G}$ является линейчатой поверхностью

связаны исключительно со специальным подбором параметров задачи. Однако это не так! Все указанные выше особенности, позволившие эффективно разрешить проблему устойчивости задачи § 4, а также некоторые другие ее специфические свойства, сохраняются и для более широкого класса задач.

7.1. Постановка задачи. Расширим исходную постановку задачи рассматривая диаметр массивного диска как некоторую произвольную величину, т. е. теперь задача такова. Механическая система находится в поле силы тяжести и состоит из осесимметричных тел, связанных между собой универсальными шарнирами Кардано–Гука. Центры каждого из шарниров находятся на осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело — невесомый стержень длины $2l$ посредством шарнира прикреплен к оси ротора вертикально поставленного мотора, а верхний стержень длины l жестко прикреплен к центру плоского диска массы m и диаметра d перпендикулярно его поверхности (см. рис. 3). Ротор мотора вращается с постоянной угловой скоростью $\widetilde{\Omega}$. Определить множество устойчивости данной системы.

Будем считать, что диаметр массивного диска d связан с длиной меньшего из стержней соотношением $d = kl$, где $k > 0$, тогда повторяя вывод уравнений движения получим, что матрицы M, G и R, определяющие структуру матрицы A в системе Гамильтона $\dot{X} = JAX$ имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \varkappa+1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \varkappa+1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \\
R = \frac{1}{\widetilde{\Omega}^2} \begin{pmatrix} r_1 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & -c_2 \\ -c_2 & 0 & c_2-1 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \varkappa-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \varkappa-1 \end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

где $r_1 = c_1 + c_2 - 2$, $\varkappa = k^2/16$, а c_1, c_2, $\widetilde{\Omega}$ и k — параметры. Выполняя замену параметров (4.6), получим матрицу

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/2 & a_3 & 0 & -8/k^2 & 0 \\ -1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & -8/k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8/k^2 & 0 & 16/k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8/k^2 & 0 & 16/k^2 \\ a_1 & 0 & q & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & q & -1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & a_2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & a_2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

где $a_1 = 2\,r - p - q$, $a_2 = r - q - \varkappa$, $a_3 = \dfrac{k^2+16}{4k^2}$. Теперь вектор параметров $P = (p, q, r, k)$, а физические значения параметров образуют положительный ортант $P > 0$.

Все последующие формулы будут даны в переменных P, а все формулы § 4, записанные в переменных $Q = (x, y, z)$ могут быть получены подстановкой $k = 4$ и заменой $Q = P + (-2{,}2{,}2)$.

Характеристический многочлен (3.3) имеет следующие коэффициенты:

$$f_0 = f_{00}^2, \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned} f_{00} = & \frac{4pq}{k^2} - \frac{4rp}{k^2} - \frac{12\,rq}{k^2} + \frac{8\,r^2}{k^2} + \frac{\left(k^2-16\right)p}{4k^2} + \frac{\left(k^2-144\right)q}{4k^2} + \\ & + \frac{\left(96-2\,k^2\right)r}{4k^2} - 1, \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} f_1 = & \frac{2\left(k^2+16\right)p^2q}{k^4} - \frac{2\left(k^2+16\right)p^2r}{k^4} + \frac{2\left(144+k^2\right)pq^2}{k^4} - \frac{12\left(k^2+48\right)pqr}{k^4} + \\ & + \frac{8\left(k^2+32\right)pr^2}{k^4} - \frac{6\left(144+k^2\right)q^2r}{k^4} + \frac{16\left(k^2+72\right)qr^2}{k^4} - \frac{8\left(k^2+48\right)r^3}{k^4} + \\ & + \frac{\left(k^4+256\right)p^2}{8k^4} + \frac{\left(k^4+2304\right)pq}{4k^4} - \frac{\left(k^4+768\right)pr}{2k^4} + \frac{\left(20736+k^4\right)q^2}{8k^4} - \\ & - \frac{\left(6912+k^4\right)qr}{2k^4} + \frac{\left(k^4+2304\right)r^2}{2k^4} - \frac{\left(-48+k^2\right)p}{2k^2} - \frac{\left(-432+k^2\right)q}{2k^2} + \\ & + \frac{\left(k-12\right)\left(k+12\right)r}{k^2} + 4 \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$f_2 = \frac{\left(k^2+16\right)^2 p^2}{16k^4} + \frac{\left(2304+224\,k^2+k^4\right) pq}{8k^4} - \frac{\left(768+k^4+96\,k^2\right) pr}{4k^4} +$$
$$+ \frac{\left(144+k^2\right)^2 q^2}{16k^4} - \frac{\left(k^4+288\,k^2+6912\right) qr}{4k^4} + \frac{\left(144+k^2\right)\left(k^2+16\right) r^2}{4k^4} +$$
$$+ \frac{\left(k^2+48\right) p}{2k^2} + \frac{\left(432+k^2\right) q}{2k^2} - \frac{\left(144+k^2\right) r}{k^2} + 6 \tag{7.6}$$

$$f_3 = \frac{\left(k^2+16\right) p}{2k^2} + \frac{\left(144+k^2\right) q}{2k^2} - \frac{\left(k^2+48\right) r}{k^2} + 4 \tag{7.7}$$

Поскольку свободный член f_0 является полным квадратом, то замечание (4.1) остается в силе, и границей множества устойчивости может быть множество нулей дискриминанта характеристического многочлена. Как и в случае задачи § 4, дискриминант представляется в виде

$$D(f) = l(P)^4 g(P)/(4k^{14}), \tag{7.8}$$

где $l(P) = p + 3q - 2r$, а $g(P)$ — многочлен шестого порядка по переменным p, q, r и десятого порядка по переменной k. В силу большой громоздкости выражения $g(P)$ мы не приводим его здесь, но оно может быть легко получено в любой системе компьютерной алгебры с использованием коэффициентов (7.3)–(7.7) характеристического многочлена $f(\mu)$.

Замечание (4.2) здесь также имеет место.

Рассмотрим особые точки множества

$$\mathcal{G} = \left\{P : g(P) = 0\right\}. \tag{7.9}$$

7.2. Особые точки множества $\mathcal{G}$.

Определение 7.1. Пусть $\varphi(P)$ — полином. Точка $P = P_0$ множества $\Phi = \{P : \varphi(P) = 0\}$ называется *особой точкой порядка* k, если все частные производные $\varphi(P)$ вплоть до k-го порядка включительно равны нулю в этой точке.

Множество $\mathcal{G}$ имеет особые точки третьего порядка, но все они соответствуют значению $k = 0$.

Особенности второго порядка сосредоточены в точках

$$\begin{aligned} &P_0 = (2\varkappa, -2, \varkappa - 3), \quad P_1 = (0{,}0{,}0),\\ &P_2 = ((5k+24)k/32, (2+k)/4, (k+4)(5k+12)/64),\\ &P_3 = ((5k-24)k/32, (2-k)/4, (k-4)(5k-12)/64). \end{aligned} \tag{7.10}$$

В этих точках $\mu_{1,2,3}(P_0) = 0$, $\mu_4(P_0) = -4$, $\mu_{1,2,3,4}(P_1) = -1$, $\mu_{1,2,3,4}(P_{2,3}) = -1/4$.

Как и в случае задачи § 4 ключевую роль играют два семейства особых точек первого порядка $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$.

Семейство $\mathcal{P}_1$ определяется нулями многочленов

$$p + 3q - 2r, \quad ((\varkappa + 3)\, p - 2\varkappa r)^2 - 24\varkappa^2(p - 2r) \tag{7.11}$$

и представляет собой параболу

$$\mathcal{P}_1 = \begin{cases} p = -2\varkappa t^2 - 4\varkappa t, \\ q = -2t^2, \\ r = -(\varkappa + 3)t^2 - 2\varkappa t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{7.12}$$

на которой корни характеристического многочлена принимают значения

$$\mu_{1,2,3} = -(t+1)^2, \quad \mu_4 = -(t-1)^2. \tag{7.13}$$

Парабола $\mathcal{P}_1$ соединяет критические точки P_1 и P_0, которые разбивают ее на три части $\mathcal{P}_1^-$, $\mathcal{P}_1^0$, $\mathcal{P}_1^+$:

$$\mathcal{P}_1^- \text{ при } t < -1, \quad \mathcal{P}_1^0 \text{ при } -1 \leqslant t \leqslant 0, \quad \mathcal{P}_1^+ \text{ при } t > 1.$$

Вершина параболы находится в точке $P_4 = (3\varkappa/2, -1/2{,}3(\varkappa - 1)/4)$.

Семейство $\mathcal{P}_2$ определяется нулями следующих многочленов

$$\begin{aligned} &(\varkappa - 1)p + (\varkappa - 9)q + 2(3 - \varkappa)r - 4\varkappa, \\ &4((\varkappa + 3)q - 2r)^2 + 16\varkappa(3\varkappa - 1)q - 16\varkappa(\varkappa + 1)r + 64\varkappa^3 \end{aligned} \tag{7.14}$$

и представляет собой параболу

$$\mathcal{P}_2 = \begin{cases} p = 32\varkappa v^2 + (6 - \varkappa/2)kv + \varkappa(\varkappa - 2)/2, \\ q = 32v^2 - \varkappa/2, \\ r = 16(\varkappa + 3)v^2 + (1 - \varkappa)kv + \varkappa(\varkappa - 1)/4, \end{cases} \qquad v \in \mathbb{R}, \tag{7.15}$$

на которой корни характеристического многочлена принимают значения

$$\begin{aligned} \mu_{1,2} &= \frac{(32v - k)^2}{64} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{16 - (32v - k)^2}}{8}, \\ \mu_{3,4} &= \frac{(32v - k)^2}{64} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{16 - (32v - k)^2}}{8}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Корни (7.16) вещественны и неположительны при условии $-1/8 + k/32 \leqslant v \leqslant 1/8 + k/32$ и принимают значения из интервала $[-1; 0]$. Таким образом, семейство $\mathcal{P}_2$ разбивается на три части $\mathcal{P}_2^-$, $\mathcal{P}_2^0$, $\mathcal{P}_2^+$:

$$\mathcal{P}_2^- \text{ при } v < -\frac{1}{8} + \frac{k}{32},\ \mathcal{P}_2^0 \text{ при } -\frac{1}{8} + \frac{k}{32} \leqslant v \leqslant \frac{1}{8} + \frac{k}{32},\ \mathcal{P}_2^+ \text{ при } v > \frac{1}{8} + \frac{k}{32}.$$

Согласно (7.16) только часть $\mathcal{P}_2^0$ попадает в область устойчивости. Семейство $\mathcal{P}_2$ соединяет критические точки P_2 и P_3, а ее вершина совпадает с точкой $P_5 = (2\varkappa, 0, \varkappa)$.

Имеется еще одно семейство $\mathcal{F}$ особых точек, которое, как и в случае задачи § 4, представляет собой пространственный криволинейный четырехугольник, проходящий через особые точки P_0, P_1, P_2, P_3, однако его аналитическое представление очень громоздко, а и его роль в понимании глобальной структуры множества $\mathcal{G}$ будет указана ниже.

7.3. Глобальная структура множества $\mathcal{G}$. Множество $\mathcal{G}$ состоит из двумерной компоненты $\widetilde{\mathcal{G}}$, представляющей собой развертывающуюся линейчатую поверхность:

$$\begin{aligned}
&p = p,\\
&q = \frac{c\,(-1+2\,c)\,p}{-1+3\,c} - \frac{k^4\,(-1+2\,c)^3\left(4\,k^2c^3-4\,k^2c^2+96\,c^2+k^2c-48\,c+16\right)}{8\,(-1+3\,c)\,(16+k^2-4\,k^2c+4\,k^2c^2)^2},\\
&r = cp - \frac{(-1+2\,c)^3\left(4\,k^2c^2-4\,k^2c+96\,c+k^2-16\right)k^4}{16\,(16+k^2-4\,k^2c+4\,k^2c^2)^2},
\end{aligned} \tag{7.17}$$

и четырех одномерных компонент $\mathcal{P}_{1,2}^{\pm}$. Семейство $\mathcal{F}$ есть огибающая этих прямых. Одномерные компоненты $\mathcal{P}_{1,2}^{\pm}$ также принадлежат линейчатой структуре (7.17), если положить $c \in \mathbb{C}$, но при этом потребовать, чтобы $q(c)$ и $p(c)$ были вещественными.

На поверхности $\widetilde{\mathcal{G}}$ двукратный корень характеристического многочлена $f(\mu)$ вычисляется явно и равен

$$\mu_{mul} = -\frac{256}{(16+k^2-4\,k^2c+4\,k^2c^2)^2} < 0. \tag{7.18}$$

Условие вещественности и неположительности пары двух других корней могут быть записаны либо с помощью дискриминанта $\widetilde{D}$ квадратного трехчлена, который получается делением $f(\mu)$ на множитель $(\mu - \mu_{mul})^2$, либо с помощью инноров I_4 и I_6, вычисленным по формулам (6.10) и (6.9), в которые должны быть подставлены коэффициенты характеристического многочлена (7.3)–(7.7). Соответствующие формулы здесь не приводится из–за их большой громоздкости.

7.4. Устойчивость в случае нулевых корней. Выводы, сделанные в п. 5.2 относительно устойчивости в случае нулевых корней характеристического многочлена, остаются верны и в общем случае. Исключительной прямой на конусе $\mathcal{C}_0 = \{P : f_{00} = 0\}$ является прямая $\mathcal{C}_1$, проходящая через особую точку P_0 и вершину P_5 параболы $\mathcal{P}_2$. Среди элементарных делителей матрицы (7.2) на этой прямой имеется пара элементарных делителей вида λ^2, следовательно, в силу теоремы 5.1 на ней устойчивости не будет.

8. Заключение

Таким образом, все ключевые свойства задачи § 4 сохраняются при переходе к более общей постановке с учетом зависимости опорных элементов множества устойчивости S от нового параметра k. Эти зависимости являются полиномиальными и позволяют, с одной стороны, достаточно плавно настраивать параметры системы на нужный режим работы механизма, а, с другой стороны, демонстрируют устойчивость динамических режимов системы относительно малых возмущений параметра k.

Список литературы

[1] *Брюно А. Д.* Множества устойчивости многопараметрических задач. Препринт № 3. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 14 с.

[2] *Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П.* Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт № 4. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 30 с.

[3] *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. — М.: Наука, 1979. — 304 с.

[4] *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. — М.: Наука, 1990. — 296 с.

[5] *Романов М. И.* Алгебраические критерии апериодичности линейных систем // *ДАН СССР*. — 1959. — Т. 124, № 2. — С. 291–294.

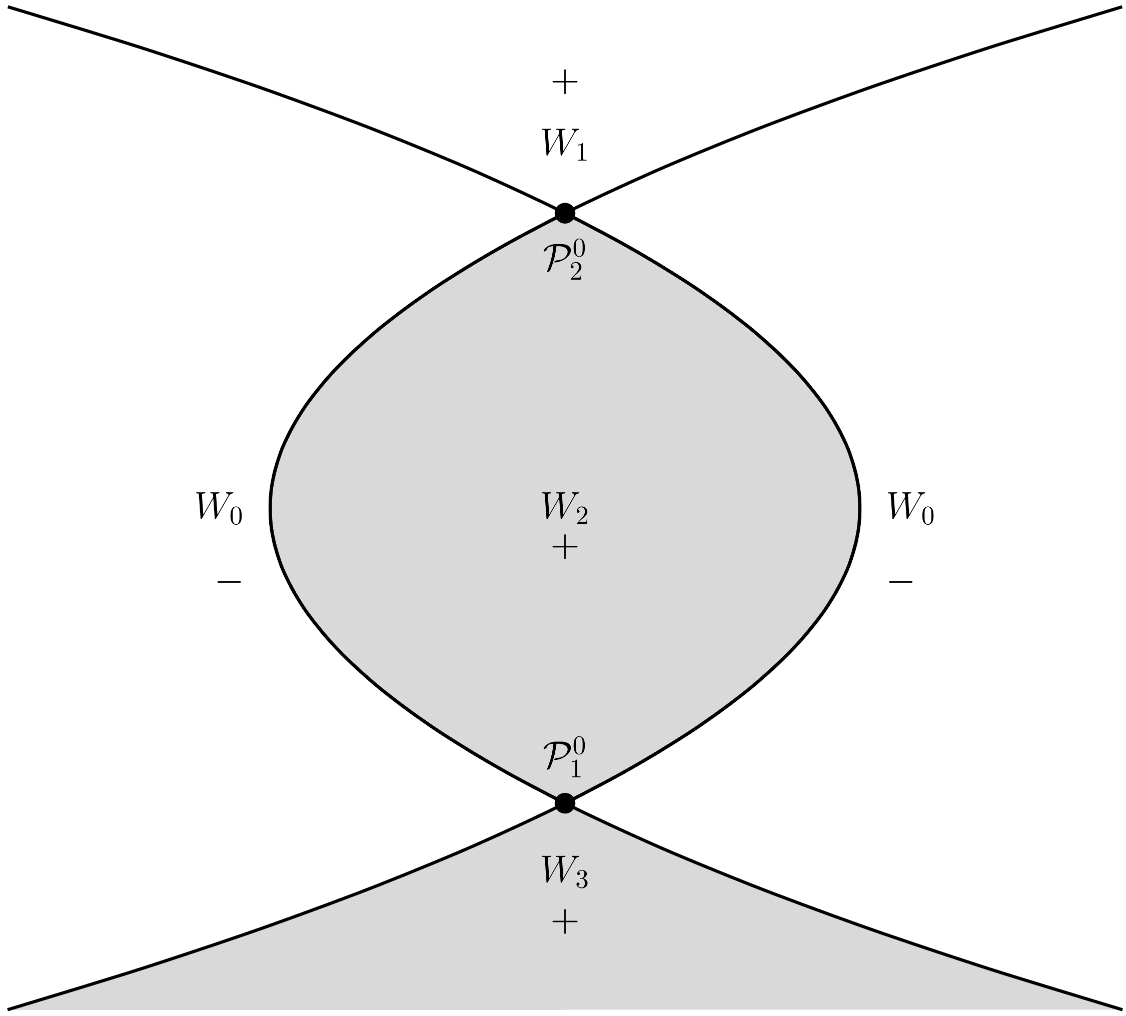

Рис. 1: Схематическое деление пространства параметров поверхностью $\widetilde{\mathcal{G}}$ на части. Знаки в каждой из частей указывают знак дискриминанта. Затенением выделены части множества устойчивости.

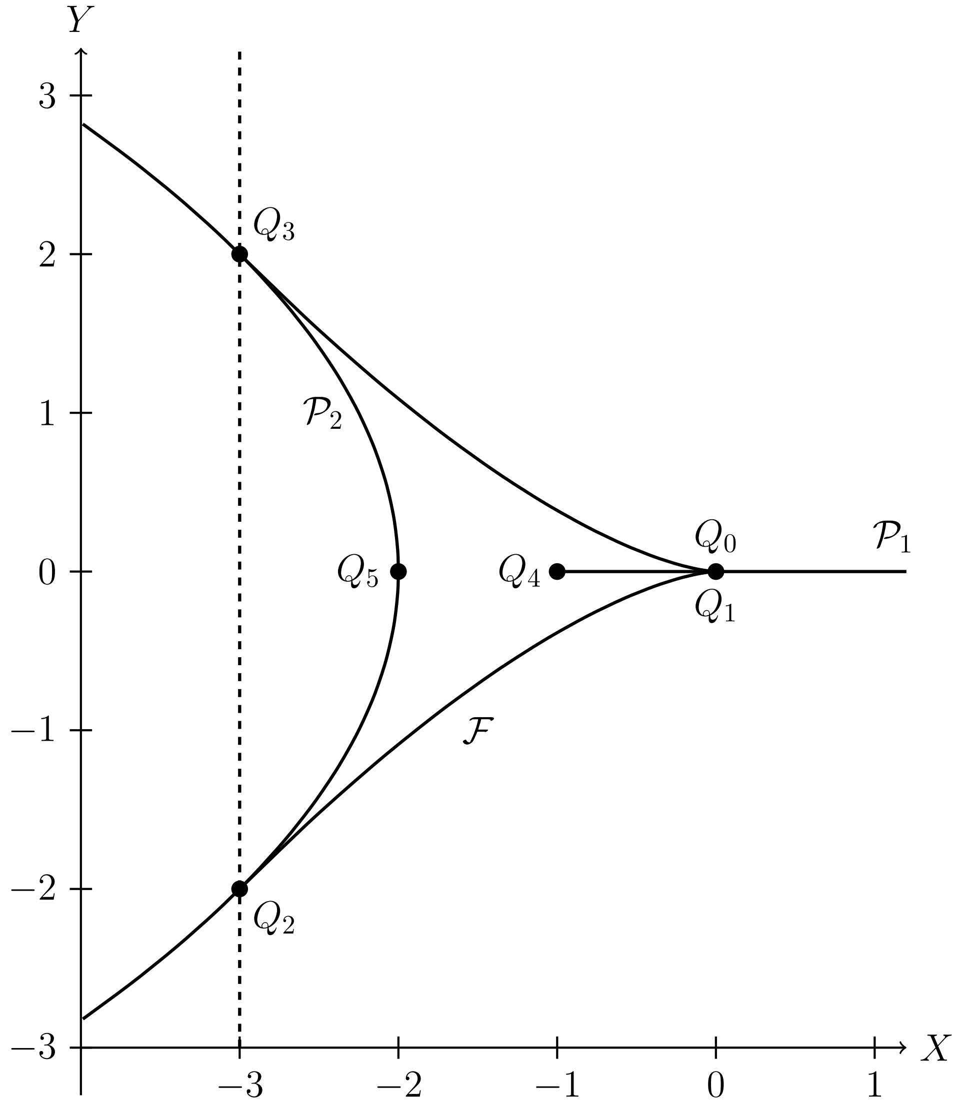

Рис. 2: Проекция семейств особых точек на плоскость $\mathcal{T}$.

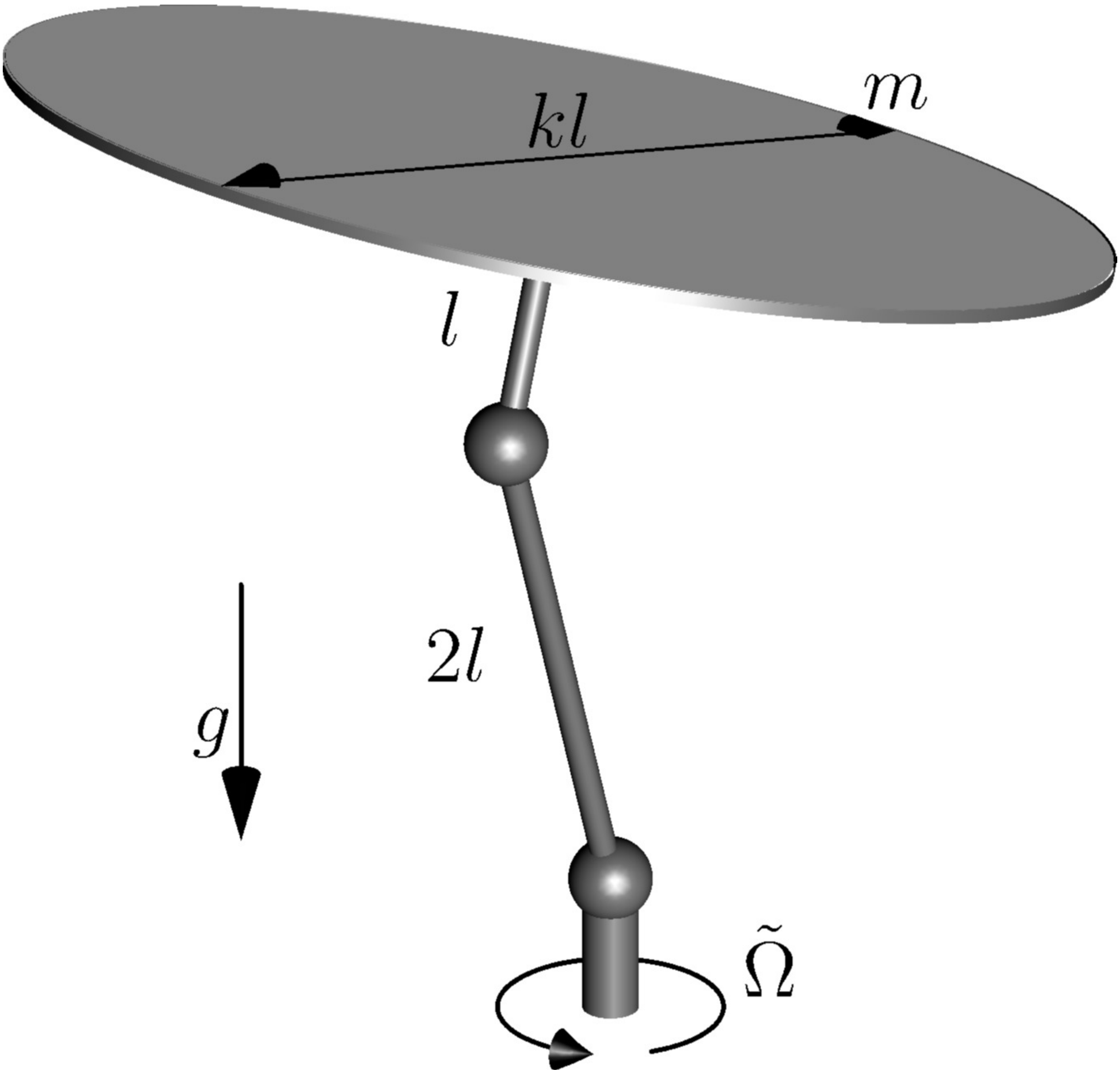

Рис. 3: Массивный диск, прикрепленный к ротору двигателя посредством упругих шарниров Кардано–Гука