ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 11 за 2010 г.

Брюно А.Д.

Структура многомерных диофантовых приближений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Структура многомерных диофантовых приближений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 11. 8 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-11

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно

СТРУКТУРА МНОГОМЕРНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Москва, 2010 г.

УДК 511.36

А. Д. Брюно. Структура многомерных диофантовых приближений. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Пусть в n-мерном вещественном пространстве R заданы l линейных и k квадратичных форм, $n = l + 2k$. Модули этих форм задают отображение пространства R в положительный ортант S_+ m-мерного вещественного пространства S, $m = l + k$. При этом целочисленная решётка в R отображается в некоторое множество $\boldsymbol{Z} \subset S_+$. Замыкание выпуклой оболочки $\boldsymbol{G}$ множества $\boldsymbol{Z} \setminus 0$ является многогранным множеством. Целочисленные точки из R, отображающиеся на границу $\partial\boldsymbol{G}$ многогранника $\boldsymbol{G}$, дают наилучшие диофантовы приближения к совокупности корневых подпространств m заданных форм. В алгебраическом случае, когда заданные формы определённым образом связаны с корнями многочлена степени n, доказывается, что многогранник $\boldsymbol{G}$ имеет $m - 1$ независимый период. Это обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепной дроби квадратичной иррациональности.

A. D. Bruno. The structure of the multidimensional Diophantine approximations. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

Let l linear forms and k quadratic forms ($n = l + 2k$) be given in the n-dimensional real space R. Absolute values of the forms define a map of the space R into the positive ortant S_+ of the m-dimensional real space S, where $m = l + k$. Here the integer lattice in R is mapped into a set $\boldsymbol{Z} \subset S_+$. The closure of the convex hull $\boldsymbol{G}$ of the set $\boldsymbol{Z} \setminus 0$ is a polyhedral set. Integer points from R, which are mapped in the boundary $\partial\boldsymbol{G}$ of the polyhedron $\boldsymbol{G}$, give the best Diophantine approximations to root subspaces of all given forms. In the algebraic case, when the given forms are connected with roots of a polynomial of degree n, we prove that the polyhedron $\boldsymbol{G}$ has $m - 1$ independent periods. It is a generalization of the Lagrange Theorem, that continued fractions of a square irrationality is periodic.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 09-01-00291 и 08-01-00082.

E-mails: abruno@keldysh.ru
сайт: www.keldysh.ru

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ даны l однородных линейных форм и k однородных квадратичных форм; каждая из квадратичных является произведением двух комплексно сопряжённых линейных форм, $l + 2k = n$. Модули всех $m = k + l$ форм задают отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в неотрицательный ортант $\mathbb{R}^m_+$ пространства $\mathbb{R}^m$. Ненулевые целочисленные точки из $\mathbb{R}^n$ отображаются в некоторое множество $\boldsymbol{Z} \subset \mathbb{R}^m_+$. Замыкание выпуклой оболочки $\boldsymbol{G}$ множества $\boldsymbol{Z}$ является полиэдральным множеством в $\mathbb{R}^m_+$. Его граница $\partial\boldsymbol{G}$ имеет размерность $m-1$, и на ней лежат образы наилучших диофантовых приближений к корневым подпространствам всех m форм. В алгебраическом случае m форм определённым образом связаны с корнями неприводимого многочлена степени n, имеющего l вещественных и k пар комплексно сопряжённых корней. Доказывается, что в алгебраическом случае граница $\partial\boldsymbol{G}$ имеет $m-1$ независимых периода. Это обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепной дроби квадратичной иррациональности.

1. МОДУЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК

Пусть в $\mathbb{R}^n = \{X\}$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$ заданы l линейных форм

$$f_i(x) = \langle L_i, X\rangle, \qquad i = 1, \ldots, l \tag{1}$$

и k квадратичных форм

$$f_{l+j}(X) = \langle K_j, X\rangle\langle \bar{K}_j, X\rangle, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

$$l, k \geqslant 0, \qquad l + 2k = n, \qquad l + k = m. \tag{3}$$

Здесь L_i — n-мерные вещественные векторы, K_j — n-мерные комплексные векторы, $\langle L_i, X\rangle$ означает скалярное произведение и черта сверху означает комплексное сопряжение. Очевидно, $m \leqslant n$. Предположим, что набор форм (1), (2) невырожден, т. е.

$$\det(L_1, \ldots, L_l, K_1, \ldots, K_k, \bar{K}_1, \ldots, \bar{K}_k) \neq 0. \tag{4}$$

Положим

$$g_i(X) = |f_i(X)|, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

и

$$G(X) = (g_1(X), \ldots, g_m(X)). \tag{6}$$

Определение 1. Целочисленная точка $X \in \mathbb{Z}^n$ называется *наилучшим (диофантовым) приближением* к корневым подпространствам

$$\mathcal{L}_i = \{X : f_i(X) = 0\}, \qquad i = 1, \ldots, l + k = m, \tag{7}$$

совокупности форм (1), (2), если для неё существует вектор $P \in \mathbb{R}^m$, $P > 0$ такой, что для всякого $Y \in \mathbb{Z}^n$, $Y \neq 0$:

$$\langle P, G(X)\rangle \leqslant \langle P, G(Y)\rangle \,. \tag{8}$$

Предлагается изучить структуру наилучших целочисленных приближений $X \in \mathbb{Z}^n$ к корневым подпространствам (7) форм (1), (2) с помощью следующего подхода [1, п. 9.1].

Формулы (5), (6) задают отображение n-мерного пространства $\boldsymbol{R} = \mathbb{R}^n = \{X\}$ в неотрицательный ортант $\boldsymbol{S}_+ = \{G \geq 0\}$ m-мерного пространства $\boldsymbol{S} = \mathbb{R}^m = \{G\}$. При этом корневые подпространства (7) в $\boldsymbol{R}$ отображаются в координатные подпространства в $\boldsymbol{S}_+$, а целочисленные точки $X \neq 0$, т. е. $X \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, отображаются в некоторое множество $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{S}_+$. Пусть $\boldsymbol{G}$ — замыкание выпуклой оболочки множества $\boldsymbol{Z}$. Согласно определению 1 наилучшим целочисленным приближениям $X \in \mathbb{Z}^n$ корневых подпространств (7) соответствуют точки G множества $\boldsymbol{Z}$, лежащие на границе $\partial\boldsymbol{G}$ многогранного множества $\boldsymbol{G}$, и только они.

Если $k = 0$ и $l = 2$, то $m = n = 2$ и $\partial\boldsymbol{G}$ — выпуклая ломаная на плоскости. Координаты x_1, x_2 прообраза $X = (x_1, x_2)$ её вершины $G = (g_1, g_2)$ — это числитель и знаменатель подходящей цепной дроби числа, равного тангенсу угла наклона одной из корневых прямых. Разложению этого числа в цепную дробь соответствует движение по вершинам ломаной $\partial\boldsymbol{G}$. Получается диагональная или выпуклая цепная дробь, рассмотренная в §§ 1, 2 [1].

Если $k = 0$, $l = 3$, то $n = m = 3$ и $\partial\boldsymbol{G}$ — это двумерная выпуклая многогранная поверхность в трёхмерном пространстве $\boldsymbol{S}$ [2, 1]. Предложенный в [3, 1] алгоритм для вычисления этой поверхности даёт обобщение алгоритма цепной дроби.

Если $k = 1$ и $l = 1$, то $n = 3$, $m = 2$ и $\partial\boldsymbol{G}$ — это выпуклая ломаная на плоскости [4, 1]. Предложенные в [4, 1, 5] алгоритмы вычисления этой ломаной дают обобщения алгоритма цепной дроби.

2. ПЕРИОДИЧНОСТЬ МОДУЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА

Рассмотрим линейное преобразование

$$X = D\tilde{X} \tag{9}$$

исходных координат, где D — неособая квадратная n-матрица. Напомним, что матрица D называется *унимодулярной*, если все её элементы — целые и $\det D = \pm 1$.

Определение 2. Унимодулярная матрица D является *периодом* модульного многогранника $\boldsymbol{G}$, если линейному преобразованию (9) соответствует диагональное линейное преобразование

$$g_i = \mu_i \tilde{g}_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad \mu_1 \ldots \mu_m = 1 \tag{10}$$

между многогранниками $\boldsymbol{G}$ и $\tilde{\boldsymbol{G}}$, где $\tilde{g}_i = g_i(\tilde{X})$.

Пусть неприводимый в $\mathbb{Q}$ многочлен

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{11}$$

с целыми коэффициентами $a_i \in \mathbb{Z}$ имеет l вещественных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ и k пар комплексно сопряжённых корней $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_{l+k}, \bar{\lambda}_{l+1}, \ldots, \bar{\lambda}_{l+k}$, $l + 2k = n$. Пусть W — соответствующая матрица Вандермонда, S — неособая матрица с рациональными элементами и

$$(L_1^* L_2^* \ldots L_n^*) = SW, \tag{12}$$

где звёздочка означает транспонирование, т. е. L_i^* — вектор-столбец. Рассмотрим $m = k + l$ форм

$$\begin{gathered} f_i(X) = \langle L_i, X\rangle, \qquad i = 1, \ldots, l, \\ f_{l+j}(X) = \langle L_{l+j}, X\rangle\langle \bar{L}_{l+j}, X\rangle, \qquad j = 1, \ldots, k. \end{gathered} \tag{13}$$

Теорема. *Соответствующая формам* (13) *гиперповерхность* $\partial\boldsymbol{G}$ *размерности* $m-1$ *имеет ровно* $m-1$ *независимых периодов.*

Доказательство основано на гл. II и § 2 алгебраического дополнения книги [6]. Пусть λ — произвольный корень многочлена (11) и $M = (m_1, \ldots, m_n) = \left(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}\right) S^*$. Рассмотрим множество Ω чисел вида $\omega = \langle M, X\rangle$, где $X \in \mathbb{Z}^n$. Они образуют модуль (линейное пространство) над числами $m_1, \ldots, m_n$, которые составляют базис модуля Ω. Каждому $\omega \in \Omega$ соответствует квадратная целочисленная матрица $D_\omega = (d_{ij})$:

$$\omega m_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} m_j, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

т. е.

$$D_\omega M^* = \omega M^*. \tag{14}$$

Следовательно, вектор M^* является собственным для матрицы D_ω. При этом матрица D_ω одинакова для всех корней λ_i, $i = 1, \ldots, l + k = m$ многочлена (11), а M — это любой из векторов $L_1, \ldots, L_m$, т. е. векторы $L_1, \ldots, L_l, L_{l+1}, \ldots, L_m, \bar{L}_{l+1}, \ldots, \bar{L}_m$ являются собственными для всех матриц

D_ω. Если число ω — единица поля $\mathbb{Q}(\lambda)$, то матрица D_ω унимодулярна. Поэтому произведение её собственных значений равно ± 1.

Пусть ω — единица поля $\mathbb{Q}(\lambda)$, сделаем линейное преобразование

$$X = D^*_\omega \tilde{X}. \tag{15}$$

Тогда согласно (14)

$$\langle L_i,\, X\rangle = \left\langle L_i,\, D^*_\omega \tilde{X}^*\right\rangle = \left\langle D_\omega L^*_i,\, \tilde{X}\right\rangle = \nu_i \langle L_i,\, \tilde{X}\rangle,$$

где ν_i — собственное число собственного вектора L^*_i матрицы D_ω, $i = 1, \ldots, m$. Следовательно,

$$\begin{aligned} g_i(X) &= |\langle L_i,\, X\rangle| = |\nu_i| g_i(\tilde{X}), \qquad i = 1,\, \ldots,\, l, \\ g_{l+j}(X) &= |\langle L_{l+j},\, X\rangle \langle \bar{L}_{l+j},\, X\rangle| = \\ &= |\nu_{l+j}\bar{\nu}_{l+j}| g_{l+j}(\tilde{X}), \qquad j = 1,\, \ldots,\, k, \end{aligned} \tag{16}$$

т. е. $g_i(X) = \mu_i g_i(\tilde{X})$, $i = 1, \ldots, m$, где $\mu_i = |\nu_i|$, $i = 1, \ldots, l$, $\mu_j = |\nu_j \bar{\nu}_j|$, $j = l+1, \ldots, m$. Поскольку ν_i суть собственные числа унимодулярной матрицы D_ω, то произведение

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \nu_1 \ldots \nu_l \nu_{l+1} \bar{\nu}_{l+1} \ldots \nu_m \bar{\nu}_m = \det D_\omega = \pm 1. \tag{17}$$

Поэтому

$$\mu_1 \ldots \mu_m = |\beta| = 1,$$

т. е. согласно определению 2 матрица D^*_ω является периодом многогранника $\boldsymbol{G}$, построенного для форм (13).

Согласно теореме Дирихле поле $\mathbb{Q}(\lambda)$ имеет ровно $m-1$ независимых фундаментальных единиц, и все они лежат в модуле Ω. Следовательно, многогранная гиперповерхность $\partial \boldsymbol{G}$ размерности $m-1$ имеет ровно $m-1$ независимых периодов. Доказательство окончено.

Алгоритмы, обобщающие цепную дробь, позволяют находить периоды многогранников $\boldsymbol{G}$ и по ним — фундаментальные единицы поля $\mathbb{Q}(\lambda)$ (см. [1]–[6]).

Теперь один из векторов L_i, $i = 1, \ldots, m$ в (12) заменим произвольным вектором L'_i с сохранением вещественности или комплексности вектора L_i и свойства невырожденности (4), и вместо формы $f_i(X)$ рассмотрим форму

$$f'_i(X) = \langle L'_i,\, X\rangle, \text{ если } i \leqslant l,$$

$$f'_i(X) = \langle L'_i,\, X\rangle \langle \bar{L}'_i,\, X\rangle, \text{ если } i > l.$$

Пусть пересечение U корневых подпространств $\mathcal{L}_j$ всех нештрихованных форм ($j \neq i$) отлично от нуля, а пересечение подпространства U с корневым подпространством $\mathcal{L}'_i$ формы $f'(X)$ состоит только из нуля $X = 0$. Тогда поверхность $\partial \boldsymbol{G}'$, соответствующая $m - 1$ старым нештрихованным формам и одной штрихованной форме, будет $m - 1$ периодической вблизи подпространства U. Это обобщение теоремы Лагранжа о периодичности цепной дроби для квадратичной иррациональности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Брюно А. Д.* Обобщения цепной дроби// Чебышевский сборник. 2006. Т. 7. N 3. С. 4–71.

[2] *Брюно А. Д.* Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Т. 402. N 4. С. 439–444.

[3] *Брюно А. Д.* Обобщение алгоритма цепной дроби // ДАН. 2005. Т. 402. N 6. С. 732–736.

[4] *Брюно А. Д., Парусников В. И.* Дальнейшее обобщение цепной дроби // ДАН. 2006. Т. 410. N 1. С. 12–16.

[5] *Брюно А. Д., Парусников В. И.* Двустороннее обобщение цепной дроби // ДАН. 2009. Т. 429. N 6. С.727–730

[6] *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. Второе изд. М.: Наука, 1972. 496 с.