Брюно А.Д., Гриднев А.В.

Нестепенные разложения решений третьего уравнения Пенлеве

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно и А.В. Гриднев

НЕСТЕПЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Москва, 2010 г.

УДК 629.7

А.Д. Брюно и А.В. Гриднев. Нестепенные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Рассматривается третье уравнение Пенлеве в случае, когда все четыре его комплексных параметра отличны от нуля. Для этого случая все семейства степенных разложений его решений близи нуля и бесконечности были найдены в препринте № 51 за 2003 г. Здесь вычислены экспоненциальные добавки к степенным разложениям решений вблизи бесконечности (§1), все семейства степенно-логарифмических разложений решений вблизи нуля (§2) и все семейства сложных разложений его решений вблизи нуля (§3).

A.D. Bruno and A.V. Gridnev. Nonpower expansions of solutions to the third Painlevé equation. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

We consider the third Painlevé equation in the case when all its four complex parameters are non-zero. For this case, all families of power expansions of its solutions near zero and infinity have been found in the preprint no. 51 for 2003. Here we calculate exponential additions to power expansions of its solutions near infinity (§1), all families of power-logarithmic expansions of its solutions near zero (§2) and all families of complicated expansions of its solutions near zero (§3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00082.

E-mails: abruno@keldysh.ru aleksei.gridnev@gmail.com
Сайт: www.keldysh.ru

Введение

Третье уравнение Пенлеве имеет вид

$$\ddot{w} = \frac{\dot{w}^2}{w} - \frac{\dot{w}}{t} + \frac{aw^2 + b}{t} + cw^3 + \frac{d}{w}, \tag{0.1}$$

где $t \in \mathbb{C}$ — независимая переменная, $w(t)$ — неизвестная функция, a, b, c и d — комплексные параметры, $bd \neq 0$, $\dot{w} = dw/dt$. У этого уравнения имеются две особые точки: $t = 0$ и $t = \infty$. В работе для случая общего положения, когда все параметры a, b, c и d отличны от нуля:

$$abcd \neq 0, \tag{0.2}$$

ищутся асимптотические разложения решений уравнения (0.1) в окрестности $t = 0$ и $t = \infty$ вида

$$w = c_r t^r + \sum_s c_s t^s,$$

где r, $s \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}\,r > \mathrm{Re}\,s$, если $t \to \infty$ и $\mathrm{Re}\,r < \mathrm{Re}\,s$, если $t \to 0$; c_r, c_s — либо постоянные, либо многочлены от $\ln t$, либо ряды по убывающим степеням $\ln t$. А именно, будем различать три типа таких разложений:

1) c_r, c_s — комплексные постоянные (*степенные разложения*);

2) c_r — постоянная, c_s — могут быть многочленами от $\ln t$ (*степенно-логарифмические разложения*);

3) c_r, c_s — ряды по убывающим степеням $\ln t$ (*сложные разложения*).

Разложения типов 1 и 2 изучены в препринте [1]. После умножения уравнения (0.1) на общий знаменатель tw оно записывается в виде

$$f(t, w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\ddot{w}wt - \dot{w}w + \dot{w}^2 t + w(aw^2 + b) + t(cw^4 + d) = 0. \tag{0.3}$$

1 Экспоненциальные добавки к разложениям решений

Согласно § 7 [20] экспоненциальные добавки могут иметь только разложения, соответствующие ребру $\Gamma_3^{(1)}$. Его укороченное уравнение (4.21) [1] есть

$$\hat{f}_3^{(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} dt + ctw^4 = 0. \tag{1.1}$$

Очевидно порядок производной $\Delta(\hat{f}_3^{(1)}) = 0 < 2 = \Delta(f)$. Укороченному уравнению (1.1) соответствуют четыре разложения (4.25) [1]

$$w_j = c_{0j} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-kj} t^{-k} = \varphi_j(t), \tag{1.2}$$

где согласно (4.22) [1]

$$c_{0j} = i^j \sqrt[4]{-\frac{d}{c}}, \quad i^2 = -1, \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{1.3}$$

а все остальные c_{-k} для фиксированного j однозначно определены.

Согласно § 7 [20] для каждого разложения (1.2) имеются две однопараметрические добавки вида

$$\psi_j(t) = c \exp\left[\alpha_{lj} \frac{t^{p+1}}{p+1} + \sum \gamma_{s+1,l}(\ln t) t^{s+1}\right] + \dots \; l = 1, 2,$$

где $\alpha_{lj} = \text{const}$, $\gamma_{s+1,l}$ – многочлены от $\ln t$. Найдем их начальные отрезки. Вычислим первую вариацию:

$$\frac{\delta f}{\delta w_j} = -\ddot{w}_j t - w_j t \frac{d^2}{dt^2} - \dot{w}_j - w_j \frac{d}{dt} + 2\dot{w}_j t \frac{d}{dt} + 3a w_j^2 + b + 4ct w_j^3. \tag{1.4}$$

Согласно § 7 [20] на разложении (1.2) вариация (1.4) дает оператор $\mathcal{M}(t)$. Вычислим все те дифференциальные мономы $a_{lj}(t, u_j)$ суммы $\mathcal{M}(t)u_j$, у которых векторные показатели степени $Q(a_{lj}) = (q_1, 1)$ имеют $q_1 \geq -1$, и их суммы обозначим через $\mathcal{N}(t)u_j$. Согласно (1.2) и (1.4) получаем

$$\mathcal{N}(t) = -c_{0j} t \frac{d^2}{dt^2} - c_{0j} \frac{d}{dt} + 3a\left(c_{0j}^2 + \frac{2c_{-1j}c_{0j}}{t}\right) + b +$$

$$+4ct\left(c_{0j}^3 + \frac{3c_{0j}^2 c_{-1j}}{t} + \frac{3c_{0j}c_{-1j}^2}{t^2} + \frac{3c_{0j}^2 c_{-2j}}{t^2}\right).$$

Произведем дальнейшие вычисления, используя оператор $\mathcal{N}(t)$ вместо оператора $\mathcal{M}(t)$. Уравнение $\mathcal{N}(t)u_j$ имеет вид:

$$\mathcal{N}(t)u_j = -c_{0j} t \ddot{u}_j - c_{0j}\dot{u}_j + 3a\left(c_{0j}^2 + \frac{2c_{-1j}c_{0j}}{t}\right) u_j + b u_j +$$

$$+4ct\left(c_{0j}^3 + \frac{3c_{0j}^2 c_{-1j}}{t} + \frac{3c_{0j}c_{-1j}^2}{t^2} + \frac{3c_{0j}^2 c_{-2j}}{t^2}\right) u_j = 0.$$

Сделаем логарифмическое преобразование. Пусть $\xi_j = \ln u_j$, тогда

$$u_j = e^{\xi_j}, \quad \dot{u}_j = e^{\xi_j}\dot{\xi}_j = u_j \dot{\xi}_j, \quad \ddot{u}_j = e^{\xi_j}(\dot{\xi}_j)^2 + e^{\xi_j}\ddot{\xi}_j = u_j((\dot{\xi}_j)^2 + \ddot{\xi}_j).$$

Подставим эти выражения в уравнение $\mathcal{N}(t)u_j = 0$ и сократим на $c_{0j}u_j$:

$$\tilde{h}_j \stackrel{\text{def}}{=} -t((\dot{\xi}_j)^2 + \ddot{\xi}_j) - \dot{\xi}_j + 3a\left(c_{0j} + \frac{2c_{-1j}}{t}\right) + \frac{b}{c_{0j}} +$$

$$+4ct\left(c_{0j}^2+\frac{3c_{0j}c_{-1j}}{t}+\frac{3c_{-1j}^2}{t^2}+\frac{3c_{0j}c_{-2j}}{t^2}\right)=0.$$

Обозначим $\zeta_j=\dot{\xi}_j$, тогда

$$\tilde{h}_j=-t(\zeta_j^2+\dot{\zeta}_j)-\zeta_j+3a\left(c_{0j}+\frac{2c_{-1j}}{t}\right)+\frac{b}{c_{0j}}+$$

$$+4ct\left(c_{0j}^2+\frac{3c_{0j}c_{-1j}}{t}+\frac{3c_{-1j}^2}{t^2}+\frac{3c_{0j}c_{-2j}}{t^2}\right)=0. \quad (1.5)$$

Носитель и многоугольник сумм $\tilde{h}_j$ показан на рисунке 1. Из него видно, что

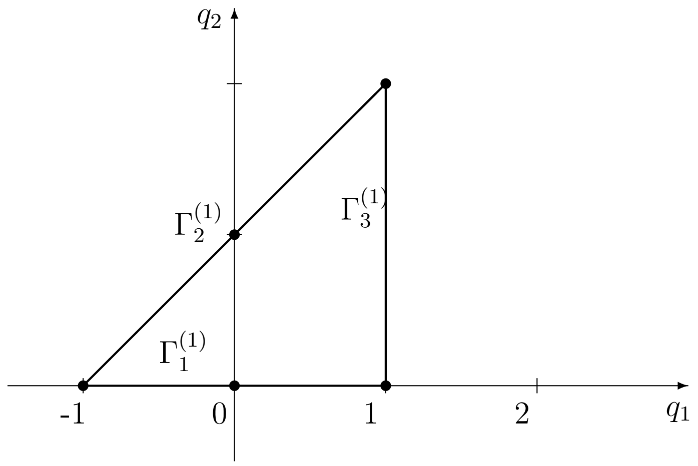

Рис. 1: Носитель и многоугольник суммы $\tilde{h}$

с конусом задачи

$$\widetilde{\mathcal{K}}=\left\{\tilde{P}=(\tilde{p}_1,\tilde{p}_2):\tilde{p}_1+\tilde{p}_2>0\right\}$$

пересекаются только нормальные конусы вертикального ребра $\Gamma_3^{(1)}$ и его вершин. Но укорочения, соответствующие вершинам, не дают подходящих решений. Вертикальному ребру соответствует укороченное уравнение

$$\hat{h}_j=-t\zeta_j^2+4ctc_{0j}^2=0.$$

Его решения суть

$$\zeta_j=\alpha_{lj}\overset{\text{def}}{=}(-1)^l2c_{0j}\sqrt{c}=(-1)^l2i^j\sqrt[4]{-cd},\quad l=1,2. \quad (1.6)$$

Поскольку параллельно перенесенный носитель уравнения

$$h(t,\zeta_j)=u_j^{-1}\mathcal{M}(t)u_j=0 \quad (1.7)$$

расположен в решетке с базисом $(2,0)$, $(1,1)$, а носитель укороченного решения (1.6) — это вектор $(0,1)$, то все они расположены в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$. Поэтому соответствующие (1.6) разложения решений уравнения $\tilde{h} = 0$ имеют вид

$$\zeta_j = \alpha_{lj} + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{-klj} t^{-k}. \tag{1.8}$$

Вычислим коэффициент δ_{-1lj}. Поставим $\zeta_j = \alpha_{lj} + \delta_{-1lj} t^{-1}$ в уравнение (1.7) и, приравнивая нулю коэффициент при t^0, получим для δ_{-1lj} уравнение

$$-2\alpha_{lj}\delta_{-1lj} - \alpha_{lj} + 3ac_{0j} + \frac{b}{c_{0j}} + 12cc_{0j}c_{-1j} = 0,$$

отсюда

$$\delta_{-1lj} = \frac{3ac_{0j}}{2\alpha_{lj}} + \frac{b}{2c_{0j}\alpha_{lj}} + \frac{12cc_{0j}c_{-1j}}{2\alpha_{lj}} - \frac{1}{2} = -(-1)^j(-1)^l \frac{b}{2\sqrt{-d}} - \frac{1}{2}.$$

В разложении (1.8) все δ_{-klj} однозначно определенные постоянные.

Согласно замечанию 7.4 [20] экспоненциальную добавку к разложению (1.8) решения уравнения (1.7) находить не нужно, она отсутствует. Таким образом, доказана

Теорема 1.1 *Решения, близкие к разложениям* (1.2), *имеют вид*

$$w_j = \varphi_j(t) + \tilde{c} t^{\delta_{-1lj}} \exp\left[\alpha_{lj} t + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{-klj} t^{-k}\right],$$

где $\tilde{c}$ *— произвольная постоянная, все* γ_{-klj} *— однозначно определенные постоянные, а* $\operatorname{Re}[\alpha_{lj} t] < 0$, *то есть для каждого* j *имеется две добавки: одна из них в полуплоскости* $\operatorname{Re}[\alpha_{1j} t] < 0$, *а другая —* $\operatorname{Re}[\alpha_{1j} t] > 0$, *поскольку добавка должна стремиться к нулю при* $|t| \to \infty$. *Постоянные* α_{lj} *и* δ_{-1lj} *вычисляются по* (1.6) *и* (1.9) *соответственно.*

2 Степенно-логарифмические разложения решений

2.1. Степенно-логарифмические разложения решений дифференциального уравнения см. в § 3 [20].

Вернемся к уравнению (0.3). Для его решений степенно-логарифмические разложения возможны только в двух случаях:

1) когда $\xi = b/\sqrt{-d}$ является вещественным четным числом ($\operatorname{Im}(\xi) = 0$, $|\xi|$ четное);

2) когда $\eta = a/\sqrt{c}$ является вещественным четным числом ($\operatorname{Im}(\eta) = 0$, $|\eta|$ — четное).

То есть степенно-логарифмические разложения решений уравнения (0.3) могут возникать только при рассмотрении ребер $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$ многоугольника уравнения.

2.2. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Пусть для определенности $|\xi| = 2$. В этом случае критическое число $k = 1 + |\xi| = 3$ попадает в множество

$$\mathbf{K} = \{k = q_1 > 1, q_1 \text{ — целые нечетные}\}. \qquad (2.1)$$

Множество $\mathbf{K}(1+|\xi|)$ совпадает с множеством (2.1). При этом в разложении решения могут появляться логарифмы для β_k с $k \geq 3$. Для определения коэффициента β_3 воспользуемся леммой 3.1 [20].

Напомним, что для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ оператор $\mathcal{L}(t)$ имеет вид

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\delta \hat{f}_1^{(1)}}{\delta w} = -c_1 t^2 \frac{d^2}{dt^2} - c_1 - c_1 t \frac{d}{dt} + 2c_1 t \frac{d}{dt} + b \not\equiv 0, \qquad (2.2)$$

функция

$$\nu(k) = -c_1(k^2 - 2k + 1) + b, \quad \text{где} \quad c_1 = -\frac{d}{b}. \qquad (2.3)$$

Носитель выражения $\mathcal{L}(t)u$ состоит из одной точки $(0,1)$. Следовательно, число $v = 0$. Подставим в исходное уравнение (0.3) начальный отрезок разложения решения $w = c_1 t$:

$$f\,(t, c_1 t) = a c_1^3 t^3 + c c_1^4 t^5 = 0. \qquad (2.4)$$

Коэффициент при t^3 равен $\theta_3 = a c_1^3$. При $k = 3$ обыкновенное дифференциальное уравнение (3.7) [20] имеет вид

$$\nu(3)\beta_3(\psi) + \nu'(3)\beta_3'(\psi) + \frac{1}{2}\nu''(3)\beta_3''(\psi) + \theta_3 = 0, \qquad (2.5)$$

где $\nu(3) = 0$, $\nu'(3) = -4c_1$, $\nu''(3) = -2c_1$, $\beta_3'(t) = d\beta/d\psi$. Так как предполагается, что все параметры a, b, c, d отличны от нуля (условие (0.2)), то $\theta_3 \not\equiv 0$ и условие совместности не выполнено. Поэтому в разложении присутствуют логарифмы. После подстановки значений получим уравнение

$$-4c_1\beta_3'(\psi) - c_1\beta_3''(\psi) + a c_1^3 = 0.$$

Оно имеет решение

$$\beta_3(\psi) = \frac{a c_1^2}{4}\psi + c_{32},$$

где c_{32} — произвольная постоянная. Аналогично можно вычислить коэффициент $\beta_5(\psi)$. Он равен

$$\beta_5(\psi) = \frac{a^2 c_1^3}{16}\psi - \frac{7a^2 c_1^3}{192} + \frac{a c_1 c_{32}}{4} + \frac{c c_1^3}{12}.$$

Таким же образом последовательно находятся все остальные коэффициенты разложения. Окончательно для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ при $|\xi| = 2$ получаем семейство разложений

$$w = -\frac{d}{b}t + \left(\frac{ad^2}{4b^2}\ln t + c_{32}\right)t^3 + \left(-\frac{a^2d^3}{16b^3}\ln t + \frac{7a^2d^3}{192b^3} - \frac{adc_{32}}{4b} - \frac{cd^3}{12b^3}\right)t^5 + \dots, \tag{2.6}$$

где c_{32} — произвольная постоянная и учтено, что $c_1 = -d/b$.

Пусть теперь $|\xi| = 4$. Тогда критическое число $k = 1 + |\xi| = 5$. В этом случае k снова попадает в множество (2.1), множество $\mathbf{K}(1 + |\xi|)$ совпадает с множеством (2.1) и в разложении решения могут появляться логарифмы для β_k с $k \geq 5$.

Снова пользуясь леммой 3.1 [20], определим последовательно коэффициенты разложения решения. Для определения коэффициента β_3 сделаем подстановку $w = c_1 t$ в уравнение (0.3) и снова получим, что $\theta_3 = ac_1^3$. Для коэффициента $\beta_3(\psi)$ при t^3 обыкновенное дифференциальное уравнение (3.7) [20] также имеет вид (2.5). Здесь $\nu(3) = -4c_1 + b$, $\nu'(3) = -4c_1$, $\nu'' = -2c_1$. Учитывая условие (0.2), получим, что $\theta_3 \not\equiv 0$. После подстановки значений получим уравнение

$$(-4c_1 + b)\,\beta_3(\psi) - 4c_1\beta_3'(\psi) - c_1\beta_3''(\psi) + ac_1^3 = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$\beta_3(\psi) = \tilde{c}_1 e^{2\psi} + \tilde{c}_2 e^{-6\psi} - \frac{ac_1^3}{b - 4c_1},$$

где $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$ — произвольные постоянные. Полагая здесь $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ равными нулю, получим, что коэффициент $\beta_3(\psi) = c_3$ является постоянным и равен

$$c_3 = -\frac{ac_1^3}{b - 4c_1} = \frac{ad^3}{b^2\,(4d + b^2)}. \tag{2.7}$$

Он имеет тот же самый вид, что и коэффициент (4.15) [1].

Вычислим теперь коэффициент $\beta_5(\psi)$. Для этого сделаем подстановку $w = c_1 t + c_3 t^3$ в уравнение (0.3):

$$f\left(t, c_1 t + c_3 t^3\right) = \left(2ac_1^2c_3 + cc_1^4\right)t^5 + \left(ac_1c_3^2 + 4cc_1^3c_3\right)t^7 +$$
$$+6cc_1^2c_3^2t^9 + 4cc_1c_3^3t^{11} + cc_3^4t^{13} = 0.$$

Коэффициент при t^5 равен $\theta_5 = 2ac_1^2c_3 + cc_1^4$. Выразим коэффициент θ_5 через параметры исходного уравнения, учитывая что $c_1 = -d/b$, а c_3 определяется соотношением (2.7):

$$\theta_5 = \frac{d^4}{b^4}\left[\frac{2a^2d + c(4d + b^2)}{4d + b^2}\right].$$

Так как $|\xi| = |b/\sqrt{-d}| = 4$, то знаменатель в квадратной скобке не равен нулю. Также учитывая $|\xi| = 4$, получаем, что числитель равен нулю, если

$$a^2 - 6c = 0. \tag{2.8}$$

Условие (2.8) является условием совместности для критического числа $k = 5$. Если оно выполнено, то в разложении

$$u = \sum \beta_s(\ln z) z^s$$

коэффициенты β_s являются постоянными числами. В противном случае β_s — многочлены от $\ln t$. Для коэффициента $\beta_5(\psi)$ имеем $\nu(5) = 0$, $\nu'(5) = -8c_1$, $\nu''(5) = -2c_1$, поэтому обыкновенное дифференциальное уравнение (2.4) будет иметь вид

$$-8c_1\beta_5'(\psi) - c_1\beta_5''(\psi) + 2ac_1^2c_3 + cc_1^4 = 0.$$

Частное решение этого уравнения есть

$$\beta_5(\psi) = \left(\frac{ac_1c_3}{4} + \frac{cc_1^3}{8}\right)\psi + c_{52},$$

где c_{52} — произвольная постоянная. Окончательно для ребра $\Gamma_1^{(1)}$ при $|\xi| = 4$ получаем семейство разложений

$$w = c_1t + c_3t^3 + \left[\left(\frac{ac_1c_3}{4} + \frac{cc_1^3}{8}\right)\ln t + c_{52}\right]t^5 + \ldots, \tag{2.9}$$

где $c_1 = -d/b$, c_3 определяется соотношением (2.7), c_{52} — произвольная постоянная.

Обобщая данные рассуждения на другие значения $|\xi|$, получим общую формулу семейства разложений решений уравнения (0.3), соответствующих ребру $\Gamma_1^{(1)}$:

$$w = c_1t + \sum_{k=1}^{-1+|\xi|/2} c_{2k+1}t^{2k+1} + \sum_{k=|\xi|/2}^{\infty} \beta_{2k+1}t^{2k+1}, \tag{2.10}$$

где $c_1 = -d/b$, c_{2k+1} — однозначно определенные числа, β_{2k+1} — многочлены от $\ln t$, $\beta_{1+|\xi|}$ — многочлен первой степени от $\ln t$ с произвольным свободным членом. При этом для критического числа $1 + |\xi|$ в уравнении (3.7) [20] не выполняется условие совместности $\theta_{1+|\xi|} \equiv 0$.

2.3. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_2^{(1)}$. Используя симметрию

$$(z, w, a, b, c, d) = (z, 1/w^*, -b^*, -a^*, -d^*, -c^*),$$

которой обладает уравнение (0.3), из степенно-логарифмических разложений (2.10), соответствующих ребру $\Gamma_1^{(1)}$, для ребра $\Gamma_2^{(1)}$ получаем следующие степенно-логарифмические разложения:

$$w = c_{-1}t^{-1} + \sum_{k=1}^{-1+|\eta|/2} c_{2k-1}t^{2k-1} + \sum_{k=|\eta|/2}^{\infty} \beta_{2k-1}t^{2k-1}, \tag{2.11}$$

где $c_{-1} = -a/c$, c_{2k-1} — однозначно определенные числа, β_{2k-1} — многочлены от $\ln t$, $\beta_{-1+|\eta|}$ — многочлен первой степени от $\ln t$ с произвольным свободным членом. При этом для критического числа $1 + |\eta|$ в уравнении (2.4) не выполняется условие совместности $\theta_{1+|\eta|} \equiv 0$.

2.4. Сводка результатов и их обсуждение. Итак, в §2 доказана

Теорема 2.1 1) *Пусть* $\xi = b/\sqrt{-d}$. *Если* $\mathrm{Im}(\xi) = 0$ *и* $|\xi|$ *является четным числом, то уравнение* (0.3) *в окрестности точки* $t = 0$ *имеет степенно-логарифмическое разложение решений, определяемое уравнением* (2.10).

2) *Пусть* $\eta = a/\sqrt{c}$. *Если* $\mathrm{Im}(\eta) = 0$ *и* $|\eta|$ *является четным числом, то уравнение* (0.3) *в окрестности точки* $t = 0$ *имеет степенно-логарифмическое разложение решений, определяемое уравнением* (2.11).

Замечание 2.1 *Вопрос сходимости степенно-логарифмических рядов пока открыт, поэтому разложения* (2.10) *и* (2.11) *считаем формальными.*

3 Сложные разложения решений

3.1. Сложные разложения решений дифференциального уравнения см. в § 5 [20] и в [21].

Рассмотрим грани многоугольника уравнения (0.3) и соответствующие им укороченные уравнения. Так как граням $\Gamma_1^{(0)}$, $\Gamma_3^{(0)}$, $\Gamma_3^{(1)}$ соответствуют алгебраические укороченные уравнения, то для них нет нестепенных решений.

Рассмотрим теперь вершину $\Gamma_2^{(0)}$. Укороченное уравнение, соответствующее этой вершине, имеет вид

$$\hat{f}_2^{(0)} = -\ddot{w}wt - \dot{w}w + \dot{w}^2 t = 0. \tag{3.1}$$

Согласно § 5 [20] выполним логарифмическое преобразование. Сделаем его по частям. Положим сначала

$$\xi = \ln t, \quad \text{тогда} \quad \dot{w} = \frac{w'}{t}, \quad \ddot{w} = \frac{w'' - w'}{t^2}. \tag{3.2}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ξ. После подстановки (3.2) в уравнение (3.1), сокращения уравнения на t^{-1} и приведения подобных получим

$$-w''w + (w')^2 = 0. \tag{3.3}$$

Далее положим

$$\eta = \ln w, \quad \text{тогда} \quad w = e^{\eta}, \quad w' = e^{\eta}\eta', \quad w'' = e^{\eta}\left(\eta'' + (\eta')^2\right). \tag{3.4}$$

После подстановки (3.4) в уравнение (3.3), сокращения на e^{η} и приведения подобных получится уравнение $\eta'' = 0$. Его общее решение есть $\eta = c_1\xi + c_2$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$w = e^{c_1 \ln t + c_2} = e^{c_2} t^{c_1}.$$

Так как данное решение является степенным, оно не является решением искомого вида. Поэтому его не рассматриваем. Рассмотрим оставшиеся два ребра: $\Gamma_1^{(1)}$ и $\Gamma_2^{(1)}$.

3.2. Разложения решений, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$. Рассмотрим снова ребро $\Gamma_1^{(1)}$ многоугольника уравнения (0.3). Соответствующее укороченное уравнение имеет вид:

$$\hat{f}_1^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} -tw\ddot{w} - w\dot{w} + t\dot{w}^2 + bw + dt = 0. \tag{3.5}$$

Сделаем степенное преобразование

$$w = yt. \tag{3.6}$$

В этом случае уравнение (3.5) примет вид:

$$\tilde{f}(t, y) = \hat{f}_1^{(1)}(t, yt) = -t^3 y\ddot{y} - t^2 y\dot{y} + t^3 (\dot{y})^2 + byt + dt = 0.$$

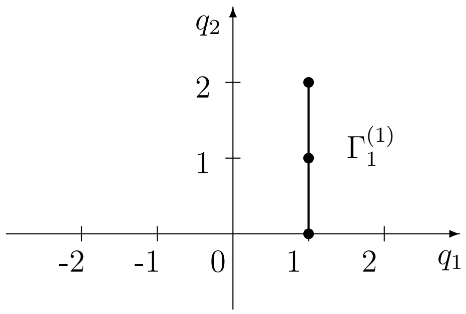

Рис. 2: Ребро $\Gamma_1^{(1)}$ после преобразования (3.6)

Ребро $\Gamma_1^{(1)}$ после степенного преобразования (3.6) перейдет в вертикальное ребро (рис. 2). Ребро $\Gamma_1^{(1)}$ соединяет вершины $\Gamma_1^{(0)} = (q_1', q_2') = (1, 0)$ и $\Gamma_2^{(0)} = (q_1', q_2'') = (1, 2)$. Положим

$$g(t, y) = t^{-1}\tilde{f}(t, y) = -t^2 y\ddot{y} - ty\dot{y} + t^2 (\dot{y})^2 + by + d = 0. \tag{3.7}$$

Тогда функция

$$\tilde{g}(y) = g(0, y) = by + d = 0. \tag{3.8}$$

Единственный корень этого уравнения $y^0 = -d/b$.

Так как $\tilde{g}'(y) = b$, $\tilde{g}'(0) = b \neq 0$, то y^0 не является кратным корнем.

Так как $q_2' = 0$, а у многочлена в уравнении (3.8) наименьшая степень y не больше 0, то уравнение (3.8) не имеет нулевого корня.

Так как $q_2'' = 2$, а степень многочлена в уравнении (3.8) равна 1, то уравнение (3.8) имеет бесконечный корень.

Сделаем в уравнении (3.7) логарифмическое преобразование

$$\xi = \ln t. \tag{3.9}$$

Так как $|\xi| \to \infty$ при $t \to 0$, то конус задачи имеет вид

$$\mathcal{K} = \{p_1 \geq 0\}. \tag{3.10}$$

Обозначим $\dfrac{dy}{d\xi} \stackrel{\text{def}}{=} y'$. Тогда $\dot{y} = y'\dot{\xi}$, $\ddot{y} = t^{-2}(y'' - y')$. При преобразовании (3.9) уравнение (3.7) перейдет в уравнение

$$h(\xi, y) = -yy'' + (y')^2 + by + d = 0. \tag{3.11}$$

Теперь нашей задачей является нахождение степенных разложений решений уравнения (3.11), удовлетворяющих конусу задачи (3.10).

Носитель уравнения (3.11) состоит из трех точек

$$Q_1 = (0,0), Q_2 = (-2,2), Q_3 = (0,1).$$

Многоугольником уравнения $\Gamma(h)$ является треугольник с вершинами в этих точках. Гранями многоугольника $\Gamma(h)$ являются три вершины

$$\Gamma_1^{(0)} = Q_1, \quad \Gamma_2^{(0)} = Q_2, \quad \Gamma_3^{(0)} = Q_3$$

и три ребра

$$\Gamma_1^{(1)} = \{Q_1Q_2\}, \quad \Gamma_2^{(1)} = \{Q_2Q_3\}, \quad \Gamma_3^{(1)} = \{Q_3Q_1\}.$$

Носитель и многоугольник уравнения (3.11) показаны на рис. 3.

Нормальными конусами граней $\Gamma_j^{(d)}$ являются следующие множества: $\mathbf{U}_1^{(0)} = \{p_2 < p_1, p_2 < 0\}$, $\mathbf{U}_2^{(0)} = \{p_2 > 2p_1, p_2 > p_1\}$, $\mathbf{U}_3^{(0)} = \{p_2 < 2p_1, p_2 > 0\}$, $\mathbf{U}_1^{(1)} = \{p_1 = p_2, p_1 < 0\}$, $\mathbf{U}_2^{(1)} = \{p_2 = 2p_1, p_1 > 0\}$, $\mathbf{U}_3^{(1)} = \{p_2 = 0, p_1 > 0\}$.

С конусом задачи $\mathcal{K}$ пересекаются следующие конусы: $\mathbf{U}_1^{(0)}$, $\mathbf{U}_2^{(0)}$, $\mathbf{U}_3^{(0)}$, $\mathbf{U}_2^{(1)}$, $\mathbf{U}_3^{(1)}$. Соответствующие укороченные уравнения имеют вид:

$$\hat{h}_1^{(0)} = d = 0, \tag{3.12}$$

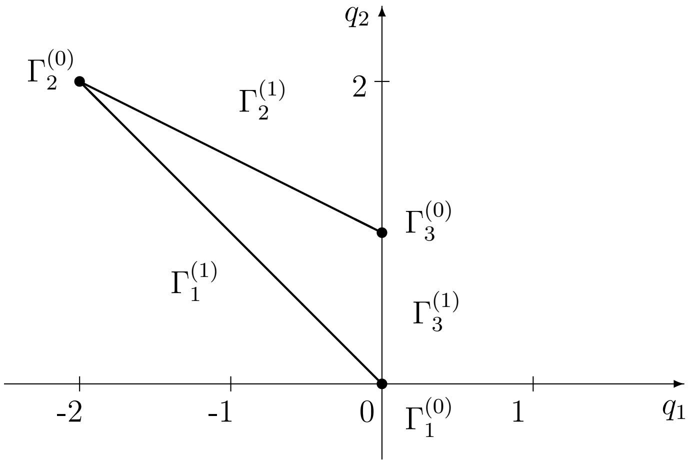

Рис. 3: Носитель и многоугольник уравнения (3.11)

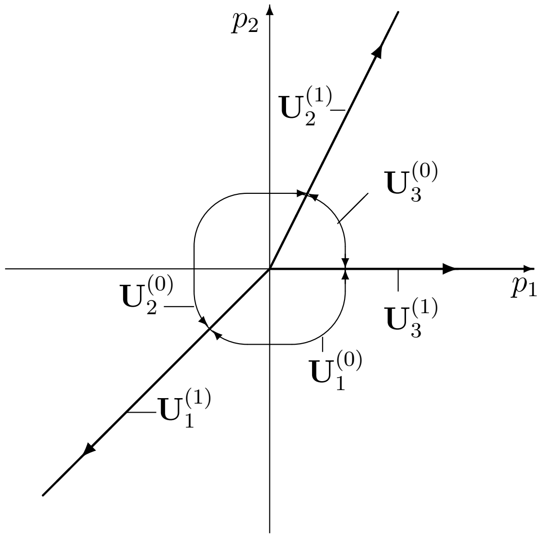

Рис. 4: Нормальные конусы граней $\Gamma_j^{(d)}$

$$\hat{h}_2^{(0)} = -yy'' + (y')^2 = 0, \tag{3.13}$$

$$\hat{h}_3^{(0)} = by = 0, \tag{3.14}$$

$$\hat{h}_2^{(1)} = -yy'' + (y')^2 + by = 0, \tag{3.15}$$

$$\hat{h}_3^{(1)} = by + d = 0. \tag{3.16}$$

Алгебраические укороченные уравнения (3.12) и (3.14) не имеют подходящих степенных решений, т.е. не дают нестепенных асимптотик решений исходного уравнения. Уравнение (3.16) имеет решение $y = -d/b$, которое является точным решением уравнения (3.11). После возврата к исходным переменным получим $w = -(d/b)t$. Это степенное решение уравнения (3.5). Оно было найдено раньше в п. 4.3 [1].

Рассмотрим оставшиеся две грани: вершину $\Gamma_2^{(0)}$ и ребро $\Gamma_2^{(1)}$. Вершине $\Gamma_2^{(0)}$ соответствует укороченное уравнение (3.13). Обозначим через $\theta(\xi, y)$ функцию

$$\theta(\xi, y) = \xi^2 y^{-2} \hat{h}_2^{(0)}.$$

Функция $\chi(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta(\xi, \xi^r)$ не зависит от ξ. Характеристическое уравнение

$$\chi(r) = -r(r-1) + r^2 = r = 0$$

имеет единственный корень $r = 0$. Так как укороченное решение имеет нормальный вектор $(1, 0)$, а он не пересекается с конусом $\mathbf{U}_2^{(0)}$, то это решение не годится. Таким образом, для $\Gamma_2^{(0)}$ нет подходящих степенных решений.

Ребру $\Gamma_2^{(1)}$ соответствует укороченное уравнение (3.15). Здесь первое приближение решения имеет вид

$$y = \tilde{c}\xi^2, \quad \tilde{c} \neq 0. \tag{3.17}$$

Для определения коэффициента $\tilde{c}$ подставим выражение (3.17) в уравнение (3.15):

$$\hat{h}_2^{(1)} = -2\tilde{c}^2\xi^2 + 4\tilde{c}^2\xi^2 + b\tilde{c}\xi^2 = \xi^2\left(2\tilde{c}^2 + b\tilde{c}\right) = 0,$$
$$2\tilde{c}^2 + b\tilde{c} = 0.$$

Это уравнение имеет два корня: $\tilde{c}_1 = 0$ и $\tilde{c}_2 = -b/2$. Корень $\tilde{c}_1$ не подходит, так как предполагается, что $\tilde{c} \neq 0$. Таким образом, первое приближение решения имеет вид

$$y = -\frac{b}{2}\xi^2.$$

Вычислим следующие члены разложения степенного решения. Для этого определим критические числа решения. При этом конус задачи $\mathcal{K} = \{s < 2\}$. Первая вариация функции $\hat{h}_2^{(1)}$ имеет вид

$$\frac{\delta \hat{h}_2^{(1)}}{\delta y} = -y'' - y\frac{d^2}{d\xi^2} + 2y'\frac{d}{d\xi} + b. \tag{3.18}$$

Сделаем подстановку $y = -b/2\xi^2 + u$ в уравнение (3.11):

$$h\left(\xi, -\frac{b}{2}\xi^2 + u\right) = \frac{b}{2}\xi^2 u'' - 2b\xi u' + 2bu - uu'' + (u')^2 + d = 0. \tag{3.19}$$

Носитель уравнения (3.18) совпадает с носителем уравнения (3.11) и показан на рис. 3. Подставляя $y = b\xi^2/2$ в (3.18), получаем оператор

$$\mathcal{L}(\xi) = b + \frac{b}{2}\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} - 2b\xi\frac{d}{d\xi} + b,$$

$$\mathcal{L}(\xi) = \frac{b}{2}\xi^2\frac{d^2}{d\xi^2} - 2b\xi\frac{d}{d\xi} + 2b.$$

Выражению $\mathcal{L}(\xi)u$ в уравнении (3.19) соответствуют три первых слагаемых. Носитель этой суммы состоит из одной точки $Q = (v, 1) = (0, 1)$. Отсюда $v = 1$.

Характеристическое уравнение

$$\nu(k) = \xi^{-v-k}\mathcal{L}(\xi)\xi^k = \frac{b}{2}k(k-1) - 2bk + 2b$$

имеет два корня $k_1 = 1$, $k_2 = 4$.

Так как в конус задачи $\mathcal{K}$ попадает только k_1, то критическое число одно: $k_1 = 1$.

Определим теперь множество показателей степеней в степенном разложении. Для этого сделаем параллельный перенос носителя уравнения (3.19) так, чтобы точка $(0, 1)$ перешла в начало координат. При этом носитель $\mathbf{S}(h)$ уравнения (3.19) перейдет в множество $\mathbf{S}'(h) = \mathbf{S}(h) - (0, 1)$. Рассмотрим множество $\mathbf{S}'_+$ конечных сумм векторов $B_1 = (0, -1)$ и $B_2 = (-2, 1)$:

$$\mathbf{S}'_+ = \{nB_1 + mB_2,\ \text{целые}\ n, m \geq 0, n + m > 0\}.$$

Множество $\mathbf{S}'_+$ показано на рис. 5.

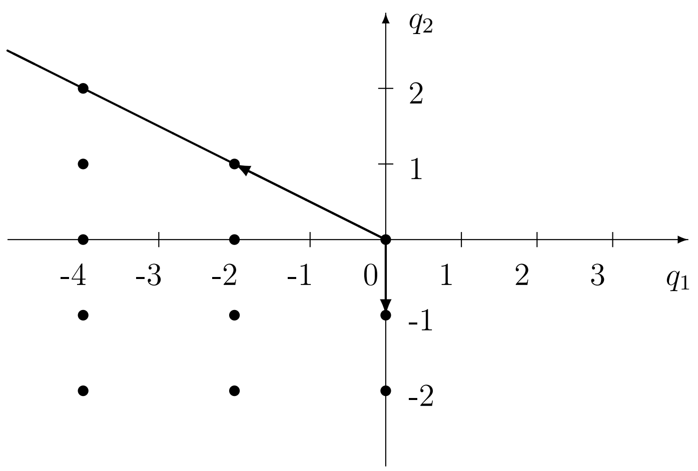

Рис. 5: Множество $\mathbf{S}'_+$

Множество $\mathbf{K} = \mathbf{S}'_+ \cap \{q_2 = -1\}$ имеет вид

$$\mathbf{K} = \{-2n, \quad n = 0, 1, \ldots\}. \tag{3.20}$$

Рассмотрим множество $\mathbf{S}'_+(k_1)$ конечных сумм векторов $B_1 = (0, -1)$ и $B_2 = (-2, 1)$ и вектора $(k_1, -1)$. Это множество можно описать следующим образом:

$$\mathbf{S}'_+(k_1) = \{nB_1 + mB_2 + l(k_1, -1),\ \text{целые}\ n, m, l \geq 0, n + m + l > 0).$$

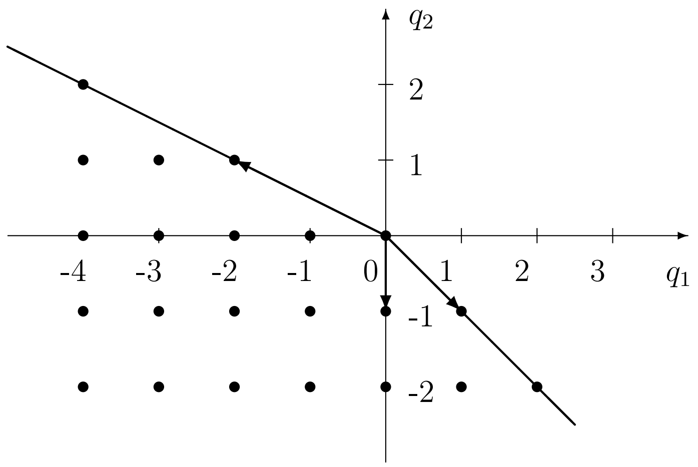

Рис. 6: Множество $\mathbf{S}'_+(k_1)$

Множество $\mathbf{S}'_+(k_1)$ показано на рис. 6.

Множество $\mathbf{K}(k_1) = \mathbf{S}'_+(k_1) \cap \{q_2 = -1\}$ имеет вид

$$\mathbf{K}(k_1) = \{n, \quad n = 1, 0, -1, \dots\} . \tag{3.21}$$

Так как единственное критическое значение $k_1 = 1$ не попадает в множество $\mathbf{K}$ из (3.20), то степенное разложение решения уравнения (3.11), соответствующее ребру $\Gamma_2^{(1)}$, имеет вид:

$$y = -\frac{b}{2}\xi^2 + c_1\xi + \sum_{s=0}^{\infty} c_{-s}\xi^{-s}, \tag{3.22}$$

где c_1 — произвольная постоянная, а остальные c_{-s} однозначно определены.

Возвращаясь к исходным переменным, мы получим нестепенное разложение решения уравнения (3.5):

$$w = t\left[-\frac{b}{2}(\ln t)^2 + c_1 \ln t + \sum_{s=0}^{\infty} c_{-s}(\ln t)^{-s}\right] \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 t, \tag{3.23}$$

где c_1 — произвольная постоянная, а остальные c_{-s} однозначно определены.

Теперь найдем критические значения решений (3.23) укороченного уравнения (3.5). Рассмотрим первую вариацию укороченного уравнения (3.5):

$$\frac{\delta \hat{f}_1^{(1)}}{\delta w} = -t\ddot{w} - tw\frac{d^2}{dt^2} - \dot{w} - w\frac{d}{dw} + 2t\dot{w}\frac{d}{dt} + b \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(t, w).$$

Так как $r = 1$, то степенное преобразование имеет вид:

$$w = tu.$$

Применив это преобразование к оператору $\mathcal{M}$, получим оператор $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N}(t, u) \stackrel{\text{def}}{=} -t(2\dot{u} + t\ddot{u}) - t^2u\frac{d^2}{dt^2} + 2t(u + t\dot{u})\frac{d}{dt} - (u + t\dot{u}) - tu\frac{d}{dt} + b.$$

Сделаем логарифмическую замену (3.9). Получим, что оператор $\mathcal{N}(\xi, u)$ имеет вид:

$$\tilde{\mathcal{N}}(\xi, u) \stackrel{\text{def}}{=} -2u' - u'' - u - u\frac{d^2}{d\xi^2} + 2u\frac{d}{d\xi} + 2u'\frac{d}{d\xi} + b.$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ξ. Для решений (3.23) имеем $u = -b/2\xi^2 + \ldots$ Поэтому в операторе $\tilde{\mathcal{N}}(\xi, u)$ члены старшей по ξ степени n имеют $n = 2$ и образуют оператор

$$\tilde{\mathcal{N}}_2 \stackrel{\text{def}}{=} -u\left[1 + \frac{d^2}{d\xi^2} - 2\frac{d}{d\xi}\right], \quad \text{где } u = -\frac{b}{2}\xi^2.$$

Этому оператору соответствует характеристическое уравнение

$$\nu(k) = -\frac{b}{2}\left(k^2 - 2k + 1\right) = -\frac{b}{2}\left(k-1\right)^2 = 0.$$

Оно имеет двукратный корень $k = 1 = r$, т.е. не дает критических значений. По теореме из [21] для решений исходного уравнения (0.3) существует единственное разложение

$$w = \varphi_r z^r + \sum_s \varphi_s z^s, \quad \omega s < \omega r.$$

При этом показатели s пробегают множество $\mathbf{K}$, определяемое соотношением (2.1):

$$\mathbf{K} = \{s = q_1 > 1, q_1 \text{ — целые нечетные}\},$$

все логарифмы в разложении являются простыми.

Таким образом, сложное разложение решения, соответствующее ребру $\Gamma_1^{(1)}$ имеет вид:

$$w = \varphi_1 t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k+1} t^{2k+1}. \tag{3.24}$$

Здесь $\varphi_1 t$ — это разложение (3.23), остальные φ_{2k+1} — ряды по убывающим степеням простых логарифмов.

3.3. Разложения, соответствующие ребру $\Gamma_2^{(1)}$. Используя симметрию, которой обладает уравнение (0.3), из сложных разложений (3.24), соответствующих ребру $\Gamma_1^{(1)}$, получаем следующие сложные разложения для ребра $\Gamma_2^{(1)}$:

$$w = \varphi_{-1} t^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{2k+1} t^{2k+1}, \tag{3.25}$$

где

$$\varphi_{-1} t^{-1} = \frac{1}{t}\left[\frac{2}{a}\left(\ln t\right)^{-2} + c_{-3}\left(\ln t\right)^{-3} + \sum_{s=-4}^{\infty} c_{-s}\left(\ln t\right)^{-s}\right],$$

где c_{-3} — произвольная постоянная, а остальные c_{-s} однозначно определены. Остальные φ_{2k+1} в разложении (3.25) — ряды по убывающим степеням простых логарифмов.

Итак, в § 3 доказана

Теорема 3.1 *Уравнение* (0.3) *в окрестности точки* $t = 0$ *имеет два семейства сложных разложений решений* (3.24) *и* (3.25).

Замечание 3.1 *Вопрос сходимости сложных рядов пока открыт, поэтому разложения* (3.24) *и* (3.25) *считаем формальными.*

Список литературы

[1] *Брюно А.Д., Гриднев А.В.*. Степенные и экспоненциальные разложения решений третьего уравнения Пенлеве. Препринт № 51. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2003. 32 с.

[2] *Bruno A.D.* Power geometry as a new calculus // Proceeding of ISAAC 2001. — Amsterdam: Kluwer, 2003.

[3] *Clarkson P.A.* The Painlevé Equations — Nonlinear Special Functions // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003. — Vol. 153(1-2). — Pp. 127–140.

[4] *Garnier R.* Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes // Ann. Sci. De l'Ecole Normale Superieure, 1912. — Tome 29. — P. 1–126.

[5] *Gridnev A.V.* Power Expansions of Solutions to the Modified Third Painleve Equation // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. — Суздаль, 2004. — С. 261–263.

[6] *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plane, Walter de Gruyter. — Berlin, New York, 2002. — 303 p.

[7] *Painlevé P.* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées a Stokholm. — Paris, 1897.

[8] *Painlevé P.* Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme// Bull. Soc. Math. France, 1900. — Tome 28. — P. 201–261.

[9] *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. — М.: Мир, 1987. — 480 с.

[10] *Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.* Асимптотическая математика и синергетика. — М.: УРСС, 2004. — 306 с.

[11] *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. — М.: Наука, 1989. — 101 с.

[12] *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков.: ГНТИУ, 1939. — 720 с.

[13] *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 254 с.

[14] *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях — М: Наука–Физматлит, 1998. — 288 с.

[15] *Брюно А.Д.* Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения. Препринт №9. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2000. — 22 с.

[16] *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт №9. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2003. — 39 с.

[17] *Брюно А.Д.* Степенно-логарифмические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Доклады АН, 2003. — Т. 392. — №4. — С. 439–444.

[18] *Брюно А.Д.* Нестепенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // Доклады АН, 2003. — Т. 392. — №5. — С. 586–591.

[19] *Брюно А.Д.* Асимптотически близкие решения обыкновенного дифференциального уравнения // Доклады АН, 2003. — Т. 393. — №4. — С. 448–452.

[20] *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи математических наук, 2004. — Т. 59. — Вып. 3 (357). — С. 31–80.

[21] *Брюно А.Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Доклады АН, 2006. — Т. 406. — №6. — С. 730–733.

[22] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 460 с.

[23] *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: УРСС, 2002. — 314 с.

[24] *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — 2-е изд. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 400 с.

[25] *Griднев А.В.* Алгоритм построения линий уровня нелинейного алгебраического уравнения в окрестности критической точки // Тезисы докладов Международной молодежной научной конференции "Гагаринские чтения — XXVIII". — М., 2002. — С. 62.

[26] *Гриднев А.В.* Программа построения линий уровня аналитической функции в окрестности критической точки // Тезисы докладов IX Всероссийского совещания по проблемам построения сеток для решения задач математической физики — Дюрсо, 2002. — С. 17.

[27] *Гриднев А.В.* Степенные и экспоненциальные разложения решений III уравнения Пенлеве // Тезисы докладов Международной молодежной научной конференции "Гагаринские чтения — XXIX". — М., 2003. — С. 72–73.

[28] *Гриднев А.В.* Исследование асимптотического поведения решений третьего уравнения Пенвеле методами степенной геометрии // Тезисы докладов XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. — М., 2004. — С. 41–42.

[29] *Гриднев А.В.* О степенных и экспоненциальных асимптотических разложениях третьего уравнения Пенлеве // Тезисы докладов Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XV". — Воронеж, 2004. — С. 64–65.

[30] *Гриднев А.В.* Исследование асимптотического поведения решений третьего уравнения Пенлеве методами степенной геометрии // Труды XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. — М., 2004. — С. 69–75.

[31] *Гриднев А.В.* Степенные и экспоненциальные асимптотики решений третьего уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения, 2004. — Т. 41. — № 6. — С. 855.

[32] *Гриднев А.В.* О степенных разложениях модифицированного третьего уравнения Пенлеве // Тезисы докладов Международной конференции

"Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященной 100-летию академика С.М. Никольского. — М., 2005. — С. 90.

[33] *Гриднев А.В.* Степенно-логарифмические разложения решений модифицированного третьего уравнения Пенлеве // Приложение к тезисам докладов Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". — Самара, 2005. — С. 2–3.

[34] *де Брёйн Н.Г.* Асимптотические методы в анализе. — М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 248 с.

[35] *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований; НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005. — 728 с.

[36] *Козлов В.В., Фурта С.Д.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. — М.: МГУ, 1996. — 244 с.

[37] *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. — 2-е изд. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

[38] *Ньютон Исаак.* Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых // Математические работы. — М.; Л.: ОНТИ, 1937. — С. 33–44.

[39] *Розов Н.Х.* Пенлеве уравнение // Математическая Энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1984. — Т. 4. — С. 233–234.

[40] *Тихомиров В.М.* Фреше производная // Математическая Энциклопедия. — М: Советская энциклопедия, 1985. — Т. 5. — С. 666.

[41] *Чеботарев Н.Г.* "Многоугольник Ньютона" и его роль в современном развитии математики // "Исаак Ньютон". — М.: АН СССР, 1943. — С. 99–126.

[42] *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. — М., ГИФМЛ, 1962. — 128 с.