ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 3 за 2010 г.

Брюно А.Д.

Множества устойчивости многопараметрических задач

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Множества устойчивости многопараметрических задач // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 3. 14 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-3

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно

МНОЖЕСТВА УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Москва, 2010 г.

УДК 512.77+531.36
А. Д. Брюно. Множества устойчивости многопараметрических задач. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2010.

Рассматривается линейная система ОДУ с постоянными коэффициентами, зависящими от нескольких параметров. Ее множество устойчивости — это множество тех значений ее параметров, при которых устойчива стационарная точка этой системы. Показано, что граница множества устойчивости вычисляется с помощью теории исключения и правила Гурвица, изложенных в вузовских учебниках по алгебре. Отдельно рассмотрены общие (негамильтоновы) системы (§2) и гамильтоновы системы (§3). Приведены примеры таких вычислений.

A. D. Bruno. Sets of stability of multiparameter problems. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2010.

We consider a linear ODE's system with constant coefficients depending on several parameters. The set of stability of the system is the set of those values of parameters, for which the stationary point of the system is stable. We show that the boundary of the set of stability can be computed by means of the elimination theory and the Hurvitz rule, which are described in textbooks on algebra. We consider separately general (non-Hamiltonian) systems (§2) and Hamiltonian systems (§3). Examples of such computations are given.

E-mails: abruno@keldysh.ru
сайт: www.keldysh.ru

1. Введение

В докторской диссертации [1] в пространстве $\mathbb{R}^n$ параметров $P = (p_1, \ldots, p_n)$ изучаются особенности границы множества устойчивости стационарного решения $X \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_m) = 0$ линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = A(P)X. \tag{1.1}$$

Это приводит к изучению расположения множеств значений параметров P, дающих критические собственные значения $\lambda = 0$ и $\lambda = \pm i\omega$ матрицы $A(P)$. В диссертации для этого развита довольно громоздкая теория, которая включает изучение:

а) зависимости собственных чисел и собственных подпространств от параметров для случаев жордановых клеток разных размерностей;

б) бифуркаций собственных значений;

в) сильного и слабого взаимодействий собственных значений;

г) версальных деформаций;

и вычисление кратных собственных значений итерационным методом Ньютона.

На самом деле в этом нет необходимости, а граница множества устойчивости находится непосредственно из характеристического многочлена

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m} f_k(P)\lambda^k, \qquad f_m = 1 \tag{1.2}$$

матрицы $A(P)$. Сама эта матрица не используется.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ параметров P находятся гиперповерхности, соответствующие критическим собственным значениям $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Они разбивают пространство параметров на куски W_k. В каждом куске W_k берётся одна внутренняя точка P_k, и в ней вычисляются корни характеристического многочлена (1.2). Те куски, в которых у всех корней $\lambda_j(P_k)$ вещественные части отрицательны, относятся к множеству устойчивости. Впрочем, последний этап можно организовать иначе, выделяя у указанных гиперповерхностей части, могущие служить границей области устойчивости.

Для общих (негамильтоновых) систем (1.1) эта процедура описана в разделе 2 вместе с примерами. В разделе 3 описана аналогичная процедура для гамильтоновых систем (1.1) и сделан ряд замечаний.

2. Негамильтонова система

2.1. Теория. Если матрица $A(P)$ произвольная (негамильтонова), то неподвижная точка $X = 0$ в системе (1.1) *асимптотически устойчива,* если у всех корней λ_i характеристического многочлена (1.2) вещественные части

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.1}$$

Согласно (1.2) критическое значение $\lambda_1 = 0$ имеется только на гиперповерхности

$$\mathcal{F}_0 : \ f_0(P) = 0. \tag{2.2}$$

Границей множества устойчивости будут только те части этой поверхности, где корни $\lambda_2, \dots, \lambda_m$ уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(P)\lambda^{k-1} = 0 \tag{2.3}$$

имеют неположительные вещественные части.

Критические значения $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ имеют $\lambda_1 = -\lambda_2$. Для таких λ многочлен (1.2) даёт два уравнения

$$\sum_{k=0}^{m}(\pm 1)^k f_k(P)\lambda^k = 0.$$

Они эквивалентны системе двух уравнений относительно $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^2$

$$\sum_{l=0}^{m_1} f_{2l}\mu^l = 0, \qquad \sum_{l=0}^{m_2} f_{2l+1}\mu^l = 0, \tag{2.4}$$

где

$$m_1 = m/2, \qquad m_2 = m/2 - 1, \qquad \text{если } m \text{ чётно,}$$
$$m_1 = (m-1)/2 = m_2, \qquad \text{если } m \text{ нечётно.}$$

Из системы (2.4) можно исключить μ либо вычисляя результант $r(P)$ этих двух уравнений, либо с помощью процедуры последовательного деления с остатком (алгоритма Евклида). В случае общего положения $r(P) \not\equiv 0$, и на гиперповерхности

$$\mathcal{F}_1 : \ r(P) = 0 \tag{2.5}$$

получается значение

$$\mu = \mu_1 = g(P), \tag{2.6}$$

где g — рациональная функция от коэффициентов уравнений (2.4). На последнем шаге алгоритма Евклида получается остаток $r(P)$, а на предпоследнем шаге — линейный по μ остаток $a(P)\mu + b(P)$. Тогда $g(P) = -b(P)/a(P)$.

Впрочем, выражение (2.6) можно получить из линейной по 1, μ, …, μ^{m-1} системы, определителем которой является $r(P)$. На гиперповерхности $\mathcal{F}_1$ остальные собственные значения λ_3, …, λ_m являются корнями многочлена $h(\lambda)$, который получается в результате деления с остатком многочлена $f(\lambda)$ из (1.2) на $\lambda^2 - g(P)$, т. е. $f(\lambda) = \left[\lambda^2 - g(P)\right] h(\lambda) + c(\lambda)$, где функция c линейна по λ. Только те части гиперповерхности $\mathcal{F}_1$ являются границей множества устойчивости, на которых $g(P) \le 0$, ибо $\mu = \lambda^2 = (\pm i\omega)^2 = -\omega^2$, и все корни многочлена $h(\lambda)$ имеют неположительные вещественные части. Остальные части этой гиперповерхности можно не рассматривать.

Способы исключения μ из системы двух алгебраических уравнений (т. е. алгоритм Евклида, результант и дискриминант) описаны в учебниках для ВУЗов (см., например, [2, § 54]).

Другой способ выделения областей устойчивости системы (1.1) основан на теореме Гурвица [3, гл. XVI, §6]:

Теорема 2.1. *Все корни многочлена* (1.2) *степени m с действительными коэффициентами и $f_0 > 0$ тогда и только тогда имеют отрицательные вещественные части, когда положительны все определители*

$$d_1 = f_1, \quad d_2 = \begin{vmatrix} f_1 & f_0 \\ f_3 & f_2 \end{vmatrix}, \qquad d_3 = \begin{vmatrix} f_1 & f_0 & 0 \\ f_3 & f_2 & f_1 \\ f_5 & f_4 & f_3 \end{vmatrix},$$
$$d_4 = \begin{vmatrix} f_1 & f_0 & 0 & 0 \\ f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \\ f_5 & f_4 & f_3 & f_2 \\ f_7 & f_6 & f_5 & f_4 \end{vmatrix}, \ldots, \quad d_m = \begin{vmatrix} f_1 & f_0 & 0 & \ldots & 0 \\ f_3 & f_2 & f_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{2m-1} & f_{2m-2} & f_{2m-3} & \ldots & f_m \end{vmatrix}, \tag{2.7}$$

где $f_j = 0$ при $j > m$.

В частности, при $m = 2$ теорема Гурвица дает условие

$$f_0 > 0, \quad f_1 > 0. \tag{2.8}$$

Следствие 2.1. *Граница множества асимптотической устойчивости описывается той частью множества $d_j = 0$, которая принадлежит множеству $d_j \geqslant 0$, $j = 1,\ldots,m$.*

Наконец, для изучения расположения решений уравнения $\varphi(P) = 0$ вблизи особенности $P = P_0$ (т. е. $\operatorname{grad} \varphi(P_0) = 0$), где $\varphi(P)$ — достаточно гладкая функция, можно применить методы степенной геометрии, изложенные в [4, гл. II].

2.2. Пример 1. Рассмотрим пример, приведённый в [1] на стр. 101, 102. Этот пример взят из [5, гл. I, § 7], где рассматриваются малые колебания динатронного генератора вблизи положения равновесия, которые описываются уравнением

$$LC\ddot{u} + \left(\rho C + \frac{L}{R}\right)\dot{u} + \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)u = 0. \tag{2.9}$$

При этом величины L и C считаются фиксированными, а $p_1 = R$ и $p_2 = \rho$ — два параметра задачи; L, C, $R > 0$, ρ — вещественно. Характеристический многочлен (1.2) здесь есть

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L}\right)\lambda + \frac{1}{LC}\left(\frac{\rho}{R} + 1\right) = 0. \tag{2.10}$$

Кривая $\mathcal{F}_0$ из (2.2) задаётся уравнением $\rho/R + 1 = 0$, т.е. $\rho = -R$. На этой прямой уравнение (2.3) даёт

$$\lambda_2 = -\left(\frac{1}{RC} + \frac{\rho}{L}\right) = \frac{R}{L} - \frac{1}{RC} = \frac{1}{RL}\left(R^2 - \frac{L}{C}\right).$$

Нам нужна только та часть прямой $\mathcal{F}_0$, на которой $\lambda_2 \leqslant 0$, т.е. $R \leqslant \sqrt{L/C}$. Кривая $\mathcal{F}_1$ задаётся вторым уравнением (2.4) $1/(RC) + \rho/L = 0$, т.е. $\rho = -L/(CR)$. Согласно первому уравнению (2.4) на ней

$$\mu = \mu_1 = \lambda^2 = -\frac{1}{LC}\left(\frac{\rho}{R} + 1\right) = -\frac{1}{LC}\left(1 - \frac{L}{CR^2}\right) = -\frac{1}{LC^2R^2}\left(CR^2 - L\right).$$

Нас интересует только та часть гиперболы $\mathcal{F}_1$, на которой $\mu_1 \leqslant 0$, т.е. $R \geqslant \sqrt{L/C}$. Итак, область устойчивости ограничена снизу прямой $\rho = -R$, если $R \leqslant \sqrt{L/C}$, и гиперболой $\rho = -L/(CR)$, если $R \geqslant \sqrt{L/C}$. Точка $R = \sqrt{L/C} = -\rho$ является особой точкой границы области устойчивости. Отметим, что в этой точке обе кривые $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ регулярны.

Применение следствия 2.1 теоремы Гурвица к характеристическому уравнению (2.10) дает условие вида (2.8), т.е.

$$\rho + R \geqslant 0 \text{ и } \rho + L/(CR) \geqslant 0,$$

которое выделяет то же самое множество устойчивости.

2.3. Пример 2. Рассмотрим пример, приведённый в [1] в разделе 2.5 на стр. 108–112. Этот пример взят из книги [6], где рассматривается движение двухзвенного маятника в окрестности вертикального положения равновесия. Линеаризованные уравнения движения имеют вид $\dot{X} = AX$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p/2 - 3/2 & 1 - p/2 & -\gamma_1/2 - \gamma_2 & \gamma_2 \\ 5/2 - p/2 & p/2 - 2 & \gamma_1/2 + 2\gamma_2 & -2\gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен (1.2) здесь есть

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \frac{\gamma_1 + 6\gamma_2}{2}\lambda^3 + \frac{7 - 2p + \gamma_1\gamma_2}{2}\lambda^2 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\lambda + \frac{1}{2}. \qquad (2.11)$$

Здесь γ_1, γ_2, p — параметры. Вместо γ_1 и γ_2 введём параметры $u = \gamma_1 + \gamma_2$, $v = \gamma_1 + 6\gamma_2$. Тогда

$$\gamma_1 = (6u - v)/5, \qquad \gamma_2 = (v - u)/5$$

и многочлен (2.11) принимает вид

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \frac{v}{2}\lambda^3 + \left[7 - 2p + \frac{(6u - v)(v - u)}{25}\right]\frac{\lambda^2}{2} + \frac{u}{2}\lambda + \frac{1}{2}. \qquad (2.12)$$

Здесь $\lambda \neq 0$, ибо $f_0 = 1/2 \neq 0$, поэтому критическими являются только $\lambda_{1,2} = \pm\omega$. Система (2.4) для $\mu = \lambda^2$ здесь есть

$$\mu^2 + \frac{\tilde{f}_2}{2}\mu + \frac{1}{2} = 0, \qquad \frac{v}{2}\mu + \frac{u}{2} = 0, \qquad (2.13)$$

где $\tilde{f}_2$ — это квадратная скобка в (2.12). Из второго уравнения (2.13) получаем, что на гиперповерхности $\mathcal{F}_1$, т. е. (2.5),

$$\mu = -u/v \stackrel{\text{def}}{=} g(P). \qquad (2.14)$$

Поскольку на границе области устойчивости $\mu \leqslant 0$, то там

$$u/v \geqslant 0. \qquad (2.15)$$

Подставляя выражение (2.14) в первое уравнение (2.13), получаем уравнение поверхности $\mathcal{F}_1$:

$$2u^2 + v^2 - \tilde{f}_2 uv = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\tilde{f}_2 = \left(2u^2 + v^2\right)/(uv),$$

и, подставляя это выражение в (2.12), получаем характеристический многочлен
$$\lambda^4 + \frac{v}{2}\lambda^3 + \frac{2u^2+v^2}{2uv}\lambda^2 + \frac{u}{2}\lambda + \frac{1}{2}.$$
В результате деления его на $\lambda^2 - g(P) = \lambda^2 + u/v$ получаем многочлен
$$\lambda^2 + \frac{v}{2}\lambda + \frac{v}{2u}, \tag{2.16}$$
корнями которого являются собственные числа λ_3, λ_4 на поверхности $\mathcal{F}_1$. При условии (2.15) оба корня многочлена (2.16) имеют $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ только при $v \geqslant 0$. Вместе с (2.15) это даёт ограничение на параметры
$$u,\, v \geqslant 0. \tag{2.17}$$
Поверхность $\mathcal{F}_1$ задаётся уравнением
$$7 - 2p = -(6u - v)(v - u)/25 + \left(2u^2 + v^2\right)/(uv). \tag{2.18}$$
Она делит положительную четверть (2.17) трёхмерного пространства параметров u, v, p на две части: верхнюю и нижнюю. Несложная проверка показывает, что областью устойчивости является только нижняя часть. Изучим строение поверхности $\mathcal{F}_1$. Для этого её уравнение (2.18) запишем в виде многочлена
$$\varphi(u,v,p) \overset{\text{def}}{=} 2u^2 + v^2 - [7 - 2p + (6u - v)(v - u)/25]uv = 0. \tag{2.19}$$
Особые точки этой поверхности, где $\operatorname{grad}\varphi = 0$, расположены на оси $u = v = 0$. Изучим строение поверхности $\mathcal{F}_1$ вблизи этой оси. Согласно [4, гл. II] при малых $|u|$, $|v|$ первое приближение поверхности $\mathcal{F}_1$ описывается первым приближением уравнения (2.19), т. е. уравнением
$$7 - 2p = \frac{2u^2 + v^2}{uv} = \frac{2 + w^2}{w},$$
где $w = v/u$. Ограничение (2.15) означает, что $w \geqslant 0$. Легко видеть, что при $w \geqslant 0$ функция
$$p = \frac{7}{2} - \frac{2 + w^2}{2w} \tag{2.20}$$
имеет единственный максимум в точке $w = w_0 = \sqrt{2}$, где $p = p_0 = 7/2 - \sqrt{2}$. При $p > p_0$ уравнение (2.20) не имеет вещественных положительных решений w, при $p = p_0$ оно имеет двукратное решение $w = w_0$, а при $p < p_0$ уравнение (2.20) имеет два вещественных положительных решения w_1 и w_2. Им соответствуют две ветви части (2.17) поверхности $\mathcal{F}_1$, которые при

$p = p_0$ сливаются, и при $p > p_0$ имеется одна ветвь, которая не подходит к оси $u = v = 0$. Итак, особенности части (2.17) поверхности $\mathcal{F}_1$ расположены на полуоси $u = v = 0$, $p \leqslant p_0$, где наиболее особенной является точка $p = p_0$.

Теорема Гурвица 2.1 для многочлена (2.12) дает условия

$$u > 0, \quad \begin{vmatrix} u & 1 \\ v & \tilde{f}_2 \end{vmatrix} = u\tilde{f}_2 - v > 0, \quad \begin{vmatrix} u & 1 & 0 \\ v & \tilde{f}_2 & u \\ 0 & 2 & v \end{vmatrix} = v\left(u\tilde{f}_2 - v\right) - 2u^2 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ v & \tilde{f}_2 & u & 1 \\ 0 & 2 & v & \tilde{f}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = v\left(u\tilde{f}_2 - v\right) - 2u^2 > 0. \tag{2.21}$$

Из них четвертое повторяет третье. Из второго и третьего неравенств (2.21) следует, что $v > 0$, $uv\tilde{f}_2 > 2u^2 + v^2 > 0$. По следствию 2.1, множество устойчивости выделяется неравенствами

$$u, v \geqslant 0, \quad uv\tilde{f}_2 \geqslant 2u^2 + v^2,$$

что совпадает с предыдущим результатом.

3. Гамильтоновы системы

3.1. Теория. Пусть задана гамильтонова система линейных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = JA(P)X, \qquad X = (Y, Z)^{\mathrm{T}}, \quad Y, Z \in \mathbb{R}^m \tag{3.1}$$

с постоянной симметричной матрицей A, где J — симплектическая единица, а $P = (p_1, \ldots, p_n)$ — вектор параметров. Здесь m — число степеней свободы, а n — число независимых параметров.

Характеристический многочлен

$$\check{f}(\lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k=0}^{2m} \check{f}_k(P)\lambda^k, \qquad \check{f}_{2m} = 1 \tag{3.2}$$

матрицы $JA(P)$ содержит только четные степени λ, т. е. является многочленом от $\mu = \lambda^2$

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^{m} f_k(P)\mu^k, \quad f_m = 1. \tag{3.3}$$

Изолированная неподвижная точка $X = 0$ гамильтоновой системы (3.1) является *устойчивой* тогда и только тогда, когда у ее характеристического многочлена (3.3) все корни $\mu_1, \ldots, \mu_m$ вещественны и отрицательны. Критическими корнями являются нулевой $\mu = 0$ и двукратный

$\mu = -\omega^2$, который соответствует двукратным $\lambda = \pm i\omega$. Поэтому граница области устойчивости состоит из частей поверхностей $\mathcal{F}_0 : f_0 = 0$ (см. 2.2) и

$$\mathcal{F}_2 : D(f) = 0. \tag{3.4}$$

Здесь и далее $D(f)$ — дискриминант многочлена $f(\mu)$, он отличается от результанта многочленов $f(\mu)$ и $f'(\mu)$ множителем $(-1)^{m(m-1)/2}$ [2, гл. XI, § 53].

Возможны два способа выделения областей устойчивости в пространстве параметров P.

Первый способ. Гиперповерхности $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$ делят пространство $\mathbb{R}^n$ параметров P на части W_k. В каждой из этих частей W_k устойчивость и неустойчивость одинаковы во всех внутренних точках $P \in W_k$. Поэтому, если внутри каждой из этих частей W_k взять по одной точке P_k, и в точках P_k вычислить корни многочлена (3.3), то можно выделить все части W_k, в которых имеется устойчивость.

Второй способ. Гиперповерхности $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$ делятся на участки U_k размерности $n-1$ семействами взаимных пересечений и самопересечений размерностей меньше $n-1$. На каждом участке U_k вычисляются корни многочлена (3.3) и выделяются все те участки, которые дают устойчивость. Они образуют границы областей устойчивости.

При этом на гиперповерхности $\mathcal{F}_2$ получается кратное значение

$$\mu_{mul} = \mu_{1,2} = g(P). \tag{3.5}$$

На гиперповерхности $\mathcal{F}_2$ остальные корни $\mu_3, \ldots, \mu_l$ многочлена (3.3) являются корнями многочлена $\tilde{h}(\mu)$, который получается в результате деления с остатком многочлена $f(\mu)$ из (3.3) на $(\mu - g(P))^2$, т. е.

$$f(\mu) = (\mu - g(P))^2\, \tilde{h}(\mu) + \tilde{c}(\mu), \tag{3.6}$$

где функция $\tilde{c}$ линейна по μ. Только те части гиперповерхности $\mathcal{F}_2$ могут быть границей области устойчивости, на которых $\mu_{mul} \leqslant 0$, ибо критическое $\mu = (\pm i\omega)^2 = -\omega^2$, и на которых все корни многочлена $\tilde{h}(\mu)$ также вещественны и неположительны.

Если $m = 1$, то условие $f_0 \geqslant 0$ необходимо и достаточно для устойчивости.

Теорема 3.1. *Если $m = 2$ или $m = 3$, то условия*

$$f_0(P) > 0, \quad f_k(P) \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, m-1 \tag{3.7}$$

и

$$D(f) \geqslant 0 \tag{3.8}$$

необходимы и достаточны для устойчивости.

Доказательство. Условие (3.8) необходимо и достаточно для вещественности всех корней, а условие (3.7) необходимо и достаточно для отсутствия нулевого и вещественного положительного корня. □

Теорема 3.2. *Если $m = 4$, то при условиях* (3.7) *и* (3.8) *границы областей устойчивости выделяются условиями*

$$f_0 = 0, \quad D\left(\hat{f}\right) \geqslant 0, \tag{3.9}$$

где $\hat{f} = \sum_{k=1}^{m} \mu^{k-1} f_k(P)$, *и согласно* (3.5), (3.6)

$$D(f) = 0, \quad g \leqslant 0, \quad D\left(\tilde{h}\right) \geqslant 0. \tag{3.10}$$

При этом условие (3.9) *пропадает, если* $f_0 = f_{00}^2$.

Замечание 3.1. Дискриминант вещественного многочлена (3.3) положителен тогда и только тогда, когда четно число пар комплексно сопряженных его корней λ_j и $\bar{\lambda}_j$.

3.2. Пример 3. Рассмотрим пример, приведённый в [1] на стр. 176–178. Этот пример изучался в статье [7], где рассматриваются малые колебания упругой шарнирно опертой трубы, проводящей жидкость, относительно стационарного состояния. Эти колебания описываются линейными каноническими уравнениями с гамильтоновой матрицей

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\alpha\Lambda/2} & 1 & 0 \\ -\sqrt{\alpha\Lambda/2} & 0 & 0 & 1 \\ -1 + \Lambda - \alpha\Lambda/4 & 0 & 0 & \sqrt{\alpha\Lambda/2} \\ 0 & -16 + 4\Lambda - \alpha\Lambda/4 & -\sqrt{\alpha\Lambda/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Характеристический многочлен (3.2) матрицы (3.11) в этом случае есть

$$\lambda^4 + \lambda^2(17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda) + 4(1 - \Lambda)(4 - \Lambda).$$

Здесь два параметра $p_1 = \Lambda \geqslant 0$ и $p_2 = \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 = (16/(3\pi))^2 \approx 2{,}882$. В записи (3.3) характеристический многочлен есть

$$f(\mu) = \mu^2 + (17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda)\mu + 4(1 - \Lambda)(4 - \Lambda). \tag{3.12}$$

Кривая (2.2) состоит из двух прямых $\Lambda = 1$ и $\Lambda = 4$. На них уравнение (2.3) даёт $\mu_0 = -(17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda)$. А именно, на прямой $\Lambda = 1$ имеем $\mu_0 = -(12 + \alpha)$, т. е. $\mu_0 < 0$ для $\alpha \geqslant 0$; на прямой $\Lambda = 4$ имеем $\mu_0 = 3 - 4\alpha$, т.е. $\mu_0 \leqslant 0$ только при $\alpha \geqslant 3/4$.

Дискриминант многочлена $f(\mu)$ есть

$$D(f) = (17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda)^2 - 16(1-\Lambda)(4-\Lambda). \tag{3.13}$$

Кривая $D = 0$, т. е. $\mathcal{F}_2$ из (3.4), состоит из двух ветвей

$$\alpha = \varphi_\pm(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{5\Lambda - 7 \pm 4\sqrt{(1-\Lambda)(4-\Lambda)}}{\Lambda}. \tag{3.14}$$

При Λ, $\alpha \geqslant 0$ они вещественны только для $\Lambda \geqslant 4$. При $\Lambda = 4$ эти ветви встречаются в точке $\alpha = 3/4$, касаясь вертикали $\Lambda = 4$. Согласно (3.12) в кратных корнях уравнения $f(\mu) = 0$, т. е. при $D = 0$, имеем $\mu = \mu_2 = -(17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda)/2$. Это выражение (3.5) в этом случае. При $\Lambda > 0$ неравенство $\mu_2 \leqslant 0$ означает, что $\alpha \geqslant (5\Lambda - 7)/\Lambda$. Согласно (3.14) оно выполнено только на верхней ветви $\alpha = \varphi_+(\Lambda)$. Следовательно, граница области устойчивости состоит из прямой $\Lambda = 1$, полупрямой $\Lambda = 4$, $\alpha \geqslant 3/4$ и верхней полуветви $\alpha = \varphi_+(\Lambda)$, $\Lambda \geqslant 4$ кривой (3.14). Простая проверка показывает, что в полуполосе $\Lambda \geqslant 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 = 2{,}882$ область устойчивости состоит из двух кусков: (1) прямоугольника $0 \leqslant \Lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ и (2) треугольника $4 \leqslant \Lambda \leqslant \Lambda_1 = 4{,}781$, $\alpha \geqslant \varphi_+(\Lambda)$. Значение $\Lambda_1 = 4{,}781$ найдено согласно (3.13) как единственный положительный корень квадратного по Λ уравнения $D = 0$ при $\alpha = \alpha_1 = 2{,}882$. Точка $\Lambda = 4$, $\alpha = 3/4$ является особой на границе области устойчивости. В ней касаются кривые $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$, и обе они в ней регулярны.

3.3. Последовательность вычислений.

Определение. Пусть $\varphi(P)$ — некоторый многочлен. Точка $P = P_0$ гиперповерхности $\varphi(P) = 0$ называется *особой точкой k-того порядка*, если в этой точке анулируется не только многочлен $\varphi(P)$, но и все его частные производные по $p_1, \ldots, p_n$ до k-того порядка включительно.

Можно предложить следующую алгоритмическую схему исследования устойчивости линейных гамильтоновых систем вида (3.1).

а) Вычисляются характеристический многочлен $f(\mu)$ матрицы $JA(P)$ и его дискриминант $D(f)(P)$.

б) Находятся пересечения множеств $f_0(P) = 0$ и $D(f)(P) = 0$.

в) Для множеств $f_0(P) = 0$ и $D(f)(P) = 0$ находятся их особые точки порядков $k = 1, 2, \ldots$ пока они не исчерпаются. Непрерывные множества особых точек параметризуются, возможно, используя μ.

г) Методами локального анализа (см., например, [8, 4]) исследуются множества $f_0(P) = 0$ и $D(f)(P) = 0$ вблизи их пересечений и вблизи их особых точек.

д) На множестве $\mathcal{F}_0$ вычисляется $D\left(\hat{f}\right)$ и выделяются те части $\mathcal{F}_0$, где $D\left(\hat{f}\right) \geqslant 0$.

е) На множестве $\mathcal{F}_2$ вычисляются кратное μ_{mul} из (3.5), многочлен $\tilde{h}(\mu)$ из (3.6) и $D\left(\tilde{h}\right)$. Выделяются те части множества $\mathcal{F}_2$, где $\mu_{cr} \leqslant 0$, $D\left(\tilde{h}\right) \geqslant 0$ и все коэффициенты многочлена $\tilde{h}(\mu)$ неотрицательны.

ж) Рассматриваются куски разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ гиперповерхностями множеств $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_2$, вычисляются собственные числа λ_j в одной точке каждого куска.

з) Выделяются те части границ этих кусков, все точки на которых дают устойчивость. Результат сравнивается с результатом шага ж).

3.4. Замечания.

1. В задачах, более сложных, чем в приведенных выше примерах, все эти вычисления можно сделать с помощью компьютерной алгебры. Так сделано в препринте [9], где использованы почти все пункты этой схемы.

2. В диссертации [1] теория исключения даже не упоминается, а в сложных случаях вычисления делаются численно по сетке в пространстве $\mathbb{R}^n$ параметров P и основаны они на самобытной теории, упомянутой в разделе 1. Замечательно, что все отзывы на эту диссертацию также не упоминают теорию исключения. Поскольку такие отзывы написали академики В. И. Арнольд, В. Ф. Журавлёв, Ф. Л. Черноусько, член–корреспондент Д. В. Трещёв и ряд профессоров–механиков, то создается впечатление, что все они не знают элементарной алгебры и тем более — компьютерной алгебры. На этом фоне нельзя требовать таких знаний от диссертанта, равно как и знания вузовской науки от ученых вообще.

Список литературы

[1] *Майлыбаев А. А.* Многопараметрические задачи теории устойчивости: Дис... докт. физ.-мат. наук: 01.02.01. — СПб., 2008. — 296 с.

[2] *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Изд-во «Наука», 1971. — 432 с.

[3] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 560 с.

[4] *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998. — 288 с.

[5] *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с.

[6] *Томпсон Д. М. Т.* Неустойчивость и катастрофы в науке и технике. — М.: Мир, 1985. — 254 с.

[7] *Herrmann G., Jong I.-C.* On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // *Trans. AMSE, J. Appl. Mech.* — 1965. — Vol. 32. — Pp. 592–597.

[8] *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 252 с.

[9] *Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П.* Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт № 4. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 30 с.