ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 65 за 2010 г.

Боровин Г.К., Лапшин В.В.

О принципе виртуальных перемещений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Боровин Г.К., Лапшин В.В. О принципе виртуальных перемещений // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 65. 9 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-65

ISSN 2071-2898

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Г.К.Боровин, В.В.Лапшин

О принципе виртуальных перемещений

Препринт №

Москва

Ордена Ленина
Институт прикладной математики
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Г.К.Боровин, В.В.Лапшин

О принципе виртуальных перемещений

Москва, 2010 г.

Боровин Г.К., Лапшин В.В.. О принципе виртуальных перемещений.

Показана ошибочность формулировки и доказательства достаточности условий принципа виртуальных перемещений. Уточнена формулировка этого принципа и приведено его доказательство.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00712) и гранта № НШ-5271.2010.8 по поддержке ведущих научных школ РФ.

Ключевые слова: принцип виртуальных перемещений.

Borovin G.K., Lapshin V.V. About a principle of virtual displacements.

The mistakes in formulation and proof of the sufficiency conditions of a principle of virtual displacements are obtained. Clarify formulation of this principle and its proof are presented.

Work is executed at support of the RFBR (the grant № 10-01-00712) and the program of the RF leading scientific schools support (the grant № НШ-5271.2010.8).

Key words: *principle of virtual displacements*.

Принцип виртуальных перемещений, являющийся одним из классических результатов теоретической механики, рассматривается во всех учебниках по теоретической механике, в том числе в [1–7]. Известно обобщение этого принципа на случай неголономных и нестационарных связей [8].

В данной статье рассмотрим классическую формулировку принципа: *для равновесия механической системы, на которую наложены голономные, удерживающие, стационарные и идеальные связи, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, на любом виртуальном перемещении равнялась нулю и скорости всех точек системы в начальный момент времени равнялись нулю, т.е.*

$$\delta A = \sum_k \overline{F}_k \, \delta\overline{r}_k = 0 \quad , \quad \overline{V}_k(t_0) = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots n) \quad . \tag{1}$$

При этом рассматривается механическая система, состоящая из n материальных точек. Уравнения движения системы имеют вид

$$m_k \ddot{\overline{r}}_k = \overline{F}_k + \overline{R}_k \qquad (k = 1,2,\ldots n) \quad , \tag{2}$$

где m_k – масса k-й точки системы, $\overline{r}_k$ – ее радиус-вектор, $\overline{F}_k$ – активная сила, а $\overline{R}_k$ – сила реакции идеальных связей, приложенные к k-й точки системы.

Необходимость принципа виртуальных перемещений и ее доказательство не вызывают никаких сомнений. Доказательство достаточности, условий принципа виртуальных перемещений [1–8] является **ошибочным или не полным**. Более того, и формулировка условий достаточности является не полной.

Приведем **контрпример**. Рассмотрим (рис. 1) движение материальной точки вдоль гладкой горизонтальной направляющей под действием активной силы $F = kx^{1/3}$, где $k = \text{const} > 0$, при начальных условиях $t_0 = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V(0) = 0$. В этом случае выполнены условия принципа виртуальных перемещений. Связи являются голономными, удерживающими, стационарными и идеальными. Начальная скорость равна нулю. Активная сила в начальном положении равна нулю, а тогда и ее виртуальная работа $\delta A = F\,\delta x = 0$. В силу принципа виртуальных перемещений система должна оставаться в равновесии в начальном положении.

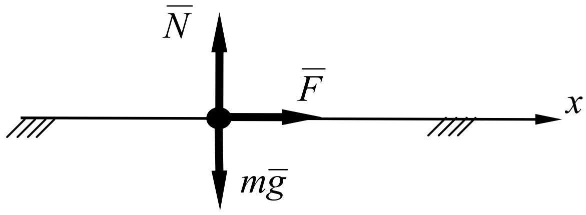

Рис. 1.

Используя преобразование $\ddot{x} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx}$, найдем решение дифференциальное уравнение движения при заданных начальных условиях

$$m\ddot{x} = kx^{1/3} \quad \Rightarrow \quad mV\frac{dV}{dx} = kx^{1/3} \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{3k}{2m}x^{4/3} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{3k}{2m}}x^{2/3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^x x^{-2/3}dx = \pm\sqrt{\frac{3k}{2m}}t \quad \Rightarrow \quad x^{1/3} = \pm\sqrt{\frac{k}{6m}}t \quad \Rightarrow \quad x = \pm\left(\frac{k}{6m}\right)^{3/2} t^3 \quad .$$

При заданных начальных условиях уравнение движения имеет **три решения**:1) $x(t) = 0$, 2) $x = \left(\frac{k}{6m}\right)^{3/2} t^3$, 3) $x = -\left(\frac{k}{6m}\right)^{3/2} t^3$. Первому решению соответствует равновесие, а второму и третьему – движением системы.

Этот пример опровергает достаточность условий принципа виртуальных перемещений.

Замечание 1. Рассматриваемая механическая система, является весьма необычной. Заданным начальным условиям соответствуют три различных решения. Объясняется это тем, что не выполнены условия теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения движения. С точки зрения механики при этом не выполнен принцип детерминированности. Отметим, что принцип детерминированности является одной из основ теоретической механики. Он послужил обоснованием формулировки второго закона Ньютона.

Замечание 2. Для второго и третьего решений в начальный момент времени равны нулю скорость и ускорение точки, а также и сила, действующая на точку.

Остановимся на ошибках в известных доказательствах принципа виртуальных перемещений.

В учебниках П.Аппеля [1], Е.Н.Березкина [2], К.С.Колесникова [5], Н.Н.Никитина [6] и др. доказательство проводится от противного. Пусть выполнены условия (1) и начинают двигаться некоторые материальные точки системы. Начальные скорости равны нулю и эти материальные точки начинают двигаться в направлении действующей на них силы. Тогда на действительном перемещении для этих точек элементарная работа активной силы и силы реакции связей $(\overline{F}_k + \overline{R}_k)d\overline{r}_k > 0$. Следовательно, $dA = \sum\limits_k \overline{F}_k d\overline{r}_k + \sum\limits_k \overline{R}_k d\overline{r}_k > 0$. Для стационарных связей действительное перемещение является одним из виртуальных. На этом виртуальном перемещении сумма работ сил реакции связей равна нулю в силу идеальности связей и сумма работ активных сил $\delta A = \sum\limits_k \overline{F}_k \delta\overline{r}_k = dA > 0$, что противоречит условию принципа.

Ошибка авторов заключается в неверной трактовке действительного перемещения системы. Действительное перемещение это дифференциал радиус-вектора точки и равно нулю $d\overline{r}_k = \overline{V}_k dt = 0$ для всех точек системы, так как движение начинается из положения с нулевыми скоростями. Тогда $dA = 0$.

В учебнике С.М.Тарга [7] доказательство проводится на основе теоремы об изменении кинетической энергии. Пусть выполнены условия (1) и механическая система начинает двигаться, тогда сумма элементарных работ $dA = \sum\limits_k \overline{F}_k d\overline{r}_k + \sum\limits_k \overline{R}_k d\overline{r}_k = dT$, а изменение кинетической энергии dT будет положительным, так как в исходном положении система была неподвижна. Тогда $dA > 0$ и далее доказательство С.М.Тарга повторяет предыдущее.

Ошибка автора в сущности совпадает с ошибкой предыдущего доказательства и связана с неверной трактовкой дифференциала кинетической энергии. На самом деле $dT = \sum\limits_k m_k V_k dV_k = 0$ в силу того, что $\overline{V}_k(t_0) = 0$.

На эти ошибки в доказательстве достаточности условий принципа виртуальных перемещений ранее указывалось в статье Г.Д.Блюмина [8].

В учебниках Н.В.Бутенина с соавторами [3], Ю.Ф.Голубева [4] и статье Г.Д.Блюмина [8] приведено более удачное доказательство, которое исправляет указанные ошибки. Авторами показано, что существует виртуальное перемещение системы $\delta\overline{r}_k = \varepsilon\overline{a}_k$, где $\overline{a}_k$ – ускорение k-й точки системы, ε – положительная бесконечно малая величина. Доказательство проводится от противного. Пусть условия (1) выполнены и система начала двигаться. Тогда на этом виртуальном перемещении в силу идеальности связей и уравнений движения (2)

$$\delta A = \sum_k \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = \sum_k \left(\overline{F}_k + \overline{R}_k\right)\delta \overline{r}_k = \varepsilon \sum_k \left(\overline{F}_k + \overline{R}_k\right)\overline{a}_k = \varepsilon \sum_k \frac{\left(\overline{F}_k + \overline{R}_k\right)^2}{m_k} > 0 \quad ,$$

что противоречит условиям (1).

Ошибка авторов заключается в том, что система может начать двигаться из состояния покоя, так что при этом ускорения всех точек будут равняться нулю, т.е. в силу уравнений движения и силы $\overline{F}_k + \overline{R}_k = 0$ будут равняться нулю. Именно такой случай рассмотрен в приведенном выше контрпримере (см. замечание 2).

Доказательство принципа виртуальных перемещений проведем с помощью уравнений Лагранжа II-го рода. Пусть $q_i, Q_i \quad (i = 1,2,\ldots s)$ – обобщенные координаты и обобщенные силы.

Теорема 1. Сумма виртуальных работ активных сил равна нулю $\delta A = \sum_k \overline{F}_k \, \delta \overline{r}_k = 0$ тогда и только тогда, когда $Q_i = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,s)$.

Доказательство этой теоремы приведено в [1–7].

Теорема 2. Если связи, наложенные на систему, являются стационарными, то скорости точек системы равны нулю $\overline{V}_k(t) = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n)$ тогда и только тогда, когда равны нулю обобщенные скорости.

Доказательство. Очевидно в силу того, что для стационарных связей

$$\overline{r}_k = \overline{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s) \quad , \tag{3}$$

$$\overline{V}_k = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad ,$$

причем якобиан уравнений связей (3) является невырожденным или $\operatorname{rank}\left\| \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \right\| = s$.

В силу теорем 1 и 2 условия принципа виртуальных перемещений (1) равносильны условиям

$$Q_i = 0 \quad , \quad \dot{q}_i(t_0) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,s) \quad .$$

Теорема 3 (необходимость принципа виртуальных перемещений). Если механическая система, на которую наложены голономные, удерживающие, стационарные и идеальные связи, находится в равновесии, то все обобщенные силы равны нулю $Q_i = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,s)$.

Теорема 4 (достаточность принципа виртуальных перемещений). Рассмотрим механическую систему, на которую наложены голономные, удерживающие, стационарные и идеальные связи. Если

1) система является детерминированной в окрестности положения $q_i(t_0) \qquad (i = 1,2,\dots,s)$;

2) $Q_i = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,s)$;

3) $\dot{q}_i(t_0) = 0 \qquad (i = 1,2,\dots,s)$;

то система находится в равновесии.

Замечание. Уточнение формулировки принципа по сравнению с [1–8] заключается в условии 1 теоремы 4. Для рассмотренного выше контрпримера это условие не выполнено.

Доказательство теорем 3 и 4. В силу (4) кинетическая энергия является квадратичной формой обобщенных скоростей

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \overline{V}_k^{\,2}}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2} \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad ,$$

где

$$a_{ij} = a_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_s) = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j} \quad .$$

Уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа II-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,2,\dots,s) \quad .$$

имеют вид

$$\sum_j a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_j \frac{d a_{ij}}{dt} \dot{q}_j - \sum_{l,j} \frac{\partial a_{lj}}{\partial q_i} \dot{q}_l \dot{q}_j = Q_i \qquad (i = 1,2,\dots,s) \quad . \tag{5}$$

Если система находится в равновесии, то все обобщенные скорости и ускорения равны нулю, и из (5) следует, что обобщенные силы равны нулю. Тем самым доказана теорема 3 (необходимость).

Наоборот, если обобщенные силы равны нулю и начальные обобщенные скорости равны нулю, то уравнения движения (5) имеют решение

$$q_i(t) = q_i(t_0) = \text{const} \qquad (i = 1,2,\ldots,s) \quad ,$$

которому соответствует равновесие системы. В силу того, что рассматриваемая система является детерминированной (т.е. выполнены условия теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений движения), это решение является единственным. Тем самым доказана теорема 4 (достаточность).

Литература

1. Аппель П. Теоретическая механика, т.1. – М: Физматгиз, 1960. – 515 с.
2. Березкин Е.Н. Курс теоретической механики. – М: Изд-во Московского университета, 1974. – 646 с.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики, т.2. - М: Наука, 1971. – 462 с.
4. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. – М.: Изд-во Московского университета, 2000. – 719 с.
5. Курс теоретической механики. Под ред. К.С.Колесникова. – М: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 736 с.
6. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1990. - 607 с.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М: Высшая школа, 1995. - 416 с.
8. Блюмин Г.Д. О принципе виртуальных перемещений. Ивестия АН СССР. Механика твердого тела, 1982, № 6, с. 22–28.