



**Баранов А.А., Баранов Ант. Анд.,
Разумный В.Ю.**

Формирование и
поддержание орбит КА с
помощью двигателей малой
тяги

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Баранов А.А., Баранов Ант. Анд., Разумный В.Ю. Формирование и поддержание орбит КА с помощью двигателей малой тяги // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 52. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-52>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

Анд. Анат. Баранов, Анат. Анд. Баранов, В.Ю. Разумный
ФОРМИРОВАНИЕ И ПОДДЕРЖАНИЕ ОРБИТ МКА С
ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЕЙ МАЛОЙ ТЯГИ

Москва - 2010

ФОРМИРОВАНИЕ И ПОДДЕРЖАНИЕ ОРБИТ МКА С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЕЙ МАЛОЙ ТЯГИ

АННОТАЦИЯ. В работе показано, что существует четыре типа оптимальных решений для переходов (время перелета не фиксировано) между близкими околокруговыми компланарными орбитами. Одно из решений реализуется с помощью фиксированной ориентации двигательной установки (ДУ) по трансверсали в орбитальной системе координат, другое – при фиксированной ориентации ДУ в инерциальной системе координат. У третьего и четвертого типов решений ориентация ДУ изменяется в процессе исполнения маневра. Установлены области существования всех типов решений. Предложены алгоритмы для определения параметров этих маневров. Алгоритмы были использованы для расчёта параметров маневров перехода малого космического аппарата (МКА) с орбиты выведения на рабочую солнечно-синхронную орбиту и для расчёта маневров поддержания параметров такой орбиты в заданном диапазоне.

And. Ant. Baranov, Ant. And. Baranov, V. Y. Razoumny

FORMATION AND MAINTENANCE OF THE ORBIT WITH SMALL SPACECRAFT THRUSTERS

ABSTRACT. In this paper we show that there are four types of optimal solutions for the transfer (time of the flight is not fixed) between close near-circular coplanar orbits. One solution is implemented using a fixed orientation of the thrust vector by transversal in the orbital coordinate frame, the other one uses a fixed orientation of the thrust in the inertial coordinate frame. At the remaining solutions thrust orientation is changing during the execution of maneuver. The domains of existence of all types of solutions are determined. The algorithms for determination the parameters of these maneuvers were developed. Algorithms were used to calculate the parameters of the transition maneuver from launch orbit to a working sun-synchronous orbit and to calculate the maneuvers to maintain the parameters of the orbit in a given range.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ.....	4
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МАНЕВРИРОВАНИЯ НА ОКОЛОКРУГОВЫХ ОРБИТАХ.....	4
3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ.....	6
4. ИМПУЛЬСНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОРБИТАМИ	7
5. ИМПУЛЬСНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОРБИТАМИ	8
6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ЗАДАННЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ.....	10
7. ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ ОРБИТАМИ С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЕЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСТОЯННОЙ ТЯГИ	11
8. ПОСТОЯННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ В ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ	12
9. ПОСТОЯННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ	16
10. ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ, ОПТИМАЛЬНАЯ ДЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА.....	18
11. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ.....	20
12. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАНЕВРОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ	22
13. ОПТИМАЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЙ	25
14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМАЛЬНОГО НЕВЫРОЖДЕННОГО РЕШЕНИЯ РЕШЕНИЙ.....	27
15. ПЕРЕХОД С ОРБИТЫ ВЫВЕДЕНИЯ НА РАБОЧУЮ ОРБИТУ И ПОДДЕРЖА- НИЕ ПАРАМЕТРОВ РАБОЧЕЙ ОРБИТЫ В ЗАДАННОМ ДИАПАЗОНЕ.....	29
16. ЛИТЕРАТУРА.....	31

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача перехода между орбитами с помощью двигателей малой тяги часто решается в предположении, что тяга идеально регулируема, но в большинстве практических задач тягу можно считать постоянной. Задаче в такой постановке посвящено значительно меньше работ. Их можно разделить на две группы. В работах первой группы рассматривается простейший закон управления, предполагающий постоянную ориентацию вектора тяги (как правило, в орбитальной системе координат), при этом корректируются только некоторые из элементов орбиты [1,2]. В работе [3] корректируются все элементы орбиты, но рассматривается только один маневр, а в число определяемых параметров вводится величина тяги. В работах второй группы ищется оптимальный закон изменения ориентации вектора тяги, но для этого используются достаточно сложные численные методы. Например, в работе [4] оптимальный продолжительный маневр получается в результате склеивания нескольких тысяч псевдоимпульсов. В данной работе предлагаются простые численные методы, позволяющие определить продолжительность маневров и коэффициенты формул, задающих оптимальную ориентацию вектора тяги.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МАНЕВРИРОВАНИЯ НА ОКОЛОКРУГОВЫХ ОРБИТАХ

Задача определения параметров оптимального перехода (время перелета не фиксировано) между близкими околокруговыми компланарными орбитами решается в линеаризованной постановке. Предполагается, что поле центральное, возмущения не учитываются. Вводится опорная круговая орбита радиуса r_0 , равного большой полуоси конечной орбиты a_f , лежащая в плоскости конечной орбиты. Используется система координат $OXYZ$, ось OX направлена из центра притяжения в конечную точку полета, ось OZ – по вектору кинетического момента опорного движения.

Введем следующие обозначения: V_0 – скорость движения по опорной круговой орбите; индексы « f », « 0 » соответствуют конечной (заданной) и

начальной орбитам; e_f, e_0 – эксцентриситеты орбит; a_f, a_0 – большие полуоси орбит; ω_f, ω_0 – углы между осью OX и направлениями на перицентр соответствующей орбиты.

Задача определения параметров перехода с малой тягой решается на основе решения задачи импульсного перехода [5]. Это диктует необходимость определения параметров оптимального импульсного перехода.

Предполагается, что на оптимальной траектории перелета сообщается N импульсов скорости, $\Delta V_{ri}^*, \Delta V_{ti}^*, \varphi_i$ – соответственно радиальная, трансверсальная составляющие и угол приложения i -го импульса скорости ($i=1, 2, \dots, N$). Угол φ_i отсчитывается в направлении движения КА от оси OX до радиус-вектора точки приложения импульса. Углы φ_i неположительные, причем в конечной точке $\varphi=0$.

Для околокругового движения условия перехода на конечную орбиту запишутся в следующем безразмерном виде [6]:

$$\sum_{i=1}^N (\Delta V_{ri} \sin \varphi_i + 2\Delta V_{ti} \cos \varphi_i) = \Delta e_x, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N (-\Delta V_{ri} \cos \varphi_i + 2\Delta V_{ti} \sin \varphi_i) = \Delta e_y, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N 2\Delta V_{ti} = \Delta a, \quad (3)$$

где $\Delta e_x = e_f \cos \omega_f - e_0 \cos \omega_0$, $\Delta e_y = e_f \sin \omega_f - e_0 \sin \omega_0$, $\Delta a = (a_f - a_0)/r_0$, $\Delta V_{ri} = \Delta V_{ri}^* / \Delta V_0$, $\Delta V_{ti} = \Delta V_{ti}^* / \Delta V_0$.

Задача определения параметров оптимальных импульсных маневров формулируется следующим образом: надо определить $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ti}, \varphi_i$ ($i=1, \dots, N$), при которых минимальна суммарная характеристическая скорость маневров

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{\Delta V_{ri}^2 + \Delta V_{ti}^2}$$

при ограничениях (1)-(3).

В системе (1)-(3) присутствуют только изменения элементов орбит в конечной точке. Поэтому переход между эллиптическими орбитами с параметрами (e_{0x}, e_{0y}, a_0) и (e_{fx}, e_{fy}, a_f) в линейном приближении эквивалентен

переходу с опорной круговой орбиты радиуса r_0 на эллиптическую с параметрами $(\Delta e_x, \Delta e_y, a=r_0+r_0\Delta a)$. В дальнейшем орбита с элементами $(\Delta e_x, \Delta e_y, a=r_0+r_0\Delta a)$ будет называться *относительной*. Аргумент широты перицентра относительной орбиты вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi_e = \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x}. \quad (4)$$

Таким образом, для близких орбит с небольшими эксцентриситетами задача перехода между произвольными орбитами в данном, линейном приближении эквивалентна более простой задаче перехода с круговой на эллиптическую орбиту.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Решить задачу оптимального импульсного перехода между близкими компланарными околокруговыми орбитами можно с помощью различных методов. В работе [6] задача решена методом множителей Лагранжа, в [7] – геометрически. Для единообразия подхода к решению импульсной задачи и задачи с малой тягой целесообразно использовать необходимые условия оптимальности, теорию базис-вектора [8].

Для околокругового движения выражения для определения составляющих базис-вектора λ, μ , сопряженных соответственно радиальной и трансверсальной составляющим вектора скорости, имеют вид:

$$\lambda = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin(\varphi - \varphi_0), \quad (5)$$

$$\mu = 2\lambda_1 + 2\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (6)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}. \quad (7)$$

Для оптимальной ориентации i -го импульса скорости, прикладываемого в точке φ_i , необходимо выполнение условий

$$\frac{\Delta V_{ri}}{\Delta V_i} = \lambda(\varphi_i), \quad \frac{\Delta V_{ti}}{\Delta V_i} = \mu(\varphi_i). \quad (8)$$

Условия (5)-(8) несложно получить самостоятельно, воспользовавшись методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа L будет состоять из суммарной характеристической скорости ΔV и уравнений (1)-(3), умноженных на множители Лагранжа, соответственно $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1$. Выполнив дифференцирование L по $\Delta V_{ri}, \Delta V_{ti}$ и приравняв результаты дифференцирования нулю, получим условия (8).

В общем случае уравнения (5),(6) описывают эллипс на плоскости μ, λ (рис. 1). Если $k = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} = 0$, то годограф базис-вектора вырождается в точку. Как следует из необходимых условий оптимальности на оптимальной импульсной траектории, годограф базис-вектора должен касаться окружности единичного радиуса. Импульсы скорости прикладываются в момент времени, когда происходит касание. Для переходов с малой тягой двигатель работает в те моменты, когда годограф пересекает окружность или выходит за ее пределы.

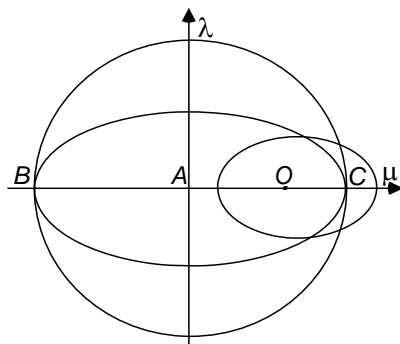


Рис. 1. Годограф базис-вектора для перехода между компланарными орбитами

4. ИМПУЛЬСНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОРБИТАМИ

В случае когда начальная и конечная орбиты не пересекаются ($|\Delta a| > \Delta e$), оптимальному переходу соответствует вырождение годографа базис-вектора в точку, которая должна принадлежать окружности единичного радиуса. При этом в (5),(6) $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = -0.5$ или $\lambda_1 = 0.5$. На плоскости λ, μ годограф вырождается в точку $B (-1, 0)$ или точку $C (1, 0)$ (рис. 1). Так как у этих решений $\lambda(\varphi_i) = 0$, то $\Delta V_{ri} = 0$, импульсы скорости – трансверсальные, они или разгонные,

если $\mu(\varphi_i)=1$, или тормозные, если $\mu(\varphi_i)=-1$. Существует множество решений этого типа с одинаковой суммарной характеристической скоростью ΔV , но с разными углами приложения и величинами импульсов скорости.

Чтобы найти параметры конкретного решения, фиксируется угол приложения одного из импульсов скорости, например, $\varphi_1=\varphi_{1f}$, затем из уравнений (1)-(3) определяются угол приложения второго импульса φ_2 и величины импульсов скорости $\Delta V_{i1}, \Delta V_{i2}$

$$\Delta V_{i1} = \frac{\Delta e^2 - \Delta a^2}{4(\Delta e_y \sin \varphi_1 + \Delta e_x \cos \varphi_1 - \Delta a)}, \quad (9)$$

$$\Delta V_{i2} = \frac{1}{2} \Delta a - \Delta V_{i1}, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\frac{1}{2} \Delta e_y - \Delta V_{i1} \sin \varphi_1}{\frac{1}{2} \Delta e_x - \Delta V_{i1} \cos \varphi_1}. \quad (11)$$

Из уравнения (3) находится суммарная характеристическая скорость маневра

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N |\Delta V_{ii}| = \frac{1}{2} |\Delta a|. \quad (12)$$

Гомановский переход является частным случаем решения этого типа. Так как для Гомановского перехода начальная и заданная орбиты круговые, то в этом случае $\Delta e_x = \Delta e_y = \Delta e = 0$, следовательно, $\Delta V_{i1} = \Delta V_{i2} = \frac{1}{4} \Delta a$, угол $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, угол φ_1 выбирается произвольно.

5. ИМПУЛЬСНЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ КОМПЛАНАРНЫМИ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОРБИТАМИ

Оптимальным переходам между компланарными пересекающимися орбитами ($|\Delta a| \leq \Delta e$) соответствует годограф базис-вектора в виде эллипса, касающегося окружности единичного радиуса в точках $B(-1,0)$ и $C(1,0)$ (рис. 1).

При этом $k = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} = 0.5$, $\lambda_1 = 0$. Так как у точек касания эллипса и

окружности $\lambda(\varphi_i)=0$, то из (8) следует, что $\Delta V_{ri}=0$, и импульсы скорости для этого решения опять будут трансверсальными. Оптимален двухимпульсный переход, в котором первый импульс скорости – разгонный, ему соответствует правая точка касания ($\mu(\varphi_1)=1$), второй импульс скорости – тормозной, ему соответствует левая точка касания ($\mu(\varphi_2)=-1$). Углы приложения импульсов скорости φ_1, φ_2 отличаются на половину витка.

Параметры импульсов скорости находятся по формулам

$$\Delta V_{i1} = \frac{1}{4}(\Delta a + \Delta e), \quad (13)$$

$$\Delta V_{i2} = \frac{1}{4}(\Delta a - \Delta e), \quad (14)$$

$$\varphi_1 = \varphi_e, \quad \varphi_2 = \varphi_e + \pi, \quad (15)$$

где $\operatorname{tg} \varphi_e = \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x}$.

Для всех задач перехода можно менять порядок приложения импульсов скорости.

Суммарные затраты характеристической скорости вычисляются по формуле

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N |\Delta V_{ii}| = \frac{1}{2} \Delta e. \quad (16)$$

Если в решении для непересекающихся орбит в качестве угла приложения первого импульса скорости взять угол $\varphi_1 = \varphi_e$, то составляющие импульсов скорости и угол приложения второго импульса также определяются по формулам (13)-(15). Отличие в том, что для пересекающихся орбит ΔV_{i1} и ΔV_{i2} имеют разные знаки, а для непересекающихся орбит – одинаковые. Таким образом, всегда можно пользоваться простейшим универсальным решением (13)-(15), в котором импульсы скорости прикладываются на линии апсид относительной орбиты. Далее решения этого типа будут использоваться в качестве основы решений с малой тягой.

6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ЗАДАННЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ

Ранее при решении задачи использовались линеаризованные уравнения движения, не учитывались нецентральность гравитационного поля, влияние атмосферы, время работы двигателей КА и т.д. Все это приводит к тому, что при реализации найденного решения точность выполнения терминальных условий будет недостаточной. Чтобы решить задачу выхода на конечную орбиту с заданной точностью, можно использовать итерационную процедуру [9], которая состоит из следующих этапов:

1. В начале очередной итерации решается “приближенная” задача: при принятых ранее упрощающих предположениях определяются параметры импульсов скорости, обеспечивающих формирование “целевой” орбиты (на первой итерации “целевая” орбита совпадает с конечной орбитой).

2. Затем, с учетом рассчитанных импульсов скорости, используя модели всех необходимых возмущений, осуществляется “точное” прогнозирование движения КА до заданной точки и находятся параметры сформированной орбиты.

3. Вычисляются отклонения параметров сформированной орбиты от соответствующих параметров конечной орбиты.

4. Если отклонения превышают допустимые, то параметры “целевой” орбиты меняются на величину вычисленных отклонений, и проводится следующая итерация.

Процедура заканчивается, когда терминальные условия выполнены с заданной точностью.

Для “точного” прогнозирования используются, как правило, численное и/или высокоточное численно-аналитическое интегрирование.

При численном интегрировании учитывается влияние нецентральности гравитационного поля, атмосферы, светового давления и т.д., моделируется работа двигателей КА, поэтому, несмотря на то что параметры маневров находятся на каждой итерации с использованием простейшей модели движения,

в результате итерационной процедуры они обеспечивают выход на конечную орбиту с требуемой точностью.

Эта итерационная схема позволяет получать точное решение задачи, даже когда отклонения начальной и конечной орбит от опорной круговой орбиты достигают нескольких сотен километров.

Данная итерационная процедура используется для получения необходимой точности и для решений задач с малой тягой, описанных в следующих параграфах.

7. ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ ОРБИТАМИ С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЕЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСТОЯННОЙ ТЯГИ

В параграфах четыре и пять при определении параметров маневров предполагалось, что маневры производятся с помощью двигателей с бесконечной тягой. Это позволяло моделировать маневры импульсами скорости. У реальных КА тяга всегда ограничена, следовательно, маневры имеют определенную продолжительность. Если продолжительность маневра мала по сравнению с периодом орбиты, то импульсное приближение можно считать достаточно точным. Если продолжительность маневра составляет несколько десятков градусов, а при определении параметров маневров используется импульсная модель, остается надеяться на итерационную процедуру, описанную в предыдущем параграфе. Эта процедура в некоторых случаях может обеспечить выполнение терминальных условий, даже если протяженность реальных маневров доходит до 50° по аргументу широты. Однако допустимая максимальная продолжительность маневра, при которой сходится итерационная процедура, зависит от конкретной задачи и может быть существенно меньше 50° , например, при решении задачи встречи большой продолжительности. В тех случаях, когда ДУ работает в течение значительной части витка, сходимость итерационной процедуры нарушается, а суммарная характеристическая скорость маневров существенно отличается от импульсного варианта. В этих

случаях при определении параметров маневров необходимо непосредственно учитывать время работы ДУ.

У реальных КА ориентация двигателя во время проведения маневра, часто фиксируется в орбитальной или инерциальной системах координат. Это обстоятельство диктует необходимость специального рассмотрения каждого из этих вариантов. Также будет предложен алгоритм для определения закона оптимального изменения ориентации вектора тяги в общем случае.

8. ПОСТОЯННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ В ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим вариант фиксирования ориентации ДУ по трансверсали в орбитальной системе координат. Данной ориентации соответствует случай вырождения базис-вектора в точку ($\mu=1$ или $\mu=-1$, $\lambda=0$, $\lambda_1=0.5$ или $\lambda_1=-0.5$, $k = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} = 0$). Это означает, что орбитальная ориентация вектора тяги по трансверсали и при длительных интервалах работы ДУ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности и может являться оптимальной. Как и в импульсном случае, основным результатом такого маневра является изменение большой полуоси, следовательно, такая ориентация вектора тяги оптимальна для переходов между непересекающимися орбитами.

Чтобы наиболее приблизиться к импульсному решению, которое принимается за основу, и получить оптимальное решение, середина активного участка должна совпадать с точкой приложения импульса скорости [5]. Это предположение справедливо, т.к. масса КА меняется незначительно при исполнении одного маневра и реактивное ускорение можно считать постоянным. На рисунке 2 активному участку соответствует дуга AC орбиты, точкой приложения оптимального импульса скорости является точка B , расположенная на линии апсид относительной орбиты. Так как точка B находится в центре дуги AC , изменение вектора эксцентриситета будет происходить в том же направлении, что и в импульсном случае. Однако величина изменения эксцентриситета будет меньше, поскольку, чем дальше

участок траектории, на котором работает ДУ, отстоит от середины активного участка, тем больше направление производимого на нем изменения вектора эксцентриситета отличается от требуемого направления (например, точка D на рисунке 2). Изменение эксцентриситета, производимое при сообщении безразмерной скорости ΔV_t ($\Delta V_t = \Delta V_t^*/V_0$) равномерно распределенной на угловом интервале $\Delta\varphi$ (рис. 2), можно используя (1),(2) рассчитать по формуле

$$\Delta e = 2 \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \frac{\Delta V_t}{\Delta\varphi} \cos\varphi d\varphi = 4 \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} \Delta V_t, \quad (17)$$

где φ – угол от середины активного участка до текущей точки.

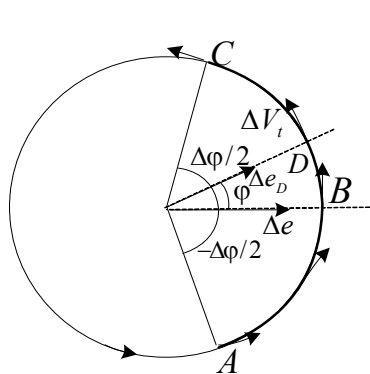


Рис. 2. Постоянная ориентация в орбитальной системе координат

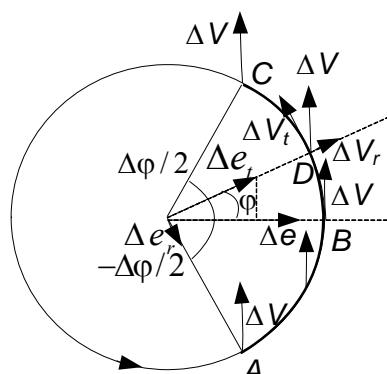


Рис. 3. Постоянная ориентация в инерциальной системе координат

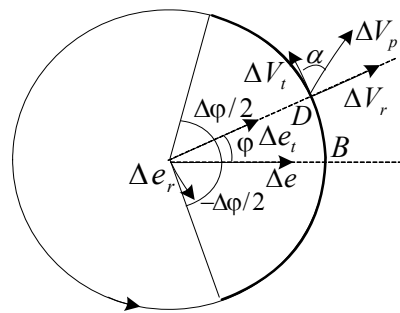


Рис. 4. Заданная ориентация вектора тяги

Из формулы (17) следует, что увеличение продолжительности участка работы ДУ приводит к уменьшению изменения эксцентриситета по сравнению с импульсным случаем.

Предполагая, что масса КА практически не меняется во время проведения одного маневра, можно рассчитать время, которое потребуется для изменения скорости КА на величину $V_0 \Delta V$,

$$\Delta t = \frac{m}{P} V_0 \Delta V, \quad (18)$$

где m – масса КА, P – тяга двигателя.

Из (18) следует, что $\Delta\varphi$ линейно зависит от ΔV

$$\Delta\varphi = \lambda_0 \Delta t = k \Delta V = \frac{w_c}{w} \Delta V, \quad (19)$$

где $\lambda_0 = \frac{V_0}{r_0}$, $k = \frac{mV_0^2}{Pr_0} = \frac{w_c}{w}$, w_c – центростремительное ускорение опорной круговой орбиты ($w_c = \frac{V_0^2}{r_0}$), w – ускорение, создаваемое ДУ ($w = \frac{P}{m}$).

Используя (19), можно найти изменение эксцентриситета орбиты в результате работы ДУ на интервале $\Delta\varphi$

$$\Delta e = 4 \frac{w}{w_c} \sin \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (20)$$

Максимальное изменение эксцентриситета, которое можно получить при помощи одного включения ДУ, равно

$$\Delta e^* = 4 \frac{w}{w_c}, \quad (21)$$

оно достигается при $\Delta\varphi = \pi$. Если на другой половине витка ориентация вектора тяги будет противоположной, то суммарное изменение эксцентриситета будет

$$\Delta \tilde{e} = 8 \frac{w}{w_c}. \quad (22)$$

Минимальное число витков n_e , требуемое для коррекции отклонения по эксцентриситету Δe , должно удовлетворять ограничению

$$n_e \geq \frac{\Delta e}{\Delta \tilde{e}}. \quad (23)$$

Так как изменение большой полуоси орбиты не зависит от момента приложения трансверсального импульса скорости, а зависит только от величины этого импульса ($\Delta a = 2\Delta V_t$), изменение большой полуоси за интервал работы двигателя $\Delta\varphi$ равно

$$\Delta a = \frac{2w}{w_c} \Delta\varphi. \quad (24)$$

Максимальное изменение большой полуоси на витке, когда двигатель работает весь виток ($\Delta\varphi = 2\pi$), равно

$$\Delta \tilde{a} = \frac{4\pi w}{w_c}. \quad (25)$$

Минимальное число витков n_a , необходимое для коррекции отклонения большой полуоси Δa , должно удовлетворять ограничению

$$n_a \geq \frac{\Delta a}{\Delta \tilde{a}}. \quad (26)$$

Условия перехода на заданную орбиту, когда на каждом витке выполняются два включения ДУ, центры активных участков которых располагаются на линии апсид относительной орбиты, имеют вид

$$4 \sin \frac{\Delta \varphi_1}{2} - 4 \sin \frac{\Delta \varphi_2}{2} = \frac{w_c \Delta e}{wn}, \quad (27)$$

$$2\Delta \varphi_1 + 2\Delta \varphi_2 = \frac{w_c \Delta a}{wn}, \quad (28)$$

где n – число витков, на которых одинаковым образом работает двигательная установка ($n \geq n_a$, $n \geq n_e$). Более точно граница возможного изменения Δe и Δa будет определена в параграфе 12.

Из системы (27),(28) можно найти величины $\Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2$

$$\Delta \varphi_1 = \frac{w_c \Delta a}{4wn} + 2 \arcsin \frac{w_c \Delta e}{8wn \cos \frac{w_c \Delta a}{8wn}}, \quad (29)$$

$$\Delta \varphi_2 = \frac{w_c \Delta a}{4wn} - 2 \arcsin \frac{w_c \Delta e}{8wn \cos \frac{w_c \Delta a}{8wn}}. \quad (30)$$

Отрицательное значение $\Delta \varphi_i$ означает, что при исполнении данного маневра ориентация вектора тяги должна быть на торможение.

Для переходов между непересекающимися орбитами, если выполнено условие (31)

$$\frac{w_c |\Delta a|}{2wn} > 4 \arcsin \frac{w_c \Delta e}{8wn \cos \frac{w_c |\Delta a|}{8wn}}, \quad (31)$$

затраты суммарной характеристической скорости на переход с конечной тягой аналогичны затратам импульсного решения и равны

$$\Delta V = \frac{|\Delta a|}{2}. \quad (32)$$

Для переходов между пересекающимися орбитами и между непересекающимися орбитами, для которых не выполнено условие (31), затраты суммарной характеристической скорости на переход с конечной тягой превышают затраты импульсного решения и равны

$$\Delta V = \frac{4nw}{w_c} \arcsin \frac{w_c \Delta e}{8wn \cos \frac{w_c |\Delta a|}{8wn}}. \quad (33)$$

Увеличивая n , можно приблизиться по затратам суммарной характеристической скорости к импульсному решению.

9. ПОСТОЯННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим вариант фиксированной ориентации ДУ в инерциальной системе координат. Середина активного участка также должна совпадать с точкой приложения импульса скорости (на рисунке 3 активному участку также соответствует дуга AC орбиты, точкой приложения импульса скорости является точка B). Вектор тяги в начальный момент (точка A) должен быть направлен таким образом, чтобы в середине активного участка (точка B) он был направлен по трансверсали. При этих условиях изменение вектора эксцентриситета будет происходить в том же направлении, что и в импульсном случае, но величина самого изменения будет меньше. Изменение эксцентриситета, производимое при сообщении безразмерной скорости ΔV , равномерно распределенной на интервале аргумента широты $\Delta \varphi$, можно рассчитать по формуле

$$\Delta e = \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \frac{\Delta V}{\Delta\varphi} (2 \cos \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \sin \varphi) d\varphi = \Delta V \left(\frac{3}{2} + \frac{\sin \Delta\varphi}{2\Delta\varphi} \right), \quad (34)$$

где $\Delta \varphi$ – угловая величина активного участка. Из формулы (34) следует, что производимое изменение эксцентриситета больше, чем при фиксации ориентации вектора тяги в орбитальной системе координат.

Используя (19), можно найти изменение эксцентриситета орбиты за интервал работы двигателя $\Delta \varphi$:

$$\Delta e = \frac{3w}{2w_c} \Delta\varphi + \frac{w}{2w_c} \sin \Delta\varphi. \quad (35)$$

Из формулы (35) следует, что при фиксированной ориентации вектора тяги в инерциальной системе координат изменение вектора эксцентриситета в нужном направлении происходит на всем витке ($\Delta\varphi=2\pi$).

Максимальное изменение эксцентриситета, которое можно получить за один виток, равно

$$\Delta\tilde{e} = 3\pi \frac{w}{w_c}, \quad (36)$$

оно достигается при $\Delta\varphi=2\pi$.

Минимальное число витков n_e , требуемое для коррекции отклонения по эксцентриситету Δe , должно удовлетворять ограничению

$$n_e \geq \frac{\Delta e}{\Delta\tilde{e}}. \quad (37)$$

Изменение большой полуоси можно рассчитать по формуле

$$\Delta a = 2 \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \frac{\Delta V}{\Delta\varphi} \cos \varphi d\varphi = 4 \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi} \Delta V. \quad (38)$$

Эта формула аналогична формуле для изменения эксцентриситета при фиксированной ориентации ДУ в орбитальной системе координат.

Используя (19), получаем

$$\Delta a = \frac{4w}{w_c} \sin \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (39)$$

Максимальное изменение большой полуоси, которое можно получить при помощи одного включения ДУ, равно

$$\Delta a^* = 4 \frac{w}{w_c}, \quad (40)$$

оно достигается при $\Delta\varphi=\pi$. Если на другой половине витка ориентация вектора тяги будет противоположной, то суммарное изменение большой полуоси будет

$$\Delta\tilde{a} = 8 \frac{w}{w_c}. \quad (41)$$

Минимальное число витков n_a , требуемое для коррекции отклонения по большой полуоси Δa , должно удовлетворять ограничению

$$n_a \geq \frac{\Delta a}{\Delta \tilde{a}}. \quad (42)$$

Условия перехода на заданную орбиту, когда на каждом витке выполняются два включения ДУ, центры активных участков которых располагаются на линии апсид относительной орбиты, а ориентация ДУ противоположна, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \Delta \varphi_1 + \frac{1}{2} \sin \Delta \varphi_1 + \frac{3}{2} \Delta \varphi_2 + \frac{1}{2} \sin \Delta \varphi_2 &= \frac{w_c \Delta e}{wn}, \\ 4 \sin \frac{\Delta \varphi_1}{2} - 4 \sin \frac{\Delta \varphi_2}{2} &= \frac{w_c \Delta a}{wn}, \end{aligned} \quad (43)$$

где n – число витков, на которых одинаковым образом работает двигательная установка ($n \geq n_a$, $n \geq n_e$). Из этой системы численно находятся величины $\Delta \varphi_1$, $\Delta \varphi_2$.

10. ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ ОПТИМАЛЬНАЯ ДЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА

Определим теперь, какой должна быть ориентация вектора тяги, чтобы обеспечить максимальное изменение эксцентриситета. Интересует только эксцентриситет, т.к. для изменения большой полуоси ответ был получен ранее – ориентация вектора тяги должна быть по трансверсали.

Ориентацию вектора тяги в данной точке орбиты будем задавать углом α , который отсчитывается от перпендикуляра к радиус-вектору (рис. 4). Тогда в результате приложения импульса скорости ΔV_p ($\Delta V_p = \frac{\Delta V_p^*}{V_0}$) в точке, отстоящей на угол φ от середины активного участка (рис. 4), произойдут следующие изменения большой полуоси a и эксцентриситета e (в направлении точки В):

$$\begin{aligned} \Delta V_t &= \Delta V_p \cos \alpha, & \Delta V_r &= \Delta V_p \sin \alpha, \\ \Delta e(\varphi) &= 2 \Delta V_p \cos \alpha \cos \varphi + \Delta V_p \sin \alpha \sin \varphi, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\Delta a(\varphi) = 2 \Delta V_p \cos \alpha. \quad (45)$$

Из (44) следует, что максимальное изменение эксцентриситета при сообщении импульса скорости ΔV_p будет иметь место, если

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi. \quad (46)$$

Этот же результат получается, если воспользоваться необходимыми условиями оптимальности. Ориентация вектора тяги при $\lambda_1=0$ (рис. 5),

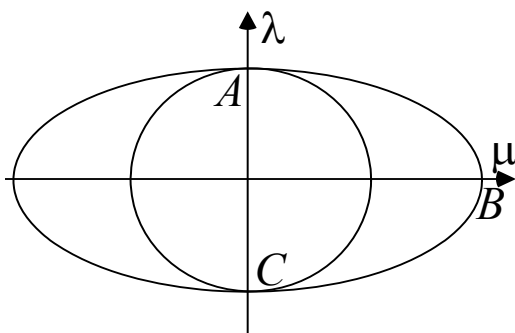


Рис. 5. Годограф базис-вектора для $k=1, \lambda_1=0$.

определяется формулой, аналогичной формуле (46),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \sin \varphi}{2\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} \cos \varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Данная ориентация ДУ, соответствующая годографу базис-вектора в форме эллипса, симметричного относительно оси λ , удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Она обеспечивает максимальное изменение эксцентриситета среди всех оптимальных решений. Напомним, что для случая оптимальных импульсных переходов между пересекающимися орбитами, когда необходимо максимально изменить эксцентриситет, годограф базис-вектора имеет вид эллипса с центром в начале системы координат ($k = \sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2} = \frac{1}{2}$, $\lambda_1=0$). Отличие варианта ограниченной тяги состоит в том, что годограф базис-вектора определяет оптимальную ориентацию ДУ не в двух точках, где эллипс касается окружности, а во всех точках эллипса, расположенных за пределами окружности единичного радиуса (рис. 5).

Далее ориентацию ДУ, определяемую формулой (46), будем называть «оптимальной по эксцентриситету».

Выражение для изменения эксцентриситета в данной точке имеет вид

$$\Delta e = \Delta V_p \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}. \quad (47)$$

Изменение большой полуоси вычисляется по формуле

$$\Delta a = \frac{4\Delta V_p \cos \varphi}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}}. \quad (48)$$

Учитывая, что $\Delta V_p = \frac{\Delta V}{\Delta \varphi} d\varphi = \frac{W}{W_c} d\varphi$, за весь участок работы ДУ изменение

большой полуоси составит

$$\Delta a = \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \frac{4\Delta V \cos \varphi d\varphi}{\Delta\varphi \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}} = \frac{8\Delta V}{\sqrt{3}\Delta\varphi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\Delta\varphi}{2}\right). \quad (49)$$

В выражение для изменения эксцентриситета входит эллиптический интеграл второго рода

$$\Delta e = \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \frac{\Delta V}{\Delta\varphi} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi} d\varphi = 4 \frac{\Delta V}{\Delta\varphi} E\left(\frac{\Delta\varphi}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (50)$$

11. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Графики, описывающие изменение большой полуоси и эксцентриситета в зависимости от угловой продолжительности маневров для различных типов ориентации ДУ, приведены на рисунках 6,7. На графиках сплошной линией изображены зависимости для орбитальной ориентации, пунктирной линией – для инерциальной ориентации, линией из точек – для ориентации «оптимальной по эксцентриситету».

Как можно видеть, при продолжительности маневров примерно до 50° , кривые для различных типов ориентации близки между собой. Изменение большой полуоси и эксцентриситета такое же, как при эквивалентном импульсе скорости. Это объясняет эффективность использования импульсных решений при относительно небольшой продолжительности маневров.

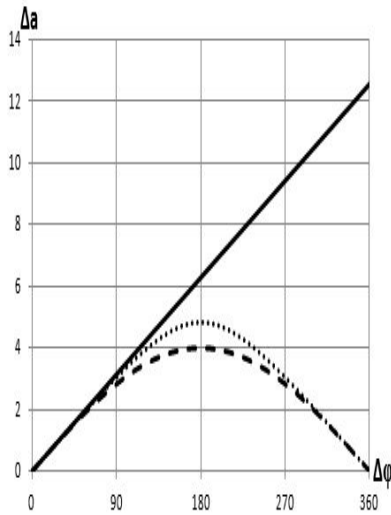


Рис. 6. Эффективность коррекции большой полуоси

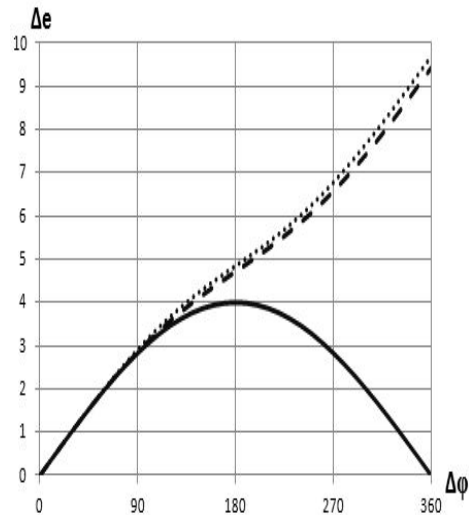


Рис. 7. Эффективность коррекции эксцентриситета

Очень важен тот факт, что зависимости для инерциальной ориентации и для ориентации «оптимальной по эксцентриситету» близки между собой (особенно для изменения эксцентриситета). Видно, что на рисунке 7, начиная примерно с $\Delta\varphi=180^\circ$, графики для инерциальной и «оптимальной по эксцентриситету» ориентации идут практически параллельно в непосредственной близости друг к другу. Это позволяет при больших отклонениях эксцентриситета вместо трудно реализуемой «оптимальной по эксцентриситету» ориентации использовать более простую, но практически столь же эффективную инерциальную ориентацию. Используя близость изменения эксцентриситета для этих типов ориентации, можно вместо интеграла (50) для «оптимальной по эксцентриситету» ориентации использовать приближенную формулу (51) [10]

$$\Delta e = \frac{w}{w_c} \left(\frac{3}{2} \Delta\varphi + \frac{1}{2} \sin \Delta\varphi + 0.04 \frac{\Delta\varphi}{\pi} \right) \quad \Delta\varphi \leq \pi, \quad (51a)$$

$$\Delta e = 1.54 \frac{w}{w_c} \Delta\varphi + \frac{w}{2w_c} \sin \Delta\varphi \quad \Delta\varphi \geq \pi, \quad (51b)$$

при этом ошибка не будет превосходить 0.5%.

12. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАНЕВРОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

При геометрической интерпретации маневров довольно эффективно использовать плоскость e_x, e_y . Однако в данной задаче существенным является не направление изменения вектора эксцентриситета (оно происходит вдоль линии апсид относительной орбиты), а соотношение изменения величины эксцентриситета и большой полуоси. Таким образом, целесообразно использовать систему координат, в которой по оси абсцисс откладывается изменение большой полуоси, а по оси ординат – изменение вектора эксцентриситета.

Рассмотрим использование этой плоскости на примере импульсных решений. Положительный трансверсальный импульс скорости ΔV_t (ему соответствует отрезок OA на рисунке 8), прикладываемый в перицентре относительной орбиты, производит одинаковое изменение эксцентриситета орбиты и большой полуоси $2\Delta V_t$. Отрицательному импульсу скорости $-\Delta V_t$, прикладываемому в этой точке, соответствует вектор OD . Положительному импульсу скорости, момент приложения которого отстоит на полвитка, соответствует вектор OB . Отрицательному импульсу скорости, прикладываемому через полвитка, соответствует вектор OC .

Пусть с помощью двух трансверсальных импульсов скорости $\Delta V_{t1}, \Delta V_{t2}$, прикладываемых на линии апсид относительной орбиты (ΔV_{t2} прикладывается в апоцентре относительной орбиты), необходимо перейти на орбиту, имеющую отличие в элементах $\Delta a_M, \Delta e_M$ (точка M на рис. 8), причем $\Delta a_M > \Delta e_M$ (переход между непересекающимися орбитами). Величины импульсов скорости находятся из системы

$$2\Delta V_{t1} + 2\Delta V_{t2} = \Delta a_M,$$

$$2\Delta V_{t1} - 2\Delta V_{t2} = \Delta e_M.$$

Этому переходу на плоскости a, e соответствует ломаная OLM . Оба импульса скорости положительные.

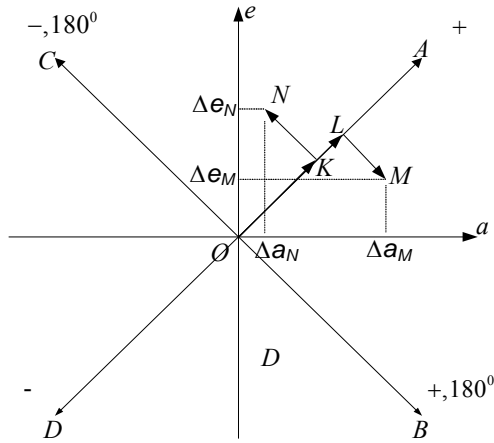


Рис. 8. Изменение большой полуоси и эксцентриситета импульсами скорости

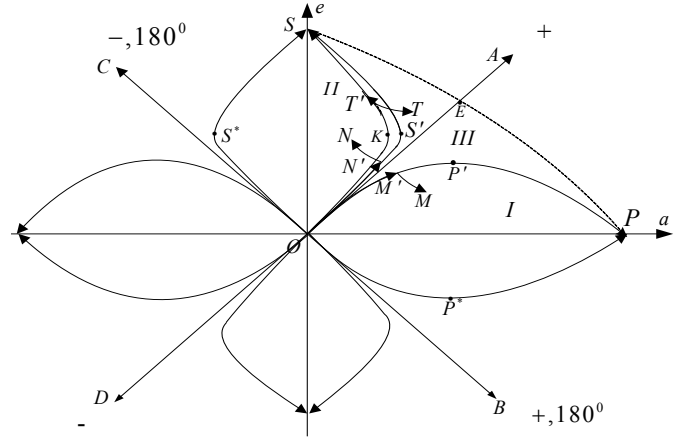


Рис. 9. Изменение большой полуоси и эксцентриситета с помощью ДУ постоянной тяги.

Если осуществляется переход между пересекающимися орбитами, например, в точке N ($\Delta a_N < \Delta e_N$), то ему соответствует ломаная OKN (второй импульс скорости отрицательный).

В случае маневров, выполняемых двигателями, имеющими ограниченную постоянную тягу, на витке можно получить только ограниченное изменение эксцентриситета и большой полуоси. Изменению элементов орбиты при фиксированной трансверсальной ориентации ДУ в орбитальной системе координат соответствует линия $OP'P$ (рис. 9). Точка P' достигается после работы ДУ в течение половины витка, точка P – когда ДУ работает весь виток. Ориентации, обеспечивающей максимальное изменение эксцентриситета, соответствует линия $OS'S$. Таким же образом изображаются аналогичные зависимости в других квадрантах [10]. Во втором, третьем и четвертом квадрантах стоят знаки «+», «-», « 180° ». Плюс показывает, что ориентация вектора тяги на разгон, минус – на торможение, 180° обозначает, что в данном квадранте изображается влияние маневра, середина которого отстоит на 180° от середины активного участка, влияние которого изображается в первом квадранте.

Для достижения точек из области, ограниченной линией $OP'P$ и осью абсцисс (область I), оптимальной является орбитальная ориентация ДУ. Но на витке должны исполняться два маневра, середины которых отстоят на 180° , ориентация ДУ одинаковая. Первому соответствует часть линии $OP'P$, второму – часть линии OP^*P . Например, переход в точку M осуществляется по траектории OMM . Величины $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, соответствующие дугам OM' и MM , находятся по формулам (29),(30).

Если требуется перейти на орбиту, которой соответствует точка из области, ограниченной осью ординат и линией $OS'S$ (область II), например, в т. N , то оптимальной является ориентация ДУ, обеспечивающая максимальное изменение эксцентриситета [10]. Постоянная ориентация в инерциальной системе координат близка к ней по эффективности коррекции эксцентриситета, но немного проигрывает в эффективности коррекции большой полуоси (линия OKS , рис. 9). Внутри рассматриваемой области второе обстоятельство не существенно, а «инерциальная» ориентация предпочтительней, если имеет значение простота построения и поддержания ориентации. На рис. 9 линии, соответствующие «инерциальной» и «оптимальной по эксцентриситету» ориентациям, практически сливаются. Переход в точку N , которому соответствует траектория ONN , осуществляется с помощью двух маневров. Первому соответствует часть линии $OS'S$, второму – часть линии OS^*S из второго квадранта. Величины $\Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_2$, соответствующие дугам ON' и NN , находятся из системы (43) для «инерциальной» ориентации или из системы (49),(51) для «оптимальной по эксцентриситету» ориентации.

Перейти на орбиту, которой соответствует точка из области III, ограниченной линиями $OS'S$ и $OP'P$ и линией SEP , соединяющей точки S и P , также можно с помощью двух маневров на витке, центры которых разнесены на 180° , однако типы ориентации ДУ для исполнения этих маневров лучше брать разными. При исполнении одного маневра ориентация вектора тяги фиксируется в орбитальной системе координат, а при реализации другого – в

инерциальной. В уравнения системы для определения параметров таких маневров входят слагаемые из уравнений системы (27),(28) и системы (43). Например, параметры маневров, обеспечивающих переход *ОТТ* (рис. 9), определяются из системы

$$\begin{aligned} 3\Delta\varphi_1 + \sin \Delta\varphi_1 - 8 \sin \frac{\Delta\varphi_2}{2} &= \frac{2w_c \Delta e}{wm}, \\ 2 \sin \frac{\Delta\varphi_1}{2} + \Delta\varphi_2 &= \frac{w_c \Delta a}{2wm}. \end{aligned} \quad (52)$$

В области III перейти в нужную точку можно и одним оптимальным длительным маневром с изменяющимся углом α в течение маневра. Маневры этого типа будут исследованы в следующем параграфе.

13. ОПТИМАЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ВЕКТОРА ТЯГИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕВЫРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Были рассмотрены случаи, когда годограф базис-вектора вырождался в точку, а также имел вид эллипса, симметричного относительно оси λ . Исследуем оптимальные решения, соответствующие другим положениям эллипса. Рассмотрим увеличивающиеся в размере эллипсы, имеющие внешнее касание с окружностью единичного радиуса и расположенные справа от неё. При росте размеров эллипса, например, варианты а), b), c) на рис. 10, соответствующие эллипсам дуги на плоскости a, e (они обозначены a, b, c на рис. 12) постепенно отходят от дуги *OPP*, приближаясь к дуге *OLL*, ограничивающей область (она обозначена цифрой IV) существования решений этого типа.

Аналогично при росте размеров эллипса, имеющего внутреннее касание с окружностью единичного радиуса (варианты d), e), f) на рис. 11), соответствующие эллипсам дуги (они обозначены d, e, f на рис. 12) постепенно отходят от дуги *OSS*, заполняя всю оставшуюся часть области III. Область существования решений этого типа обозначена цифрой V. Линии, соответствующие эллипсам больших размеров, также приближаются к дуге

OLL , но остается изгиб вверх, связанный с наличием участка, где $\mu < 0$. Чем меньшая часть эллипса принадлежит левой полуплоскости, тем ближе кривая к дуге OLL и тем меньше загиб вверх.

То, что при произвольных значениях k, λ_1 соответствующие им дуги на плоскости a, e не выходят за пределы границ области III, еще раз говорит о том, что при оптимальной ориентации вектора тяги внутренних точек областей I и II можно достичь только двумя включениями ДУ, а дуга OSS обеспечивает максимальное изменение эксцентриситета.

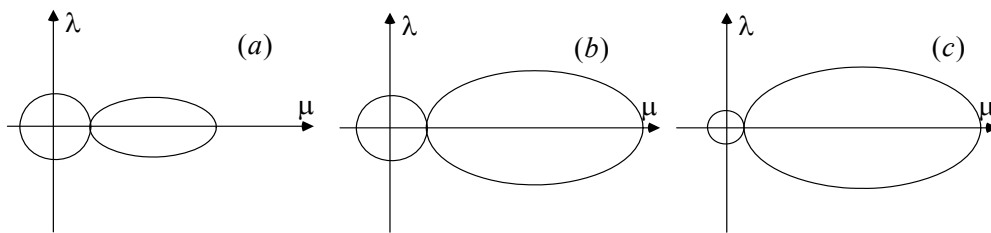


Рис. 10. Внешнее касание годографа базис-вектора и окружности единичного радиуса

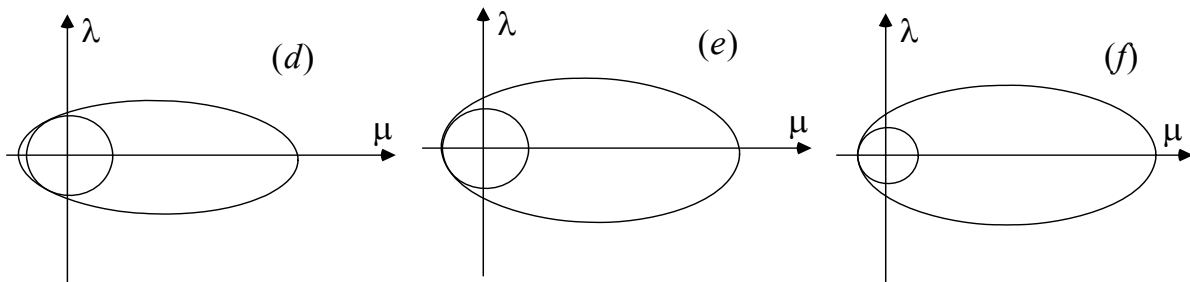


Рис. 11. Внутреннее касание годографа базис-вектора и окружности единичного радиуса

Приближенно дугу OLL , разделяющую области IV и V, можно представить зависимостью [11]

$$e = -0.003a^3 - 0.035a^2 + 1.068a, \quad 0 \leq a \leq 9.67, \quad (53)$$

а дуга SEP определяется формулами

$$e = 0.001a^3 - 0.081a^2 - 0.593a + 9.69, \quad 0 \leq a < 8.27, \quad (54a)$$

$$e = -0.04a^3 + 1.404a^2 - 14.295a + 55.332 \quad 8.27 \leq a < 12.57. \quad (54b)$$

Чтобы получить границы областей для конкретной задачи, надо перейти от переменных a, e к переменным a^*, e^*

$$a^* = \frac{w_c a}{w}, \quad e^* = \frac{w_c e}{w}$$

Дуга OPP параметрически задается формулами (20), (24), а дуга $OS'S$ – формулами (35), (39).

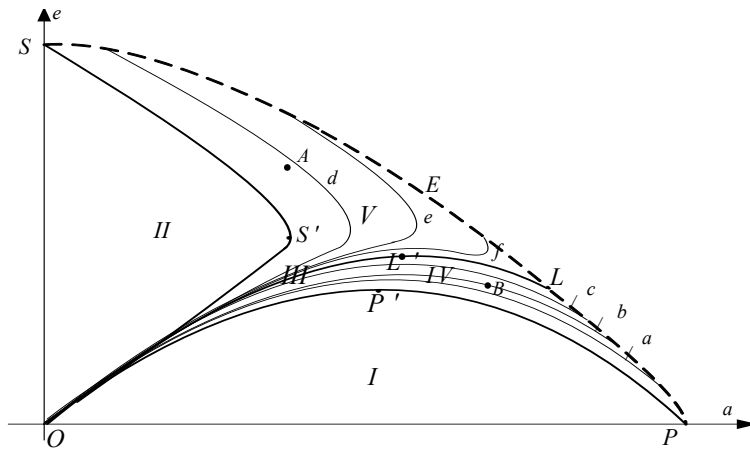


Рис. 12. Области существования решений различного типа.

Информация о границе SEP очень важна, т.к. позволяет довольно точно оценить возможность перехода между орбитами одним маневром на витке (или сколько витков n потребуется для маневрирования) без непосредственного вычисления параметров самого маневра.

14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМАЛЬНОГО НЕВЫРОЖДЕННОГО РЕШЕНИЯ

Будем искать параметры маневра (его продолжительность и закон изменения угла α), обеспечивающие заданные изменения элементов орбиты Δa_0 и Δe_0 .

Так как из необходимых условий оптимальности следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{k \sin \varphi}{2(\lambda_1 + k \cos \varphi)},$$

можно найти косинус и синус угла α

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{2(\lambda_1 + k \cos \varphi)}{\sqrt{4\lambda_1^2 + 8\lambda_1 k \cos \varphi + 3k^2 \cos^2 \varphi + k^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{4\lambda_1^2 + 8\lambda_1 k \cos \varphi + 3k^2 \cos^2 \varphi + k^2}} \end{aligned} \quad (55)$$

Используя (55) и (44), (45), получаем следующие выражения для изменения большой полуоси и эксцентриситета

$$\Delta a = \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \frac{4(\lambda_1 + k \cos \varphi)}{\sqrt{4\lambda_1^2 + 8\lambda_1 k \cos \varphi + 3k^2 \cos^2 \varphi + k^2}} d\varphi \quad (56)$$

$$\Delta e = \int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} \left(2 \frac{2(\lambda_1 + k \cos \varphi) \cos \varphi}{\sqrt{4\lambda_1^2 + 8\lambda_1 k \cos \varphi + 3k^2 \cos^2 \varphi + k^2}} + \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{4\lambda_1^2 + 8\lambda_1 k \cos \varphi + 3k^2 \cos^2 \varphi + k^2}} \right) d\varphi . \quad (57)$$

Можно предложить следующий алгоритм для определения k, λ_1 и $\Delta\varphi$. Определяется, какой области принадлежит точка $(\Delta a_0, \Delta e_0)$: если области I, то $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2$ находятся по формулам (29),(30); если области II, то используются формулы (49),(51). Нас интересует случай, когда точка $(\Delta a_0, \Delta e_0)$ принадлежит области IV или V. Предположим, что она принадлежит области IV.

Поиск решения состоит из последовательного повторения двух этапов. На первом этапе берется точка из пространства k, λ_1 , что задает закон изменения угла α (например, точка $k=0, \lambda_1=0.5$). На следующем этапе вычисляется интеграл (56) до тех пор, пока вычисленное значение Δa_c не совпадет с необходимой точностью с Δa_0 (упрощает этот процесс то, что стоящая под интегралом функция - четная). Значение $\Delta\varphi$, при котором $\Delta a_c = \Delta a_0$, подставляется в пределы интегрирования в (57). Если вычисленное значение Δe_c совпадает с необходимой точностью с Δe_0 , то задача решена. В противном случае переходим к первому этапу, т.е. берется новая точка из пространства k, λ_1 . В окрестности оптимального решения шаги перебора в пространстве k, λ_1 и интегрирования уменьшаются, чтобы обеспечить необходимую точность решения задачи.

Аналогичная процедура применяется для точек из области V, только для поиска $\Delta\varphi$ используется не интеграл (56), а (57), затем проверяется совпадение с необходимой точностью Δa_c с Δa_0 .

Решить задачу для отклонений из области III можно и с помощью двух маневров с изменяющейся ориентацией вектора тяги, но пропадает выигрыш в уменьшении числа маневров, а реализовать фиксированную ориентацию ДУ

намного проще. Как видно из рисунков 6,7, эффективность различных маневров при продолжительности работы ДУ менее 100° примерно одинаковая, и не имеет особого значения, какой тип ориентации использовать. При большей продолжительности эффективней становится или орбитальная, или инерциальная фиксация ориентации вектора тяги.

15. ПЕРЕХОД С ОРБИТЫ ВЫВЕДЕНИЯ НА РАБОЧУЮ ОРБИТУ И ПОДДЕРЖАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАБОЧЕЙ ОРБИТЫ В ЗАДАННОМ ДИАПАЗОНЕ

Описанные в предыдущих параграфах алгоритмы были использованы для расчета параметров маневров, переводящих малый космический аппарат (МКА) с орбиты выведения на рабочую орбиту, и маневров, удерживающих элементы рабочей орбиты в заданном диапазоне.

Предполагается, что высота номинальной рабочей солнечно-синхронной орбиты МКА $h=500\text{км}$, масса МКА $m=200\text{кг}$, тяга его двигательной установки $P=0.5\text{н}$, удельный импульс $I=34300\text{м/с}$, баллистический коэффициент $S=0.01$. Ошибка орбиты выведения может составлять по большой полуоси 20км , по эксцентриситету – 0.003 . Было рассмотрено множество вариантов, из которых для представления в данной работе были выбраны два. Им соответствуют Δa и Δe из области V (вариант 1) и из области IV (вариант 2) (точки A и B на рис. 12).

В таблице 1 приведены оскулирующие элементы (в восходящем узле) рабочей орбиты и орбит выведения для обоих вариантов: большая полуось, эксцентриситет и аргумент перицентра. Для расчета параметров компланарных маневров переходов существенны только эти элементы. В таблице 2 – отклонения элементов орбит и угол, задающий середину активных участков. В таблице 3 приведены результаты расчетов: угловая продолжительность активных участков, их начало и конец (отсчитываются от восходящего узла), суммарная характеристическая скорость и изменение массы МКА, а также значения констант, определяющих положение эллипса годографа базис-вектора, который задает ориентацию двигательной установки. В таблице 3 и в таблице 4

угловые величины приведены в градусах, суммарная характеристическая скорость – в м/с, изменение массы – в кг.

Таблица 1

Орбита	a (км)	e	ω (град)
Рабочая	6871	0	0
Выведение 1	6861.64	0.0021	59.2
Выведение 2	6854.33	0.0011	23.6

Таблица 2

Орбита	Δa_0 (км)	Δe_0	φ_e (град)
Вывед-е 1	9.36	0.0021	239.2
Вывед-е 2	16.67	0.0011	202.6

Таблица 3

Орбита	$\Delta\varphi$	$\varphi_{нач}$	$\varphi_{кон}$	ΔV	Δm	k	λ_1
Выведение 1	294.2	92.1	386.3	11.61	0.675	0.7134	0.2176
Выведение 2	268.4	68.4	336.8	10.59	0.615	0.2585	0.7597

Были рассчитаны также параметры маневров, обеспечивающих на интервале времени от 1 июня 2011 года до 1 июня 2018 года удержание большой полуоси рабочей орбиты в диапазоне 6373 ± 2 км. Высота контролировалась в восходящем узле орбиты. Так как в процессе моделирования полета МКА большая полуось орбиты уменьшалась под действием атмосферы, потребовалось 40 раз увеличивать высоту орбиты. Каждый подъем осуществлялся с помощью двух маневров продолжительностью около 5 минут каждый. Параметры двух первых и двух последних маневров приведены в таблице 4. Так как корректировалось только отклонение большой полуоси орбиты ($\Delta e=0$), то на плоскости a, e точки, соответствующие корректируемым отклонениям, принадлежат оси a , таким образом они находятся глубоко внутри области I. Для коррекции используется оптимальная в этом случае фиксированная трансверсальная ориентация вектора тяги в орбитальной системе координат. Параметры маневров рассчитывались по формулам (21),(22). Каждый раз для уточнения параметров двух связанных

маневров подъема орбиты использовалась итерационная процедура, описанная в параграфе 12. Суммарная характеристическая скорость 80 маневров составила 61.42м/с. Общее изменение массы МКА – 3.5кг. Как видно из таблицы 5, эти затраты распределены по годам полета существенно неравномерно, что связано с разным уровнем солнечной активности.

Выбором исходных значений долготы восходящего узла ($\Omega=72.4^\circ$) и наклона ($i=97.448^\circ$) на начало полета было обеспечено пребывание местного локального солнечного времени в диапазоне [11.8746,11.94](часов).

Таблица 4

№маневра	виток	$\Delta\varphi$	$\varphi_{нач}$	$\varphi_{кон}$	ΔV_i	Δm_i
1	859	19.19	48.26	67.45	.757	0.044
2	859	19.19	228.26	247.45	.757	0.044
79	37053	19.29	32.31	51.60	.760	0.045
80	37053	19.29	212.31	231.6	.760	0.045

Таблица 5

Год полёта	1	2	3	4	5	6	7	Σ
ΔV	9.24	10.80	13.90	10.77	9.11	4.55	3.02	61.42

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00431 и научной школой НШ-6700.2010.1

16. ЛИТЕРАТУРА

1. Рылов Ю.П. Управление космическим аппаратом, входящим в спутниковую систему при помощи электроракетных двигателей // Космические исследования, 1985.- Т. 23, №. 5. - С. 691.
2. Булынин Ю.Л. Баллистическое обеспечение управления орбитальным движением геостационарных КА на различных этапах эксплуатации // 13 Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», тезисы докладов. – Крым, Евпатория, 29 июня-06 июля 2008, с. 73-74.

3. Kamensky S., Tuchin A., Stepanyants V., Alfriend K.T. Algorithm of Automatic Detection and Analysis of non-Evolutionary Changes in Orbital Motion of Geocentric Objects // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Paper AAS 09-103
4. Улыбышев Ю.П. Оптимизация многорежимных траекторий сближения с ограничениями // Космические исследования, 2008, т.46, № 2. – с. 135-147.
5. Кузмак Г.Е., Брауде А.З. Приближенное построение оптимальных перелетов в малой окрестности круговой орбиты // Космические исследования, 1969, т.7, № 3. – с. 323-338.
6. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. – М.: Наука, 1976. – 744 с.
7. Бушуев Е.И., Красовский А.А. О геометрическом решении задачи импульсного перехода между близкими почти круговыми орбитами // Космические исследования, 1969, т. 7, № 4. – с. 485-489.
8. Лоуден Д.Ф. (Lawden D.F.) Оптимальные траектории для космической навигации. – М.: Мир, 1966. – 152 с.
9. Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют – 6» - «Союз» - «Прогресс», Петров Б.Н. Бажинов И.К. и др. – М.: Наука, 1985. – 375 с.
10. Баранов А.А., Баранов А.А. Маневрирование с помощью ДУ, имеющей постоянную малую тягу // Актуальные проблемы российской космонавтики, Материалы XXXIV Академических чтений по космонавтике (Москва, 26-29 января, 2010 г.). – М.: Комиссия РАН, 2010. – с. 115–116.
11. Разумный В.Ю. Оптимальные переходы между близкими околокруговыми компланарными орбитами с помощью двигателей, имеющих постоянную малую тягу// Конференция СНТО кафедры СМЗ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2010 г.