ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 32 за 2010 г.

Рябенький В.С.

Активное управление в реальном времени звуком в составной области

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рябенький В.С. Активное управление в реальном времени звуком в составной области // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 32. 9 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-32

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

В.С. Рябенький

АКТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ ЗВУКОМ В СОСТАВНОЙ ОБЛАСТИ

МОСКВА
2010

Активное управление в реальном времени звуком
в составной области
В.С. Рябенький
Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Построено активное управление процессом распространения звука, которое вызывает уменьшение влияния источников, расположенных в первой из двух подобластей составной области, на поле во второй и, в то же время, вызывает усиление в то же число раз влияния источников, расположенных во второй подобласти на поле в первой.

Важно, что своевременная выработка управляющего воздействия, поддерживающего указанный процесс, построена на информации, получаемой наблюдением над процессом в текущий момент времени лишь в малой окрестности границы между подобластями.

Выполненная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 08-01-00099

Ключевые слова: проблема защиты от шума, активное управление, метод разностных потенциалов

Active real time sound control in a composite domain
V.S. Ryabenkii
Preprint of Keldysh Institute of applied Mathematics of RAS

It is proposed an active sound propagation control, which causes a decrease in the influence of sources located in the first of two subdomains of a compound domain on the field in the second and at the same time, the increase of the same number of times the influence of sources located in the second subdomain on the field in the first one.

It is important that the timely generation of the control action that supports this process, based on information received with observation over the process in the current time only in a small neighborhood of the boundary between subdomains.

Keywords: problem of protection against noise, active control, method of difference potentials

This work issupported by RFFI, grant № 08-01-00099

На плоскости xot введем сетку точек $m=(m_x h, m_t\tau)$ с шагами $h>0$ и $\tau>0$ по пространству и времени, соответственно, m_x, m_t целые. Зададим $a>0$, $T>0$ и рассмотрим область $|x|<a, \quad t<T$. Будем считать, что $a\cdot h^{-1}$ и $T\cdot\tau^{-1}$ суть целые числа.

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn}u_n = f_m, \quad m\in M \tag{1}$$

Здесь M множество точек m сетки, лежащих внутри области $|x|<a,\ 0<t<T$; N_m - шаблон, состоящий из пяти точек

$$n=(m_x h, m_t\tau),\big((m_x\pm 1)h, m_t\tau\big),\quad \big(m_x h,(m_t\pm 1)\tau\big);$$

a_{mn} и f_m - коэффициенты и правые части.

Пусть при этом

$a_{mn}=1,$ если $n=\big(m_x h,(m_t+1)\tau\big)$

$a_{mn}\neq 0$, если $n=\big((m_x\pm 1)h, m_t\tau\big)$

Решения u_N уравнения (1) определены на множестве $N=\bigcup N_m, m\in M$.

Дополним уравнение следующими начальными и граничными условиями

$u_n=0$, если $n_t\le 1$

$$\begin{cases} u_n\Big|_{n=(-a,n_t\tau)} = A^-_{n_t}u_n\Big|_{n=(-a+h,n_t\tau)}, & 0<n_t\tau<T \\ u_n\Big|_{n=(a,n_t\tau)} = A^+_{n_t}u_n\Big|_{n=(a-h,n_t\tau)}, & 0<n_t\tau<T \end{cases}.$$

Функции $u_N=\{u_n\}$, $n\in N$, удовлетворяющие этим начальным и краевым условиям, образуют линейное пространство U_N, и сами эти условия можно записать как включение

$$u_N\in U_N \tag{2}$$

Разобьем M на два непересекающиеся подмножества M^+ и M^-, отнеся к M^+, точки $m \in M$, если $m_x \geq 1$. Множество M^- состоит тогда из точек $m \in M$, у которых $m_x \leq 0$. Обозначим $N^+ = \bigcup N_m$, $m \in M^+$; $N^- = \bigcup N_m$, $m \in M^-$ и $\gamma = N^+ \bigcap N^-$. Очевидно, что граница γ состоит из совокупности точек $n = (n_x h, n_x \tau)$, удовлетворяющих условиям

$$n_x = 0 \quad \text{или} \quad n_x = 1; \quad 0 < n_t \tau < T.$$

Обозначим через $u_N^+ = \{u_n\}, \quad n \in N$, решение задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^+ = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \in M^+ \\ f_m, & \text{если} \quad m \in M^- \end{cases} .$$

$u_N^+ \in U_N$

Обозначим, далее, через $u_N^- = \{u_n\}, \quad n \in N$, решение задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} u_n^- = \begin{cases} f_m, & \text{если} \quad m \in M^+ \\ 0, & \text{если} \quad m \in M^- \end{cases}$$

$u_N^- \in U_N$

Очевидно, что

$$u_n = u_n^+ + u_n^-, \quad n \in N.$$

Определение 1. Будем говорить, что функция $z_n^{(\varepsilon)}, z_n^{(\varepsilon)} \in U_N$, получена из решения u_N, задачи (1), (2) в результате ε- согласованных изменений, если

$$z_n^{(\varepsilon)} = \begin{cases} u_n^+ + \varepsilon u_n^-, & \text{если} \quad n \in N^- \\ \frac{1}{\varepsilon} u_n^+ + u_n^-, & \text{если} \quad n \in N \setminus N^- \end{cases} . \tag{3}$$

Здесь ε - вещественный параметр, $\varepsilon \neq 0$.

Определение 2. Функцию $g_m = g_m(\varepsilon),\ m \in M$, назовем активным управлением решением задачи (1), (2), если решение задачи

$$\begin{aligned} &\sum_{n \in N_m} a_{mn} z_n^{(\varepsilon)} = f_m + g_m,\ m \in M \\ &z_N^{(\varepsilon)} \in U_N \end{aligned} \tag{4}$$

совпадает с функцией (3) .

Теорема 1. При любом вещественном ε, отличном от нуля, существует одно и только одно активное управление $g_m = g_m(\varepsilon),\ m \in M$. Это активное управление задается формулой

$$g_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m_x \neq 1 \quad \text{и } m_x \neq 2 \\ (\varepsilon - 1)\left[\sum\limits_{n \in N_m} a_{mn}\tilde{u}_n^- + \dfrac{1}{\varepsilon}\sum\limits_{n \in N_m} a_{mn}\tilde{u}_n^+\right], & \text{если } m_x = 1 \quad \text{или } m_x = 2 \end{cases}, \tag{5}$$

где

$$\tilde{u}_n^- = \begin{cases} u_n^-, & \text{если } n \in \gamma \\ 0, & \text{если } n \notin \gamma \end{cases} \qquad \tilde{u}_n^+ = \begin{cases} u_n^+, & \text{если } n \in \gamma \\ 0, & \text{если } n \notin \gamma \end{cases}$$

Определение 3. Задачу (1), (2) будем называть задачей в реальном времени, если в текущий момент времени $t = p\tau$ неизвестны $a_{mn}, f_m, A_m^{\pm}$ при $m_t > p$.

Определение 4. Зададим $b, 0 < b < a$, причем $b \cdot h^{-1}$ - некоторое натуральное число. Значения

$$a_{mn}, f_m, |m_x h| < b, m_t \leq p \tag{6}$$

$$z_n^{(\varepsilon)}, \quad \text{если} \quad n_x h = -b \quad \text{или} \quad n_x h = b,\ n_\tau \leq p \quad , \tag{7}$$

будем называть приграничными входными данными в момент $t = p\tau$.

Укажем алгоритм своевременного, то есть к моменту $t = p\tau$, построения активного управляющего воздействия $g_m(\varepsilon), |m_x h| < a$, $m_t = p$, которое должно быть осуществлено в наступающий текущий момент времени $t = p\tau$.

Введем таблицу

$$A(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} u_n^- + u_n^+, & |n_x h| \le b, \quad n_t = k\tau \\ \dfrac{1}{\varepsilon} u_n^- + u_n^+, & |n_x h| \le b, \quad n_t = (k-1)\tau \end{cases}, \tag{8}$$

зависящую от номера k.

Очевидно, что если известно $A(p)$, то в силу формулы (5) для g_m, $m_t = p$, из первой строчки таблицы $A(p)$ известно искомое управление g_m, $m_t = p$, которое должно быть задействовано в момент $t = p\tau$. Алгоритм вычисления $A(k)$ построим с помощью индукции по номеру k. Очевидно в силу (2), что $A(1)$ состоит из нулей. Пусть уже известно $A(1), A(2), \ldots, A(p-1)$. Вычисление $A(p)$ осуществим в текущий момент $t = p\tau$. Вычисление первой строчки таблицы $A(p)$

$$w_n \equiv \frac{1}{\varepsilon} u_n^- + u_n^+,$$

при $n_t = p, \ -b < n_x h < b$, осуществляется по формуле

$$w_{(n_x h, p\tau)} = -\sum_{n \in N'_m} a_{mn} w_n + \varphi_m, \quad |m_x h| < b, \ m_t = p-1,$$

где N'_m получается из шаблона N_m выбрасыванием точки $n = (m_x h, \, p\tau) \in N_m$, а число φ_m есть

$$\varphi_m = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} f_m, & \text{если} \quad -b < m_x h \le 0 \\ f_m, & \text{если} \quad 0 < m_x < b \end{cases} .$$

Значения w_n при $n_x h = -b,\ n_x h = b$ и $n_t = p$ вычисляются по формулам

$$w_n \Big|_{n_x h = -b} = \frac{1}{\varepsilon} z_n^{(\varepsilon)} \Big|_{n_x h = -b}, \quad n_t = p$$

$$w_n \Big|_{n_x h = b} = z_n^{(\varepsilon)} \Big|_{n_x h = b}, \quad n_t = p$$

правые части которых по предположению становятся известны, возможно в результате физических измерений, как раз в текущий момент времени $t = p\tau$.

Пусть значения $z_n^{\varepsilon}, |n_x h| = b$, входящие в приграничные условия (7), заданы (быть может, измерены) неточно с погрешностью Φ_p в точках $n = (n_x h, p\tau)$ при $n_x h = -b$ и с погрешностью Ψ_p в точках $n = (n_x h, p\tau)$ при $n_x h = b$. Тогда активное управление $g_m(\varepsilon)$ будет вычислено с некоторой погрешностью, а в результате неточного активного управления вместо $z_N^{(\varepsilon\}}$ получится некоторая функция $z_n^{(\varepsilon\}} + v_n,\ v_n = v_n(\varepsilon),\quad n \in N$. Займемся представлением погрешности v_N в таком виде, когда легче судить о величине влияния неточностей Φ_p и Ψ_p на эту погрешность. Обозначим $\{v_n^+\}$, $-b \le n_x h \le a$, решение задачи

$$\sum_{n \in N_m} a_{mn} v_n^+ = 0, \quad -b < m_x h < a, \quad n_t = 0, 1, \ldots, \frac{T}{\tau}$$

$$v_n^+ \Big|_{n_x h = -b} = \Phi_p, \quad n = (n_x h,\ p\tau)$$

$$v_n^+ = 0, \text{ если } n = (n_x h, p\tau), \qquad -b \le n_x h \le a \quad p = 0 \text{ или } p = 1$$

$$v_n \Big|_{n_x h = a} = A_p^+ v_n \Big|_{n_x h = a - h}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Обозначим $\left\{v_n^-\right\}, -a \le n_x h \le b$, решение задачи

$$\sum_{n\in N_m} a_{mn} v_n^- = 0, \quad -a < m_x h < b, \quad n_t = 0,1,\ldots,\frac{T}{\tau}$$

$v_n^- = 0$, если $n = \left(n_x h,\, p\tau\right), \quad -a \le n_x h \le b$, $p = 0$ или $p = 1$.

$$v_n^-\Big|_{n_x h = b} = \Psi_p, \quad n = \left(n_x h,\, p\tau\right)$$

$$v_n^-\Big|_{n_x h = -a} = A_p^- \cdot v_n^-\Big|_{n_x h = -a+h}$$

Теорема 3. Функция-погрешность v_N задается формулой

$$v_n = \begin{cases} (1-\varepsilon)\cdot v_n^-, & n \in N^- \\ \left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right) v_n^+, & n \in N^+ \setminus \gamma \end{cases}.$$

Обсудим полученные результаты. Построенное управление $g_m(\varepsilon)$, в частности, позволяет (при малом ε) ослабить влияние источников $f_m, m \in M^+$, на акустическое поле в подобласти N^-, используя для этого *только* приграничную информацию (6), (7). Заметим, что эта информация более легко доступна, чем информация об $a_{mn},\ f_m, \left|m_x h\right| > b,\ m_t \le p$ и $A_{m_t}^{\pm},\ m_t \le p$, если разностная задача (1), (2) является математической моделью физического процесса. В этом случае значения $z_n^{(\varepsilon)},\ \left|n_x h\right| = b$, можно получить физическими измерениями в текущий момент времени $t = p\tau$.

Теорема 3 дает основание ожидать, что результат действия управления $g_m(\varepsilon),\ m \in M$, устойчив относительно возмущений Φ_p и Ψ_p в той мере, в какой устойчивы решения v_n^+ и v_n^- относительно возмущений Φ_p и Ψ_p соответственно.

Задачами активного управления звуком занимались многие авторы [1]. Настоящая работа примыкает к серии статей [2-9] и к ч. VI книги [10].

Литература.

1. *P.A. Nelson and S.J. Elliott*, Active Control of Sound, Academic Press, San Diego, 1999.

2. *Рябенький В.С*. Разностная задача экранирования, Функциональный анализ и его приложения. 1995, т.29, № 1, с.70-71

3. *Рябенький В.С*. Нелинейная задача экранирования. Успехи мат. наук. 1995. т.50, № 4, с.146

4. *Вейцман Р.И., Рябенький В.С*. Разностные задачи экранирования и имитации. //Докл. РАН.- 1997.- Т.354. № 2. С. 151-154

5. *V.S. Ryaben'kii, S.V. Utyuznikov, A. Turan*. On the application of difference potential theory to active noise control, Advances in applied mathematics, (40) No.2, 2008

6. *H.Lim, S.V. Utyuznikov, Y.Lam, A.Turan, M.R. Avis, V.S. Ryaben'kii, S.V.Tsynkov.* An experimental validation of the active noise control method based on difference potential, AIAA. т.47, № 4, с. 874-887, 2009.

7. *В.С. Рябенький, С.В. Утюжников, С.В. Цынков*. Разностная задача подавления шума и другие задачи активного управления одночастотным звуком в составной области. //Доклады РАН. 2009. т. 425. №4. с. 456-458

7. *S.V. Utyuznikov*, IMAJ Appl. Math. 74 (1), 128-148 (2009)

9. *В.С. Рябенький*, Докл. РАН, 2010, т. 430. № 2. с. 166-168

10. *В.С. Рябенький*. Метод разностных потенциалов и его приложения. Издание 3-е, Физматлит. Москва. 2010.