ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 1 за 2010 г.

Янов Ю.И.

Конструктивное построение теории множеств. I. Порядковые и кардинальные числа

Ордена Ленина
институт прикладной математики
Имени М.В.Келдыша
Российской академии наук

Ю.И.Янов

Конструктивное построение теории множеств.

I. Порядковые и кардинальные числа.

Москва

Аннотация. Предлагается вариант теории множеств, в котором понятие множества, помимо обычных ограничений, должно удовлетворять требованию завершимости процесса его построения. Благодаря этому класс ординалов получается вполне упорядоченным отношением принадлежности, так что континуум-проблемы не существует. Данная публикация содержит неформальное изложение теории, аксиоматизация которой будет описана во второй части.

Annotation. This work proposes set-theory in which the concept of a set depends on it’s constructions process. Owing to that the class of ordinals is well ordered, therefore continuum-problem does not exist. This publication contains not formal account, axiomatization would be described in second part.

0. Введение. Целью работы является построение теории множеств, лишённой такого традиционного недостатка, как независимость обобщённой континуум-гипотезы. Наиболее естественным путём для этого является ограничение допустимых средств порождения множеств, и в частности, ординалов. При этом безусловно не следует отказываться от общепринятых теоретико-множественных операций, так что все ограничения приходится формулировать в виде условий применимости тех или иных операций. То, что понятие множества нуждается в определённом ограничении, стало ясно по тем противоречиям, которые сразу же обнаружились в построенной Кантором "наивной" теории множеств, в которой интуитивное понятие множества не ограничено никакими условиями. Это создаёт возможность появления неестественных понятий, порождающих такие противоречия, как парадоксы Кантора и Рассела. При аксиоматизации теории множеств Цермело ограничил понятие множества условиями, исключающими эти парадоксы. Но и без явных противоречий в современных теориях множеств остаётся слабое место – несравнимость мощностей несчётных множеств, построенных разными средствами, что выражается в независимости континуум-гипотезы. Напомним суть этой проблемы. Кардиналы (кардинальные числа, алефы) обычно определяют как наименьшие ординалы в своей мощности [6]: $\aleph_0=\omega$, $\aleph_{\gamma+1}=\omega_{\gamma+1}$ – наименьший ординал, мощность которого превосходит мощность ω_γ. В то же время существует другой способ порождения несчётных множеств – с помощью операции степени Px, дающей множество всех подмножеств множества x. Согласно теореме Кантора мощность множества Px превосходит мощность множества x и таким образом возникает вопрос о сравнении мощностей таких множеств с алефами. Простая континуум-гипотеза утверждает равенство $P\aleph_0=\aleph_1$, обобщённая - $P\aleph_\gamma=\aleph_{\gamma+1}$ – для произвольного γ. Обе эти гипотезы независимы в обычной теории множеств, т.е. не приводят к противоречию ни они, ни их отрицания.

Во всех известных версиях теории множеств последовательность ординалов может быть построена двумя операциями: добавлением одного элемента к предыдущему ординалу и "переходом к пределу", т.е. объединением или суммированием бесконечной последовательности ранее построенных ординалов, и это объединение рассматривается как предел последовательности. Обычно в качестве первой операции используется функция $s_0(x)=x\cup\{x\}$. Исходя от пустого множества $\varnothing$, с помощью этой операции получаются все конечные ординалы и только они. Чтобы получить следующий за всеми ими бесконечный ординал ω, необходимо предположить завершимость этого процесса (что с точки зрения человеческой интуиции вполне естественно) и тогда ω можно определить как множество (сумму) всех конечных ординалов. Продолжив подобный процесс, исходя теперь от ординала ω, и считая его завершимым, мы получим ординал ω+ω и т.д. Если принять во внимание теорему о счётности любой счётной суммы счётных множеств, то описанный выше процесс построения ординалов никогда не выведет нас за пределы счётных ординалов. Поэтому чтобы применить к нему переход к пределу, т.е. объединение всех счётных ординалов и построить несчётный ординал, необходимо предположить завершимость процесса построения всех счётных ординалов. Однако этот процесс уже не является счётным и потому требование завершимости следует распространить и на несчётные процессы. Таким образом для построения всех ординалов потребуется обобщённый тезис о завершимости процессов любой мощности. В традиционных теориях множеств этот тезис не оговаривается, но принимается как нечто само собой разумеющееся. Хотя принятие подобного тезиса не является чем–то необычным для математики, но в данном случае он и создаёт неопределённость при сравнении мощностей несчётных множеств, построенных разными средствами. При разных подходах понятие завершимости может быть различным, его выбор зависит от математических или философских концепций, от предполагаемых свойств порождаемой теории и т.п. В данной работе используется понятие завершимости (определённое на стр. 13), смысл которого состоит в том, что последовательность является завершимой лишь в том случае, когда её мощность не превосходит наименьшую верхнюю грань мощностей её членов. Принятие тезиса (аксиомы) завершимости накладывает соответствующее ограничение на понятие множества, а именно, совокупность всех элементов последовательности является множеством лишь в том случае, когда эта последовательность завершима. Таким образом, построение множеств высокой мощности возможно только с помощью операций, повышающих мощность за конечное число шагов, например, операции степени. Впрочем, для построения ординалов (и множеств вообще) мы используем в качестве промежуточных объектов и незавершимые последовательности, т.е. классы, не являющиеся множествами (которые принято называть *собственными классами*). В результате мы получаем линейную шкалу мощностей, так что континуум-проблема отсутствует.

Одной из попыток как-то ограничить произвол при построении множеств является предложение Шёнфилда [3,4] считать множество построенным только в том случае, когда предварительно (т.е. на более ранней стадии) построены все его элементы. Однако такого ограничения недостаточно для того, чтобы избежать неопределённости в соотношении мощностей.

Есть ещё одно слабое место в традиционных определениях ординалов. Начиная с фон-Ноймана [10], ординалы часто определяются как транзитивные множества, вполне упорядоченные отношением принадлежности $\in$. Шёнфилд [3,4] предлагает некоторое усиление этого определения, требуя вместо транзитивности 2-транзитивность, состоящую в транзитивности не только самого множества, но и всех его элементов. Однако эти определения неоднозначны, и кроме того, поскольку степень произвольного множества не может быть вполне упорядочена отношением принадлежности, то никакой ординал, а следовательно и кардинал, не может быть степенью бесконечного множества, что также препятствует сравнению мощностей множеств, построенных разными операциями.

Ещё одной особенностью работы является явное определение понятий ординала и кардинала, которое позволяет представить их в виде суперпозиций некоторых исходных функций. (Только в этом смысле в заглавии употреблён термин “конструктивный” и потому к интуиционизму он не имеет отношения).

В первой части работы даётся неформальное описание семантики предлагаемой теории. Аксиоматика полуформального типа будет описана во второй части.

К настоящему времени построено несколько аксиоматических систем для теории множеств. Первая аксиоматизация (Z) принадлежит Цермело. Пополненная аксиомой подстановки, она получила название системы аксиом Цермело-Френкеля (ZF) и до сих пор является одной из основных аксиоматизаций теории множеств [7]. Мы будем ориентироваться именно на эту систему. Надо сказать, что подобные аксиоматизации не являются формализациями теории в полном смысле этого слова. В монографии [5] такие теории называются *формализованными* в отличие от *формальных*. Некоторые авторы называют их *полуформальными*. Главное назначение таких формализаций заключается в том, чтобы избежать неопределённости, присущей неформальным определениям, которая может привести к противоречиям. Учитывая опыт канторовской теории, следовало прежде всего сузить понятие множества, что и достигается с помощью соответствующих аксиом. Основные ограничения понятия множества принадлежат Цермело, который ввёл в свою систему Z аксиомы фундирования и выделения, в силу которых множество не может быть элементом самого себя, не может существовать бесконечной последовательности множеств, в которой каждое последующее множество является элементом предыдущего, и др. Разумность этих ограничений не вызывает сомнений, однако их оказалось недостаточно для избежания той неполноты, которая выражается независимостью континуум-гипотезы. В предлагаемой работе класс Ω всех ординалов строится, исходя из пустого множества, с помощью операций $s_0(x)$, степени Px и суммирования завершимых последовательностей. В результате получается вполне упорядоченный класс всех ординалов (а следовательно, и кардиналов), так что континуум-проблема не возникает.

1. Описание системы.

Основные семантические *объекты* – это *множества* и *совокупности* или *классы*. Синтаксические объекты – *термы* и *формулы*.

Алфавит языка:

A, B,C,…, x, y, z,…, α, β, γ …, - переменные и обозначения для множеств и совокупностей (классов).

Сигнатурные и вспомогательные символы: $\in$ = $\varnothing$ $\rceil$ & $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $\forall$ $\exists$ { } ( ) : ' , и др.

Понятие множества содержательно определяется как и обычно, с помощью некоторых операций, определимых в логике 1-го порядка, исходя из пустого множества $\varnothing$ и отношения принадлежности $\in$, с ограничениями, налагаемыми на это понятие аксиомами.

Определения и обозначения.

Термы (сигнатурные) – это 1) переменные и $\varnothing$, 2) выражения вида $\{\varphi\}$, где φ – терм.

Формула – это формула ИП-1 в сигнатуре ($\in$, =), на местах предметных переменных которой стоят термы.

Как обычно, при написании формул будем использовать общепринятые сокращения. Символ $\in$ называется отношением *принадлежности*. Если $x\in y$, то мы говорим: x *является элементом* y, или x *принадлежит* y. Логическую равносильность (“тогда и только тогда”) обозначаем символом $\Leftrightarrow$.

Содержательно формула означает некоторое высказывание о свойстве входящих в неё термов.

Всякий терм *обозначает* или *определяет* класс объектов, в частности, - функцию (в виде множества пар). Некоторые термы определяют множества, например, терм $\{\alpha\}$ обозначает множество, содержащее элемент α и только его. Терм $\varnothing$ обозначает – *пустое* множество т.е. множество, не содержащее элементов.

Сокращения (выразимые термы и предикаты).

Терм $\{x: \Phi(x)\}$, где Φ – формула, обозначает совокупность тех и только тех x, которые удовлетворяют формуле Φ (т.е. образуют область истинности Φ), что можно записать в виде: $\{x: \Phi(x)\}=A \Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow\Phi(x))$.

$A\subseteq B \iff \forall x(x\in A \rightarrow x\in B)$. Если $A \subseteq B$, то A называется *подмножеством* множества B. Говорим также: A *содержится* (*включается*) *в* B, или B *включает* A.

$A \subset B \iff A\subseteq B \;\&\; A \neq B$ - A является *собственным подмножеством* B.

$PA=2^A=\{B: B \subseteq A\}$ – множество всех подмножеств множества A.

$UA = \{x: \exists y\in A\ (x\in y)\}$ –*сумма* всех элементов множества A.

$A \cup B = U\{A,B\}=\{x: x\in A\vee x\in B\}$ - *сумма* множеств A и B.

Обозначим: $U^0A = A$, $U^{n+1}A = UU^n A$.

$\{x_0,x_1,\ldots,x_n\} = \{x_0\} \cup \{x_1\} \cup\ldots\cup \{x_n\}$, где n – любое натуральное число и $\forall i,j\leq n\ (i\neq j \Rightarrow x_i\neq x_j)$.

$\cap A = \{B: \forall C\in A(B\in C)\}$ – *пересечение* всех элементов множества A.

$A \cap B = \cap\{A,B\}=\{x: x\in A\&x\in B)\}$ *пересечение* множеств A и B.

$(x,y) = \{x,\{x,y\}\}$ – упорядоченная пара.

$A\times B =\{(x,y): x\in A \;\&\; y\in B\}$ – прямое (декартово) произведение A и B.

Если $R \subseteq A \times B$, то R называется бинарным отношением и $ooR=\{x: \exists y((x,y) \in R)\}$ - *область определения* отношения R, $озR=\{y: \exists x((x,y) \in R)\}$ - *область значения* отношения R.

φ: $A \to B = C \Leftrightarrow C \subseteq A \times B \ \& \forall x,y,y'((x,y) \in C \& (x,y') \in C \ \to \ y=y')$ – (частичная) функция из A в B. (Вместо φ: $A \to B$ обычно будем писать только φ).

$A|B=C \Leftrightarrow C \subseteq A \times B$ & оо $C=A$ $\& \forall x,x',y,y'((x,y) \in C \& (x'y') \in C \ \to \ (x=x' \ \leftrightarrow \ y=y')))$ – *инъекция* A в B (1-1-функция A в B).

$A||B = A|B \Leftrightarrow$ оз $A|B = B$ – *биекция* A на B (1-1-функция A на B).

Если существует биекция $A||B$, то множества A и B будем называть *равномощными,* что обозначим: $A \sim B$ (или $|A|=|B|$).

В терминах вышеприведённых понятий можно определить такие понятия, как частично упорядоченное (ч.у.), линейно упорядоченное (л.у.) и вполне упорядоченное (в.у.) множество и др. Множество A, упорядоченное отношением <, обозначаем (A,<). Множество (A,<) является л.у. множеством, если отношение < таково, что $\forall x,y,z \in A((x=y \lor \ x<y \lor y<x) \& (x<y \to \ y \not< x) \ \& (x<y \& y<z \to x<z))$.

Л.у. множество (A,<) является в.у., если $\forall x \subseteq A \exists y \in x \forall z \in x(y \leq z)$.

Пусть (A,<) –л.у. множество и $B \subseteq A$. Тогда элемент $x \in A$ называется наименьшей верхней гранью множества B (нвгB, supB), если $\forall y \in B(y \leq x) \& \forall z \in A \ (x \leq z \lor z \in B))$.

Начальным отрезком в.у. множества (A,<) до элемента $x \in A$ называется подмножество $A/x=\{y \in A: \ y<x\}$, в.у. тем же отношением <. *Финальным отрезком* в.у. множества (A,<) от элемента $x \in A$ будем называть множество $A \backslash x=\{y \in A: \ x \leq y\}$, в.у. тем же отношением <.

Понятие последовательности мы отождествляем с понятием в.у. множества и обычно отношение порядка, которое заранее известно, мы опускаем. Кроме того, запись $\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ означает, что $x_0<x_1<x_2<\ldots$. Отметим, что запись $\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ не означает, что все индексы у элементов этого множества являются натуральными числами, они могут быть произвольными ординалами (см. с.13 и далее). Множество, в.у. отношением <, будем называть <-последовательностью.

Если последовательность $\zeta=\{x_0,x_1,\ldots\}$, не имеет последнего (наибольшего) элемента, то она называется *незамкнутой* (или *предельной*), в противном случае – *замкнутой*. Если ζ/x – незамкнутая последовательность, то элемент x называется *предельным элементом* или *предельной точкой* последовательности ζ. Другими словами, элемент x последовательности называется предельным, если он не имеет непосредственного предшественника. Поэтому первый (наименьший) элемент всякой последовательности является предельным.

Если $\zeta=\{x_0,x_1,\ldots\}$, то обозначим: $\nabla\zeta=\{x_0,x_0 \cup x_1,x_0 \cup x_1 \cup x_2,\ldots\}$ - последовательность *частных сумм*.

Очевидно, что $U\nabla\zeta=U\zeta$, и если $\forall к \ x_к \subseteq x_{к+1}$, то$\nabla\zeta=\zeta$.

Все перечисленные здесь понятия распространяются не только на множества, но и на собственные классы.

2. Об аксиоматике.

В основе нашей аксиоматики будут лежать аксиомы теории ZF в удобной для нас формулировке, а также некоторые дополнительные аксиомы, формулировка которых будет дана во второй части. Отметим только некоторые важные следствия из аксиомы фундирования: $\forall A\neq\varnothing\exists x\in A\forall y\in A(y\notin x)$.

Лемма 1. Не существует бесконечной последовательности множеств $A_0,A_1,A_2,\ldots$ такой, что $A_0\ni A_1\ni A_2\ni\ldots$.

$\uparrow$ Предположим противное, т.е. что существует бесконечная цепочка $A_0\ni A_1\ni A_2\ni\ldots$. Рассмотрим множество $\{A_0,A_1,A_2,\ldots\}$. Согласно аксиоме фундирования $\exists y\in A\forall z\in A(z\notin y)$, т.е. $\exists n\forall k(A_k\notin A_n)$. Но при к=n+1 получаем противоречие. $\downarrow$

Следствие. $\forall A(A\notin A)$.

Лемма 2. Для всякого непустого множества A ($A\nsubseteq\{A\}$).

$\uparrow$ Предположим, что $A\subseteq\{A\}$, т.е. $\forall B\in A(B\in\{A\})$. Поскольку единственным элементом множества $\{A\}$ является A, то отсюда следует: $A\in A$, что противоречит следствию из леммы 1. $\downarrow$

3. Порядковые и кардинальные числа.

В этом разделе мы определим порядковые и кардинальные числа, которые назовём, соответственно, *ординалами* и *кардиналами*. Предварительно рассмотрим ряд вспомогательных понятий и докажем некоторые теоремы, необходимые для дальнейшего изложения.

Знаком + мы обозначаем операцию *конкатенации* или *прямой суммы* в.у. множеств, т.е. если $\beta=\{\beta_0,\beta_1,\ldots\}$ и $\gamma=\{\gamma_0,\gamma_1,\ldots\}$, где $\beta_0<\beta_1<\ldots$ и $\gamma_0<\gamma_1<\ldots$, то $\beta+\gamma$ обозначает в.у. множество $\{\beta_0,\beta_1,\ldots,\gamma_0,\gamma_1,\ldots\}$, где $\forall\beta_i\forall\gamma_j(\beta_i<\gamma_j)$ и на множествах β и γ отношение < сохранено. Таким образом, если множества β и γ имеют непустое пересечение, то все элементы суммы $\beta+\gamma$ считаются попарно различными, благодаря их различному расположению в последовательности $\beta+\gamma$. Подобная вольность вполне допустима, если рассматривать в.у. множества "с точностью до изоморфизма".

Частично упорядоченные множества $(A,<_1)$ и $(B,<_2)$ называются *изоморфными* ($A\approx B$), если существует биекция $\varphi=A||B$, сохраняющая отношение порядка, т.е. если $\forall x,y\in A(x<_1 y \Leftrightarrow \varphi(x)<_2 \varphi(y))$.

Лемма 3. Если $(A,<)$ – вполне упорядоченное (в.у.) множество и функция $f\colon A\to A$ сохраняет отношение <, то $\forall x\in A(f(x)\geq x)$.

$\uparrow$ Предположим противное: $\exists x_0\in A$ такое, что $f(x_0)<x_0$. Пусть $f(x_0)=x_1$. Поскольку f сохраняет отношение <, то $f(x_1)<f(x_0)$. Пусть $f(x_1)=x_2$. По той же причине $f(x_2)<f(x_1)=x_2$. Продолжив это построение, получим бесконечную убывающую цепочку, что противоречит лемме 1. $\downarrow$

Очевидно, что для всякого в.у. множества $(A,<)$ множество начальных отрезков вполне упорядочено отношением $\subseteq$.

Лемма 4. Всякое в.у. множество A не изоморфно никакому своему начальному отрезку.

$\uparrow$ Предположим противное: $\exists x \in A$ такое, что $A/x \approx A$, т.е. существует биекция $f: A \to A/x$, сохраняющая отношение порядка. Согласно лемме 3 $f(x) \geq x$. Но $x \notin A/x$ и потому f не может быть биекцией A на A/x. $\downarrow$

Лемма 5. Всякое в.у. множество $(A,<)$ изоморфно множеству $\{A/x: x \in A\}$ всех своих начальных отрезков.

$\uparrow$ Действительно, функция $fx=A/x$ является 1-1-функцией. При этом $\forall x,y \in A\ (x \leq y \Leftrightarrow A/x \subseteq A/y)$, т.е. f является изоморфизмом. $\downarrow$

Теорема 1. (Кантор[2]). Для любых в.у. множеств A и B выполняется одно из следующих трёх условий: A изоморфно B, A изоморфно начальному отрезку B, B изоморфно начальному отрезку A.

$\uparrow$ Обозначим: $C=\{x \in A: \exists y \in B(A/x \approx B/y\}$. Поскольку $\forall x \in C \exists! y \in B$ $(A/x \approx B/y)$, то существует функция $f: C \to B$ такая, что $A/x \approx B/f(x)$. Очевидно, что возможны лишь следующие два случая: (1) C=A, либо (2) $\exists x \in A(C=A/x)$. В случае (1), либо (1.1) $f(C)=B$, либо (1.2) $\exists y$ $f(C)=B/y$. В случае (1.1) $A \approx B$, а в случае (1.2) $A \approx B/y$. Если имеет место (2), то либо (2.1) $f(C)=B$, либо (2.2) $f(C)=B/y$. В случае (2.1) $B \approx A/x$. Покажем, что случай (2.2) невозможен. Поскольку в этом случае $C=A/x$ и $f(C)=B/y$, то в силу однозначности функции f, $A/x \approx B/y$, а так как тогда по определению C $x \in C$, то $x \in A/x$, что противоречит определению начального отрезка. $\downarrow$

Класс A называется *транзитивным*, если каждый элемент x класса A является его подмножеством, т.е. $\forall x \in A(x \subseteq A)$, или что то же, $\forall x \in A \forall y \in x$ $(y \in A)$.

Из Аксиомы фундирования следует:

Лемма 6. Всякое непустое транзитивное множество содержит $\varnothing$.

$\uparrow$ Пусть A транзитивно, $x \in A$ и $x \neq \varnothing$. Поскольку $x \subseteq A$, то $\forall y \in x(y \in A)$ и следовательно, $\exists y \in A(y \in x)$. Таким образом, если $\varnothing \notin A$ и $A \neq \varnothing$, то всякое непустое $x \in A$ не удовлетворяет аксиоме фундирования: $\forall A \neq \varnothing \exists x \in A \forall y \in A$ $(y \notin x)$. $\downarrow$

Глубина класса. Определим для каждого класса A его *глубину* ГлA как наименьшее n такое, что $U^n A = U^{n+1} A$.

Очевидно, что: 1) Гл$\varnothing$=0, 2) Гл$\{\varnothing\}$=1, 3) Гл $(A \cup B)$ = max (ГлA, ГлB).

Обозначим: $B \subset\subset A \Leftrightarrow \exists n(B \subseteq U^n A)$. В этом случае B называем *субклассом* (*субмножеством*) классаа A. Элементы субклассов класса A будем называть его *субэлементами*.

Класс A назовём *наследственно транзитивным* (н.тр.), если $\forall к$ класс $U^к A$ – транзитивен, или что то же, $\forall к \leq$ГлA $U^к A$ – транзитивен. Ясно, что класс A – н.тр.$\Leftrightarrow$ $\forall к$ $U^к A$ – н.тр.

Лемма 7. Множество A транзитивно $\Leftrightarrow$ $UA \subseteq A$ и $\varnothing \in A$.

$\uparrow \Rightarrow$ Пусть множество A – транзитивно. Поскольку $x \in UA \Leftrightarrow \exists y \in A(x \in y)$, то в силу транзитивности множества A это означает, что $x \in A$, т.е. $UA \subseteq A$. Тот факт, что $\varnothing \in A$, следует из леммы 6.

$\Leftarrow$ Пусть $UA \subseteq A$, т.е. $x \neq \varnothing \& x \in A \Rightarrow \forall y \in x(y \in UA) \Rightarrow x \subseteq A$. Поскольку по условию $\varnothing \in A$, то A – транзитивно. $\downarrow$

Следствие 1. Собственный класс A транзитивен $\Leftrightarrow$ $UA \subseteq A$.

Следствие 2. Если множество A таково, что $UA=A$ и $\varnothing \in A$, то множество A – наследственно транзитивно.

Следствие 3. Если класс A наследственно транзитивен, то всякий его субэлемент является его элементом.

Лемма 8. Класс A транзитивен $\Leftrightarrow$ класс $B=A \cup \{A\}$ – транзитивен.

$\uparrow \Rightarrow$ Если $A=\varnothing$, то – очевидно. Пусть $A \neq \varnothing$. Поскольку $B=A \cup \{A\}$, то любой элемент класса B либо является элементом класса A, либо совпадает с A. Поскольку класс A транзитивен, то любой его элемент C является его подклассом, и следовательно, подклассом B. Если же $C=A$, то $C \subseteq B$, поскольку $A \subseteq B$.

$\Leftarrow$ Если класс $B=A \cup \{A\}$ – транзитивен, и поскольку $C \in B \Leftrightarrow C \in A \vee C=A$, то $C \in A \Rightarrow C \in B \Rightarrow C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \vee C=A \Leftrightarrow C \subseteq A$. При этом, если B (а следовательно и A) – множество, то $\varnothing \in B$, а потому $\varnothing \in A \vee A=\varnothing$. $\downarrow$

Следствие. Если класс A – наследственно транзитивен, то $B=A \cup \{A\}$ – наследственно транзитивен, поскольку $UB=UA \cup A=A$

Лемма 9. Если $A=\{A_0,A_1,\ldots\}$ - незамкнутая транзитивная $\in$-последовательность, то $UA=A$.

$\uparrow$ В силу леммы 7 $UA \subseteq A$, поэтому достаточно доказать, что $A \subseteq UA$. Очевидно, $y \in A \Leftrightarrow \exists к(y=A_к) \Rightarrow y \in A_{к+1} \Rightarrow y \in UA$, т.е. $A \subseteq UA$. $\downarrow$

Следствие. В условиях леммы, если A - множество и $\varnothing \in A$, то по следствию 2 из леммы 7 множество A наследственно транзитивно.

Транзитивный класс A назовём 2-*транзитивным* (2-тр.), если транзитивны все его элементы.

Лемма 10. Если $A=\{A_0,A_1,\ldots\}$ – 2-транзитивная $\in$-последовательность, то A – наследственно транзитивно. При этом, если A – множество, то требуется, чтобы выполнялось условие: $\varnothing \in A$.

$\uparrow$ Если класс A незамкнутый, то утверждение следует из леммы 9. Пусть A – замкнутое и $A=\{A_0,A_1,\ldots,A_\gamma\}$. Поскольку ввиду транзитивности элементов класса A, $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_\gamma$, то $A_\gamma=A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_\gamma$, т.е. $A_\gamma=UA=UA_\gamma$. По следствию 2 из леммы 7 класс $A_\gamma=UA$ наследственно транзитивен, а потому и класс A – наследственно транзитивен. $\downarrow$

Лемма 11. $\forall A(UPA = A)$.

$\uparrow$ Поскольку $A \in PA$, то $A \subseteq UPA$. А так как $B \in UPA \Rightarrow \exists C \in PA(B \in C \subseteq A) \Rightarrow B \in A$, то $UPA \subseteq A$. $\downarrow$

Лемма 12. Если класс A – транзитивен, то $A \subseteq PA$.

↑Поскольку A – транзитивен, то $\forall x\in A(x\subseteq A)$, и следовательно, $\forall x\in A$ $(x\in PA)$. ↓

Следствие 1. Если класс A – транзитивен, то и класс PA – транзитивен. Действительно, если $x\in PA$, то $x\subseteq A$, а так как $A\subseteq PA$, то $x\subseteq PA$.

Следствие 2. Если класс A – наследственно транзитивен, то и класс PA – наследственно транзитивен. Действительно, по лемме 11 UPA=A, и следовательно, UPA – наследственно транзитивен, т.е. $\forall к$ $U^к PA$ – транзитивен.

Заметим, что для 2-транзитивности утверждение, подобное следствию 1, неверно, т.е. из 2-транзитивности класса A не следует 2-транзитивность класса PA.

Понятие конечного множества можно определять по-разному, например, так: (Тарский, [5]) множество A называется *конечным*, если любое его подмножество содержит $\subseteq$-максимальный элемент. В противном случае множество A называется *бесконечным*. Множество A называем *наследственно конечным* (*счётным, несчётным* и т.п.), если $\forall n$ $U^n x$ – конечно (счётно, несчётно и т.п.).

Очевидно, что множество наследственно конечно (н.к.) тогда и только тогда, когда всякое его субмножество конечно.

Общее понятие ординала можно определить следующим образом. Обозначим: $s_0x=x\cup\{x\}$. Ординал – это любое множество, которое можно получить завершимым процессом применения операций s_0, U и P. Однако такое определение недостаточно конструктивно, чтобы говорить о конкретных свойствах ординалов. Поэтому мы дадим развёрнутое определение, введя предварительно ряд вспомогательных понятий. Кроме того, должно быть определено понятие завершимости последовательностей.

Пусть s – одноместная функция на множествах (классах), тогда выражение [x,s] обозначает множество $\{x,sx,s^2x,\ldots\}$, вполне упорядоченное транзитивным замыканием отношения s, где x называется *первым* или *начальным* элементом, а s – операцией *непосредственного следования*. Другими словами, [x,s] – это в.у.м. $(\{s^к x\text{: } к=0,1,\ldots\},<)$, где < - транзитивное замыкание отношения s, (здесь значения индекса к - натуральные числа).

Для построения ординалов мы кроме операции s_0x (а также U и Px) будем использовать бесконечное множество следующих операций: для всякого к=0,1,2,…, $s_{k+1}x=x\cup[x,s_k]= x\cup\{x,s_к x,s_к^2x,\ldots\}$. Замыкание множества A операциями s_k и U обозначим WA.

Теорема 2. Если x – множество и $\varnothing\in x$, то $\forall к$ $s_{k+1}x=Us_{k+1}x$ и множество $s_{k+1}x$ – наследственно транзитивно.

↑ Сначала заметим, что $\forall n$ $s_0^n x\subseteq s_0^{n+1}x$, а так как $s_0^{n+1}x=\{x,s_0x,s_0^2x,\ldots s_0^n x\}$, то $Us_0^{n+1}x=s_0^{n+1}x$ и потому согласно следствию 2 из леммы 7 множество $s_0^{n+1}x$ - наследственно транзитивно. Докажем теперь, что $s_1x=Us_1x$. Поскольку $s_1x=x\cup\{x,s_0x,s_0^2x,\ldots\}$ и $Us_1x=Ux\cup x\cup s_0x\cup s_0^2x\cup\ldots$, то $y\in s_1x \Leftrightarrow y\in x\vee\exists n(y=s_0^n x)$ $\Leftrightarrow y\in x\vee\exists n(y\in s_0^n x) \Leftrightarrow y\in Us_1x$, т.е. $s_1x=Us_1x$. Отсюда по следствию 2 из леммы 7 следует, что множество s_1x – наследственно транзитивно, поскольку $\varnothing\in s_1x$.

Предположим, что утверждение верно для некоторого к, т.е. $s_k x=Us_k x$ и докажем его для к+1, т.е. что $s_{k+1}x=Us_{k+1}x$. Сначала заметим, что $\forall n$ $s_k^{n+1}x=s_k s_k^n x=Us_k s_k^n x=Us_k^{n+1}x$, откуда в частности следует, что множество $s_k^{n+1}x$ – наследственно транзитивно и $s_k^n x\subseteq s_k^{n+1}x$ (1). Поскольку $s_{k+1}x=x\cup\{x,s_к x,s_к^2x,\ldots\}$ и $Us_{k+1}x=Ux\cup x\cup s_k x\cup s_k^2x\cup\ldots$, то из (1) следует, что $y\in s_{k+1}x\Leftrightarrow y\in x\vee\exists n(y=s_k^n x)\Leftrightarrow y\in x\vee\exists n(y\subseteq s_k^n x)\Leftrightarrow y\in Us_{k+1}x$. ↓

Следствие 1. Если $\varnothing\in x$, то $\forall k>0$ по следствию 2 из леммы 7 множество $s_k x$ – наследственно транзитивно, поскольку $\varnothing\in s_k x$. Если x – наследственно транзитивно, то s_0x – наследственно транзитивно по следствию из леммы 8. Кроме того, если x – транзитивно, то $s_k x$ – 2-транзитивно.

Следствие 2. Если x – транзитивно, то $\forall к\forall m>0$ $s_k x\in s_{k+m}x$ и в силу транзитивности множества $s_{k+m}x$ - $s_k x\subseteq s_{k+m}x$. Действительно, поскольку $\forall к$ $s_k x\in s_{k+1}x$, то $s_k x\in s_{k+1}x\in s_{k+2}x\in\ldots\in s_{k+m}x$, а так как множества $s_{k+m}x$ - транзитивны, то $s_k x\in s_{k+m}x$ и $s_k x\subseteq s_{k+m}x$. Таким образом, $\forall к$ множество $s_k x$ содержит (и включает) все множества x, s_0x, s_1x, $s_2x,\ldots$, $s_{к-1}x$.

Следствие 3. Если $\varnothing\in x$, то для любого к $s_{k+1}x=U[x,s_k]$. Действительно, поскольку $x\in[x,s_k]$ и $Ux\subseteq x$, то $U[x,s_k]=Us_{k+1}x=s_{k+1}x$.

Лемма 13. $\forall к,m>0$ $(s_{k+m}s_k x=s_{k+m}x)$.

↑Поскольку $x\subseteq s_k x$, то в силу следствия 3 из теоремы 2 $s_{k+1}s_k x=s_k x\cup U[s_k x,s_k]=s_k x\cup s_k^2x\cup\ldots=U[x,s_k]=s_{k+1}x$. Предположим, что $s_{k+m}s_k x=s_{k+m}x$ и докажем, что $s_{k+m+1}s_k x=s_{k+m+1}x$. Действительно, в силу теоремы 2 тогда $s_{k+m+1}s_k x=U[s_k x,s_{k+m}]=s_k x\cup s_{k+m}s_k x\cup s_{k+m}^2 s_k x\cup\ldots=s_k x\cup s_{k+m}x\cup s_{k+m}^2x\cup\ldots=U[x,s_{k+m}]=s_{k+m+1}x$. ↓

Суперпозиции s,s' операций s_k назовём *равносильными* и обозначим $s=s'$, если $\forall x(sx=s'x)$.

Произвольную (конечную) суперпозицию операций s_k, к=0,1,… можно записать в виде: $s=s_{k0}s_{k1}\ldots s_{kn}$, где $к_i\geq 0$. Конечную суперпозицию s назовём *правильной*, если $к_{i+1}\geq к_i$. В силу леммы 13, если $к_i>к_{i+1}$, то $s_{ki}s_{ki+1}x=s_{ki}x$, и следовательно, любая суперпозиция s равносильна правильной. К числу правильных суперпозиций отнесём также *пустую* (тождественную) суперпозицию $s_\wedge$, оставляющую множество без изменения. Множество всех правильных суперпозиций обозначим буквой S и рассматриваем его как операцию $Sx=\{sx: s\in S\}$.

Лемма 14. Для всякого x множество $Sx=\{sx: s\in S\}$ в.у. отношением $\in$.

↑ Упорядочим все правильные суперпозиции из S в обратно-лексикографическом порядке, т.е. если $s=s_{k0}s_{k1}\ldots s_{kn}$ и $s'=s_{m0}s_{m1}\ldots s_{mp}$, то $s<s'\Leftrightarrow k_n<m_p\vee(k_n=m_p\&k_{n-1}<m_{p-1})\vee(k_n=m_p\&k_{n-1}=m_{p-1}\&k_{n-2}<m_{p-2})\vee\ldots$, причём, если s' является продолжением s, т.е. $s'=s''s$, то $s<s'$. (Можно считать, что суперпозиция s продолжена слева пустыми операциями $s_\wedge$ до одинаковой длины с s', причём $\forall к$ $s_\wedge< s_k$). Ввиду следствия 2 из теоремы 2: $s<s'\Leftrightarrow sx\in s'x$. Поскольку обратно-лексикографический порядок вполне упорядочивает множество S, то множество Sx вполне упорядочено отношением $\in$. ↓

Лемма 15. Для всякой правильной суперпозиции s из S существует равносильная ей (быть может бесконечная) суперпозиция операций s_0 и U.

↑ Действительно, $s_1x=U\{x,s_0x,s_0^2x,\ldots\}$. Предположим, что $s_к$ равносильна некоторой суперпозиции t операций s_0 и U. Согласно следствию 3 из теоремы 2 для всякого транзитивного x $s_{k+1}x=U[x,s_k]=U\{x,s_кx,s_к^2x,\ldots\}=U\{x,tx,t^2x,\ldots\}$, т.е. $\forall$к операция $s_к$ равносильна суперпозиции операций s_0 и U. Ясно, что тогда и любая суперпозиция s из S равносильна суперпозиции операций s_0 и U. ↓

Следствие 1. Любое множество $S^\gamma x$ может быть получено из множества x операциями s_0 и U.

Следствие 2. Операция Wx равносильна замыканию x операциями S и U, а потому и операциями s_0 и U.

Поскольку каждый ординал (как и кардинал) является множеством, то при их определении необходимо учитывать понятие завершимости процессов их построения, которое мы определим следующим образом (выражение $|A|$ обозначает мощность множества A):

$\subseteq$-последоватеьность $\zeta=\{\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\ldots\}$ *завершима* (или – *сходится*), если $|\zeta|\leq$ нвг$\{|\zeta_\gamma|:\gamma=0,1,2,\ldots\}$. Произвольная последовательность ζ завершима, если завершима $\subseteq$-последовательность частных сумм $\nabla\zeta$.

Если T – система операций, то обозначим $T\eta$ - результат применения каких-либо операций из T к η, $T^{\gamma+1}\eta=T(T^\gamma\eta)$. Если операции из T неуменьшающие, т.е. $Tx\supseteq x$, то согласно определениию последовательность $\zeta=\{\eta,T^1\eta,T^2\eta,\ldots\}$ завершима, если $|\zeta|\leq$ нвг$\{|T^\gamma\eta|: \gamma=0,1,2,\ldots\}$. (Отметим, что γ - это произвольный ординал, в частности – натуральное число). Из определения следует, что всякая счётная последовательность завершима. Действительно, если $\subseteq$-последовательность счётна, то наименьшая верхняя грань мощностей её элементов не менее, чем счётна, и потому согласно определению она завершима.

Определяемые ниже ординалы характеризуют тип упорядоченности множеств, а именно, если вполне упорядоченное множество A изоморфно ординалу α, то α называется *порядковым типом* множества A. Некоторые ординалы объявляются *кардиналами*, которые служат характеристикой мощности множества: если множество A равномощно какому-либо кардиналу, то этот кардинал называется *мощностью* множества A.

По своему назначению все ординалы должны быть вполне упорядоченными множествами. Но если все счётные ординалы вполне упорядочены отношением $\in$, то уже ординалы $P\alpha$ таковыми не являются. Поэтому ниже мы определим отношение, которое вполне упорядочивает все ординалы. Поскольку, как будет показано ниже, любая совокупность ординалов в.у. отношением $\in$, то другое отношение порядка потребуется только для ординалов вида $P\alpha$, содержащих элементы, не являющиеся ординалами. При этом желательно, чтобы на ординалах, содержащих только ординалы, это отношение совпадало с $\in$. Предположим, что множество ординалов A в.у. отношением $<$. Тогда мы можем вполне упорядочить множество PA лексикографически, что обозначим символом $\prec$, т.е. если $\beta=\{\beta_0,\beta_1,\ldots\}$, $\gamma=\{\gamma_0,\gamma_1,...\}$, то $\beta\prec\gamma\Leftrightarrow(\beta\neq\gamma)\&(\beta_0<\gamma_0)\vee(\beta_0=\gamma_0\&\beta_1<\gamma_1)\vee(\beta_0=\gamma_0\& \beta_1=\gamma_1\&\beta_2<\gamma_2)\vee\ldots$. Ясно, что отношение $\prec$ вполне упорядочивает множество PA.

Лемма 16. Отношение $\prec$ на в.у. множествах транзитивно.

↑Пусть $\beta\prec\gamma\prec\delta$ и первые различные элементы в.у. множеств β и γ стоят на η-м месте, а первые различные элементы в.у. множеств γ и δ - на ξ-м. Если $\eta=\xi$, то – очевидно. Если $\eta<\xi$, то β_η и δ_η - первые различные элементы β и δ, причём $\beta_\eta<\delta_\eta$, т.е. $\beta\prec\delta$. Если же $\xi<\eta$, то $\beta_\xi=\gamma_\xi<\delta_\xi$, поскольку $\beta\xi<\delta\xi$, и следовательно, $\beta\prec\delta$. ↓

Конструктивное определение ординалов и кардиналов.

1. Исходный (первый, наименьший) ординал - $\alpha_0 = \varnothing$. Если определён ординал α, то непосредственно следующий за ним ординал – $s_0\alpha=\alpha\cup\{\alpha\}$. В этом случае ординал α называется непосредственным предшественником ординала $s_0\alpha$. Ординалы $s_0^n\alpha_0$, n=0,1.2,… обозначим буквами α_n и будем называть их *натуральными ординалами*.

Ординал $s_1\alpha_0=[\alpha_0,s_0]=\{\alpha_0, s_0\alpha_0, s_0^2\alpha_0,\ldots\}=\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2,\ldots\}$ обозначим ω. Ординал ω является множеством всех натуральных ординалов, он непосредственно следует за всеми натуральными ординалами и является первым (наименьшим) бесконечным ординалом. Натуральные ординалы являются также *натуральными кардиналами*, те и другие будем иногда обозначать натуральными числами 0,1,… .

Ординал ω является первым бесконечным кардиналом. Чтобы подчеркнуть его роль как кардинала, его обозначают буквой $\aleph_0$. Кардинал $\aleph_0$, а также любое равномощное ему множество называются *счётными*. Натуральные кардиналы мы также будем называть счётными.

В дальнейшем для наглядности вместо $s_0^n x$ иногда пишем x+n.

2. Обозначим: $\Psi_0=\alpha_0$. Если определено Ψ_γ, то $\Psi_{\gamma+1}=S\Psi_\gamma=S^{\gamma+1}\alpha_0$. Если ординал γ - предельный и для всякого $\beta\in\gamma$ определено Ψ_β, то $\Psi_\gamma=\{\Psi_\beta: \beta\in\gamma\}$ - ординал, непосредственно следующий за всеми ординалами Ψ_β, где $\beta\in\gamma$. Очевидно, $\{\Psi_0,\Psi_1,\Psi_2,\ldots\}=W\alpha_0$. Обозначим эту последовательность как $\Psi=\{\Psi_\gamma: \gamma\in\Psi\}$ (Явная непредикативность этого обозначения оправдывается незавершимостью процесса построения класса Ψ, что будет показано ниже).

3. Обозначим: $\Omega_0=\Psi=W\alpha_0$. Если определено Ω_γ, то, $\Omega_{\gamma+1}=WP\Omega_\gamma$. Если γ - предельный ординал и $\forall\beta\in\gamma$ определены Ω_β, то, $\Omega_\gamma=\{\Omega_\beta: \beta\in\gamma\}$.

4. Элементы совокупности $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_\gamma\cup\Omega_{\gamma+1}\cup\ldots$ являются ординалами и только они.

Кардиналами являются натуральные ординалы и множества $\aleph_0=\omega$, $\aleph_1,\ldots,\aleph_\gamma,\ldots$, где $\aleph_{\gamma+1}=P\aleph_\gamma$, и если ординал γ предельный, то $\aleph_\gamma=\{\aleph_\beta\colon \beta\in\gamma\}$.

Замечания. (1) Легко доказывается, что $\forall n\ \ \alpha_{n+1}=\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. Поскольку $\alpha\in s_0\alpha$ и $\alpha\subseteq s_0\alpha$, то каждый ординал α_n и множество ω вполне упорядочены как отношением $\in$, так и отношением $\subseteq$.

(2) Все множества Ψ_γ - счётны, поскольку операции s_0 и счётного суммирования не повышают бесконечную мощность множеств. Очевидно, что последовательность Ψ удовлетворяет условиям леммы 9 и потому $\Psi=U\Psi$. Аналогично $\forall\gamma\ \ \Psi_\gamma=U\Psi_\gamma$. Также и Ω_γ - для всех γ, а для предельных γ - $\aleph_\gamma$, удовлетворяют условию леммы 9 и потому они совпадают со своими суммами.

(3) Последовательность $\Psi=\{\Psi_0,\Psi_1,\Psi_2,\ldots\}$ содержит все счётные и только счётные ординалы и потому она не является счётной (ибо в противном случае Ψ - множество и $\Psi\in\Psi$), и следовательно, не удовлетворяет условию завершимости, т.е. является собственным классом. Таким образом, Ω_0 не является множеством. Все остальные Ω_γ, где $\gamma>0$, также не являются множествами, поскольку мощность собственных классов не определена и потому последовательности $WP\Omega_\gamma$ не являются завершимыми. Таким образом, все Ω_γ, а потому и Ω - собственные классы.

(4) Первый несчётный кардинал $\aleph_1=P\omega$ - континуален. Согласно следствию 2 из леммы 12 и лемме 9 $\forall\gamma\ \aleph_\gamma$ - наследственно транзитивен. Отсюда, в частности, следует, что $\forall\gamma(\aleph_0\subseteq\aleph_\gamma)$. При этом $\forall\gamma\forall\zeta\in(\aleph_{\gamma+1}-\aleph_\gamma)\ \ \zeta$ - множество ординалов, не являющееся ординалом.

(5) Нетрудно убедиться, что для всякого ординала существует равномощный ему кардинал. Действительно, счётные ординалы равномощны $\aleph_0$. Очевидно, что если $A\subseteq B$, то $PA\subseteq PB$. Поскольку $\omega\subseteq\Psi$, то $P\omega=\aleph_1\subseteq P\Psi\subseteq WP\Omega_0=\Omega_1$, а так как Ψ содержит только счётные ординалы, а операции из W не повышают мощность бесконечных множеств, то мощность ординалов из Ω_1 не превосходит $\aleph_1$. Если класс Ω_γ содержит ординалы, равномощные $\aleph_\gamma$ (и менее), то класс $\Omega_{\gamma+1}=WP\Omega_\gamma$ содержит ординалы, равномощные $\aleph_{\gamma+1}$. Если $\gamma=\{\beta\colon\ \beta\in\gamma\}$ - предельный ординал, и если Ω_β содержит ординалы, равномощные $\aleph_\beta$, $\beta\in\gamma$, то очевидно, Ω_γ содержит ординалы, равномощные $\aleph_\gamma=\{\aleph_\beta\colon \beta\in\gamma\}$.

(6) Возникают вопросы: всякое ли в.у. множество имеет изоморфный ему ординал, и всякое ли множество имеет мощность, т.е. равномощный ему кардинал. Положительный ответ на первый вопрос следует из теоремы 1 (поскольку для любого ординала существует ординал, являющийся его продолжением). А так как для всякого ординала существует равномощный ему кардинал, то для любого вполне упорядоченного множества существует равномощный ему кардинал. Если считать, что аксиома выбора входит в ZF, то всякое множество можно вполне упорядочить, и следовательно, для всякого множества существует равномощный ему кардинал.

Рассмотрим некоторые важные свойства ординалов.

Теорема 3. Всякий ординал и всякий кардинал являются наследственно транзитивными множествами.

↑ В силу следствия 1 из теоремы 2 операции $s_k x$ сохраняют наследственную транзитивность множеств, а так как операция U также сохраняет наследственную транзитивность, то таковы же и операции S и W. Таким образом, все счётные ординалы наследственно транзитивны и притом, очевидно, 2-транзитивны. Кардиналы ω_γ для непредельных γ наследственно транзитивны в силу следствия 2 из леммы 12. Если γ предельное, т.е. $\omega_\gamma=\{\omega_\delta: \delta\in\gamma\}$, то поскольку $\omega_\delta\in P\omega_\delta$, $\omega_\gamma=U\omega_\gamma$, (по лемме 9) и потому в силу следствия 2 из леммы 7, ω_γ - наследственно транзитивно. Элементами класса Ω_0 являются счётные ординалы, наследственная транзитивность которых была показана выше. Элементами класса $P\Omega_0$ являются всевозможные подмножества класса Ω_0 и потому не все они являются ординалами. Но если β - ординал и $\beta\in\Omega_0$, то β - счётно, и следовательно, как показано выше, наследственно транзитивно. Поскольку операции s_0 и U не повышают мощность аргументов, то все ординалы из класса Ω_1 наследственно транзитивны. Предположим, что все ординалы из класса Ω_γ наследственно транзитивны. Пусть β - ординал из класса $P\Omega_\gamma$. Возможны два случая: (1) $U\beta=\beta$ и (2) $U\beta\neq\beta$. В случае (1) β наследственно транзитивен в силу следствия 2 из леммы 7. В случае (2) ординал β не предельный, и следовательно, содержит максимальный элемент δ. Тогда $U\beta=\delta$ и поскольку $\delta\in\Omega_\gamma$, то δ, а потому и β - наследственно транзитивны. Так как операции s_0 и U сохраняют наследственную транзитивность, то все ординалы из $\Omega_{\gamma+1}$ наследственно транзитивны. Если ординал γ - предельный и $\gamma=\{\beta: \beta\in\gamma\}$, то $\Omega_\gamma=\{\Omega_\beta: \beta\in\gamma\}= U\{\Omega_\beta: \beta\in\gamma\}$, и поскольку все ординалы из каждого Ω_β наследственно транзитивны, таковы же и ординалы из Ω_γ. ↓

Следствие. Отношение $\in$ в классе ординалов транзитивно. Действительно, если $\alpha\in\beta\in\gamma$, то в силу транзитивности γ $\beta\subseteq\gamma$, и следовательно, $\alpha\in\gamma$.

Теорема 4. Каждый ординал содержит множество всех своих предшественников.

↑ Очевидно, что натуральные ординалы и ω являются множествами всех своих предшественников. Так как операции s_0 и объединение, а следовательно S и W, сохраняют это свойство, то таковы же и ординалы из $\Psi=W\alpha_0$, причём сам класс Ψ состоит из всех своих предшественников – счётных ординалов. Предположим, что все ординалы из Ω_γ удовлетворяют теореме и пусть β - ординал из $P\Omega_\gamma$, т.е. β - подмножество Ω_γ , являющееся ординалом. Поскольку все элементы β удовлетворяют теореме, а β непосредственно следует за всеми своими элементами, то β также удовлетворяет теореме. Поэтому ординалы из $\Omega_{\gamma+1}=WP\Omega_\gamma$ удовлетворяют теореме в силу того, что операция W сохраняет это свойство. Если γ -

предельный ординал и для всех $\beta\in\gamma$ Ω_β удовлетворяет теореме, то поскольку $\Omega_\gamma=\{\Omega_\beta: \beta\in\gamma\}=\mathrm{U}\{\Omega_\beta: \beta\in\gamma\}$, Ω_γ также удовлетворяет теореме. $\downarrow$

Следствие 1. Класс Ω всех ординалов в.у. отношением $\in$.

Следствие 2. Если β и γ - ординалы и $\beta\subset\gamma$, то $\beta\in\gamma$. Действительно, если $\beta\subset\gamma$, то β является предшественником γ и потому $\beta\in\gamma$.

Лемма 17. В классе Ω всех ординалов отношения $\prec$ и $\in$ совпадают.

$\uparrow$ Пусть β и γ - ординалы. Если $\beta,\gamma\in\Psi$, то $\beta\in\gamma \Leftrightarrow \beta$ является начальным отрезком γ, а это означает, что $\beta\prec\gamma$, и обратно, если $\beta\prec\gamma$ (β и γ - ординалы), то β является начальным отрезком γ и потому $\beta\in\gamma$. Если $\beta,\gamma\in P\Omega_0$, то очевидно, $\beta,\gamma\in\Omega_0=\Psi$, и в силу предыдущего $\beta\in\gamma\Leftrightarrow\beta\prec\gamma$. Предположим, что утверждение верно для Ω_δ и пусть $\beta,\gamma\in\Omega_{\delta+1}=WP\Omega_\delta$. Поскольку β и γ - ординалы, то $\beta,\gamma\in\Omega_\delta$, и следовательно, $\beta\in\gamma\Leftrightarrow\beta\prec\gamma$. Если ординал δ - предельный и $\forall\Omega_\eta$, где $\eta\in\delta$, лемма выполняется, то и для $\beta,\gamma\in\Omega_\delta=\{\Omega_\eta: \eta\in\delta\}$ лемма выполняется. Для всех Ω_δ утверждение выполняется по той же причине, что и для $\Psi=W\alpha_0$. $\downarrow$

Следующие леммы и теорема описывают строение счётных ординалов. Предварительно мы определим на множестве ординалов операции умножения и возведения в степень следующим образом. Если β и γ – ординалы, то произведение $\beta.\gamma$ можно определить по индукции следующим образом. Операцию + прямой суммы мы определили на стр. 8. Если γ - натуральный ординал $\alpha_к$, то $\beta.\gamma=\beta.\alpha_к=\beta+\beta+\ldots+\beta$ - к слагаемых. Если определено произведение $\beta.\gamma$, то $\beta.(\gamma+1)=\beta.s_0\gamma=\beta.\gamma+\beta$. Если γ - предельный ординал и $\forall\delta\in\gamma$ произведение $\beta.\delta$ определено, то $\beta.\gamma=\Sigma_{\delta\in\gamma}\beta.\delta$, где Σ обозначает прямую сумму. Очевидно, что операция умножения ассоциативна. Соответственно, операцию β^γ можно определить следующим образом. Если $\gamma=\alpha_к$, то $\beta^{\alpha к}=\beta^к=\beta.\beta.\ldots.\beta$ – произведение к сомножителей β. Если определено β^γ, то $\beta^{\gamma+1}=\beta^\gamma.\beta$. Если γ - предельный ординал, то β^γ - произведение всех элементов множества $\{\beta^\delta: \delta\in\gamma\}$.

Лемма 18. Для всякого транзитивного x $\forall к,n\in\omega(s_k{}^n x=x+\omega^k.n)$.

$\uparrow$ $s_0{}^n x=x+n$. Предположим, что $\forall m\leq n$ $s_k{}^m x=x+\omega^k.m$ и покажем, что $s_{k+1}{}^{n+1}x=x+\omega^{k+1}(n+1)$ (1). Сначала покажем, что $s_{k+1}x=x+\omega^{k+1}$ (2). Действительно, $s_{k+1}x = x\cup s_k x\cup s_k{}^2 x\cup\ldots = x\cup(x+\omega^k)\cup(x+\omega^k.2)\cup(x+\omega^k.3)\cup\ldots = x+\omega^{k+1}$. Докажем теперь (1). В силу (2) $s_{k+1}{}^{n+1}x = s_{k+1}{}^n(s_{k+1}x) = s_{k+1}{}^n(x+\omega^{к+1}) = s_{k+1}{}^{n-1}(s_{k+1}(x+\omega^{к+1}))= s_{k+1}{}^{n-1}(x+\omega^{k+1}+\omega^{к+1}) = s_{k+1}{}^{n-1}(x+\omega^{k+1}.2) = \ldots= s_{k+1}(x+\omega^{k+1}.n) = x+\omega^{k+1}.n+\omega^{k+1}= x+\omega^{k+1}.(n+1)$. Таким образом, по индукции получаем нужное. $\downarrow$

Лемма 19. Для всякого транзитивного x $Sx=x+\omega^\omega$.

$\uparrow$ Обозначим: $X=\{x+\omega,x+\omega^2,x+\omega^3,\ldots\}$. Покажем, что $Sx=UX$. Очевидно, что $\forall\beta\in Sx\exists к(\beta\in s_k x)$, и следовательно, $\forall\beta\in Sx(\beta\in UX)$, т.е. $Sx\subseteq UX$. Обратно, пусть $\beta\in UX$. Тогда $\exists к(\beta\in x+\omega^к)$, и следовательно, $\beta\in s_k x\in Sx$, т.е. $Sx=UX$. Поскольку, очевидно, $UX=x+\omega^\omega$, то лемма доказана. $\downarrow$

Следствие 1. $\forall к\in\omega$: $S^к x=x+\omega^\omega.к$, и следовательно, $\forall к\in\omega(\Psi_к=\omega^\omega.к)$.

Следствие 2. $S^{\omega}x=x+\omega^{\omega+1}$ и потому $\Psi_{\omega}=\omega^{\omega+1}$.

Рангом последовательности α назовем ординал $\rho\alpha$, изоморфный множеству предельных точек в α. Ясно, что множество предельных точек в.у. множества в.у. тем же отношением, что и само множество. Поскольку первый элемент любой последовательности по определению предельный, то ранг всякой последовательности больше 0.

Теорема 6. Для всякого γ: $\Psi_{\gamma}=\omega^{\omega}.\gamma$.

↑ Для $\gamma\in\omega$ - следствие 1 из леммы 19. Предположим, что для некоторого непредельного γ $\Psi_{\gamma}=\omega^{\omega}.\gamma$ и покажем, что $\Psi_{\gamma+1}=\omega^{\omega}(\gamma+1)$. По лемме 19 $\Psi_{\gamma+1}=S\Psi_{\gamma}=S(\omega^{\omega}.\gamma)=\omega^{\omega}.\gamma+\omega^{\omega}=\omega^{\omega}(\gamma+1)$. Пусть ординал γ - предельный ранга μ, т.е. $\gamma=\{\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\ldots\}$, где последовательность $\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ имеет ранг μ. Если $\mu=1$, то $\gamma=\omega$ и утверждение является следствием 2 из леммы 19. Предположим, что теорема верна для последовательностей ранга μ и докажем её для последовательности γ ранга $\mu+1$. Пусть $\gamma=\delta+\eta$, где последовательности δ и η незамкнутые и $\rho\delta=\mu$, $\rho\eta=1$. Тогда $\Psi_{\gamma}=U\{S^{k}\Psi_{\delta}: k\in\omega\}$. Поскольку $\Psi_{\delta}=\omega^{\omega}.\delta$ и согласно следствию 1 из леммы 19 $S^{k}x=x+\omega^{\omega}.к$, то $\Psi_{\gamma}=U\{\Psi_{\delta}+\omega^{\omega}.к: к\in\omega\}=\omega^{\omega}.\delta+\omega^{\omega}.\omega=\omega^{\omega}(\delta+\omega)=\omega^{\omega}.\gamma$. ↓

Литература.

1. П..С.Александров. Введение в общую теорию множеств и функций. ОГИЗ, М.-Л. 1948.

2. Cantor G. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Ann. 49,1897.

3. Handbook of Mathematical Logic. J.Barwise (Ed). N.-Holland Publ. Comp. 1977. Vol.2. Русский перевод: Справочная книга по математической логике под редакцией Дж. Барвайса. Ч.2. Теория множеств. «Наука», М. 1982.

4. Joseph R. Shoenfield. Mathematical Logic. Addison-Westley Publ. Comp. 1967. Русский перевод: Дж. Шёнфилд. Математическая логика. «Наука», Физматгиз, М. 1975.

5. Foundations of Set Theory. Abraham A. Fränkel and Yehoshua Bar-Hillel. 1958. Amsterdam. Русский перевод: А.А.Френкель, И.Бар-Хиллел. Основания теории множеств. «Мир», М.1966.

6. Th.J. Jech. Lectures in set theory with particular emphasis on the method of forsing. Spriger-Verlag, 1971. Русский перевод: Т.Йех. Теория множеств и метод форсинга. «Мир», М. 1973.

7. Hao Wang, Mc Noton R. Les systemes axiomatiques de la theorie des ensambles. Paris, 1953. Русский перевод: Ван Хао, Р. Мак-Нотон. Аксиоматические системы теории множеств. ИЛ, Москва, 1963.

8. E.Mendelson. Introduction to Mathematical Logic. D. Van Nostrand Company, Inc. Русский перевод: Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. «Наука», М. 1971.

9. K.Kuratowski and A.Mostowski. Set theory. North-Holland Publ.Comp. 1967. Русский перевод: К.Куратовский, А.Мостовский. Теория множеств. «Мир», М. 1970.

10. Von Neumann J. Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Z., 27, 1928, 669-752.