Брюно А.Д., Горючкина И.В.

Неформальные решения ОДУ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

НЕФОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ
ОДУ

Москва, 2009 г.

УДК 517.91

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Неформальные решения ОДУ. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2009.

Здесь доказывается теорема при довольно общем условии сходимости степенного ряда с целыми показателями степени, который является формальным решением обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка. Для этого строится мажорирующий ряд и доказывается его сходимость. Во втором параграфе на примере формального разложения решения третьего уравнения Пенлеве доказывается его сходимость и демонстрируется построение мажорирующего ряда.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. Non-formal solutions to ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2009.

Under a very general condition here we prove theorem on convergence of a power series, which is formal solution to ordinary differential equation of the n order. For that, we construct a majorant series and prove its convergence. In the second section we prove convergence of such series on example of formal solution to the third Painlevé equation and show construction of the majorant series.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00082) и Фонда содействия отечественной науке.

e-mails: brunoa@mail.ru, chukhareva@yandex.ru

сайт: www.keldysh.ru

§1. Неформальные решения

К настоящему времени имеются следующие общие результаты о существовании фактического решения, имеющего найденное формальное решение своим асимптотическим разложением.

Теорема 1.1 [1]. *Если система*

$$\dot{X} = F(X)/g(X), \tag{1.1}$$

где $F(X)$ и $g(X)$ вещественны и аналитичны в окрестности нуля (F – вектор), $F(0) = 0$, $g(0) = 0$, имеет вещественное формальное решение $\overset{\circ}{X}(t)$, разложение которого содержит только вещественные степени независимой переменной t, ее кратных логарифмов и экспонент, а также вещественные коэффициенты, то она имеет настоящее решение $X(t)$. При этом формальное разложение $\overset{\circ}{X}(t)$ является асимптотическим для решения $X(t)$, т. е.

$$|X(t) - \sum_{k=0}^{m} \Phi_k(t)| = o(\Phi_m(t)),\ m = 1,\, 2, \ldots,$$

где $\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(t)$.

По-видимому, теорему 1.1 можно обобщить и на комплексные формальные решения, если их рассматривать на прямой в комплексной плоскости t, проходящей через ноль $t = 0$.

Пусть x – независимая и y – зависимая переменные, $x, y \in \mathbb{C}$. Положим $X = (x, y)$.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(X) = 0, \tag{1.2}$$

где $f(X)$ – конечная дифференциальная сумма [2], в которую y входит в целых степенях.

Положим

$$\omega = \begin{cases} -1, & \text{если } x \to 0, \\ 1, & \text{если } x \to \infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

Пусть $x \to 0$ или $x \to \infty$ и формальное решение уравнения (1.2) имеет вид

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{1.4}$$

где коэффициенты c_r и c_s – комплексные постоянные, $c_r \neq 0$, показатели степени $r, s \in \mathbb{C}$, $\omega \operatorname{Re} r < \omega \operatorname{Re} s$ и $\omega \operatorname{Re} s$ убывают.

Сделаем замену переменной в уравнении (1.2)

$$y = c_r x^r + z, \tag{1.5}$$

после которой оно принимает вид

$$\tilde{f}(x,z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{L}(x)z + h(x,z) = 0, \tag{1.6}$$

где $\tilde{f}(x,z)$ – дифференциальная сумма, в которую z входит в целых неотрицательных степенях, $\mathcal{L}(x)$ – линейный дифференциальный оператор.

Уравнение (1.6) имеет формальное решение

$$z = \sum c_s x^s, \quad \omega \operatorname{Re} s < \omega \operatorname{Re} r, \tag{1.7}$$

где коэффициенты c_s – комплексные постоянные.

Максимальный порядок производной в дифференциальной сумме $f(x,z)$ назовем ее *порядком дифференцирования* и обозначим $\pi(f)$.

Теорема 1.2 [2, теорема 3.4]. *Степенное разложение* (1.7) *решения уравнения* (1.6)*, где* $\tilde{f}$ *– дифференциальная сумма, сходится для достаточно малых* $|x|^{-\omega}$ *и* $|\arg x - \mu_0|$*, где* $\mu_0 = \mathrm{const} \in [0,\, 2\pi]$*, если*

$$\pi(\mathcal{L}(x)z) = \pi(\tilde{f}). \tag{1.8}$$

Здесь докажем эту теорему для случая, когда степенное разложение (1.4) содержит только целые показатели степени. Случай рациональных показателей с конечным общим знаменателем m сводится к этому случаю заменой $\tilde{x} = x^{1/m}$. Ограничение на $\arg x$ нужно лишь для разложений (1.4) с иррацональными или комплексными показателями степени, и в нашем случае его можно опустить.

Доказательство проведем в окрестности нуля $x = 0$, т. е. $\omega = -1$. Итак, пусть уравнение (1.2) имеет формальное решение в виде степенного ряда

$$y = \sum_{k=k_0}^{\infty} c_k x^k \tag{1.9}$$

с постоянными коэффициентами $c_k \in \mathbb{C}$. Сделаем в уравнении (1.2) замену переменной

$$y = \sum_{k=k_0}^{k_m} c_k x^k + u, \tag{1.10}$$

где $k_m \geq k_0$, после которой оно примет вид

$$f_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{L}(x)u + g(x,\, u,\, u', \ldots, u^{(n)}) = 0, \tag{1.11}$$

где $\mathcal{L}(x)$ – линейный дифференциальный оператор. Функция f_1 содержит x в целых степенях, а $u,\ u',\ldots,u^{(n)}$ – в целых неотрицательных. Уравнение (1.11) всегда можно домножить на минимальную степень x. Поэтому будем полагать, что f_1 это многочлен переменных $x,\ u,\ u',\ldots,u^{(n)}$. Уравнение (1.11) обладает следующими свойствами:

$$
\begin{array}{ll}
1. & \mathbf{S}(\mathcal{L}(x)u) = (v,\,1);\\
2. & (v,\,1) \text{ – вершина многоугольника } \Gamma(f_1);\\
3. & \mathbf{S}(f_1) \subset \{q_2 \geq 0\};\\
4. & \mathbf{S}(g) \bigcap \{q_2 = 1\} \subset \{q_1 > v\};\\
5. & \mathbf{S}(g) \bigcap \{q_2 = 0\} \subset \{q_1 \geq v + k_m + 1\}.
\end{array}
\tag{1.12}
$$

Уравнение (1.11) имеет формальное решение

$$u(x) = \sum_{k=k_m+1}^{\infty} c_k x^k. \tag{1.13}$$

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x)$ имеет собственные числа $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$, которые можно упорядочить по возрастанию вещественной части $\operatorname{Re}\lambda_1 \leq \operatorname{Re}\lambda_2 \leq \ldots \leq \operatorname{Re}\lambda_n$.

К вершине $(v,\,1)$ многоугольника $\Gamma(f_1)$ сверху примыкает ребро $\Gamma_1^{(1)}$ с внешней нормалью $-(1,\,r)$ (рис. 1). Обозначим $[r]$ целую часть r.

Пусть в замене переменных (1.10)

$$k_m: \ k_m > \operatorname{Re}\lambda_n, \ \text{и} \ k_m > [r] + 1 + 2n, \tag{1.14}$$

тогда разложение (1.13) единственное, все c_k – постоянны и однозначно определены. При этом ребро $\Gamma_1^{(1)}$ и соответствующее ему укороченное уравнение не зависит от k_m (рис. 2).

Если носитель $\mathbf{S}(f_1)$ уравнения (1.11) имеет точки слева от прямой $q_1 = v$, то сделаем в уравнении (1.11) степенное преобразование

$$u = x^{\alpha} w \quad \text{с} \quad \alpha = [r] + 1 + n. \tag{1.15}$$

В результате этого преобразования получаем уравнение, носитель которого лежит в множестве $\{q_1 \geq v,\ q_2 \geq 0\}$ и обладает свойствами (1.12), где в свойстве 5 справа стоит $\{q_1 \geq v+n+1\}$. Преобразованный многоугольник $\tilde{\Gamma}(f_1)$ показан на рис. 2 пунктиром. Будем считать, что уравнение (1.11) уже имеет такой вид, что носитель $\mathbf{S}(f_1)$ лежит в множестве $\{q_1 \geq v,\ q_2 \geq 0\}$ и выполнено (1.12) с n вместо k_m.

Далее используем метод мажорант и некий новый прием. Рассмотрим ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=k_m+1}^{\infty} C_k x^k, \tag{1.16}$$

где $C_k \in \mathbb{R},\ C_k \geq 0$. Ряд (1.16) мажорирует ряд (1.13), если

$$C_k \geq |c_k|, \ \ k = k_m + 1, \dots. \tag{1.17}$$

Построим уравнение

$$\sigma\varphi^{(n)} = xG(x,\, \varphi^{(n)}),\ \sigma = \text{const} \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \tag{1.18}$$

для которого (1.16) является формальным решением и мажорирует решение (1.13) уравнения (1.11). Для этого запишем уравнение (1.11) в виде

$$\mathcal{L}(x)u = -g(x,\, u,\, u', \dots, u^{(n)}). \tag{1.19}$$

Пусть в многочлене $\nu(k)$ коэффициент ν_n при старшей степени k^n отличен от единицы. По условию (1.8) имеем $\nu_n \neq 0$. Разделив уравнение на ν_n, получаем такое уравнение, в котором $\nu_n = 1$. Будем считать, что это справедливо для самого уравнения (1.11). Тогда для $k > n$ имеем

$$\nu(k) > \sigma k(k-1)\dots(k-n+1), \tag{1.20}$$

где σ – некоторое положительное число. Поскольку $\mathcal{L}(x)x^k = x^{k+v}\nu(k)$, то при $x > 0$ и $k > n$ имеем

$$\mathcal{L}(x)x^k \geq \sigma x^{v+n}\frac{d^n}{dx^n}x^k. \tag{1.21}$$

По функции $-g$ построим функцию $G^*(x,\, u^{(n)})$ следующим образом. Все коэффициенты β_i в многочлене $-g(x,\, u,\, u', \dots, u^{(n)})$ заменим на их модули $|\beta_i|$. Далее функцию u и все ее производные $u^{(k)}$ заменим на выражения $x^{n-k}u^{(n)}$. Заметим, что если $u = x^r$, то $u^{(k)} = r(r-1)\dots(r-k+1)\,x^{r-k}$, а $x^{n-k}u^{(n)} = r(r-1)\dots(r-n+1)\,x^{r-k}$; т. е. $|r(r-1)\dots(r-k+1)| \leq |r(r-1)\dots(r-n+1)|$. Таким образом, получаем, что носитель $\mathbf{S}(-g)$ совпадает с носителем $\mathbf{S}(G^*)$. Согласно свойству $q_1 \geq v+1$ носителя $\mathbf{S}(g)$ отношение $G^*(x, u^{(n)})/x^{v+n+1} \stackrel{\text{def}}{=} G(x, u^{(n)})$ является многочленом от x и $u^{(n)}$. Действительно, согласно указанному свойству многочлен g содержит моном $u^{(k)}x^l$ только с $l - k \geq v + 1$. После нашей замены он переходит в моном $u^{(n)}x^{n-k}x^l$ с $n - k + l \geq v + 1 + n$. Для мономов второй степени по u дело обстоит еще проще, многочлен g содержит моном $u^{(j)}u^{(k)}x^l$ только с $l - k - j \geq v + 1$, который после нашей замены переходит в моном $\left(u^{(n)}\right)^2 x^{n-k}x^{n-j}x^l$ с $2n - k - j + l \geq v + 1 + 2n$. Для более высоких степеней u неравенства становятся еще более сильными. Для мономов, не содержащих u показатели степени можно сделать сколь угодно большими увеличив длину начальной части разложения решения (1.9). Для членов, нелинейных по u можно сделать сколь угодно больше степени по x спомощью степенного преобразования. Лишь линейные члены по u не улучшаются этими способами, но они уже обладают нужным свойством: $G^*(x, u^{(n)})/x^{v+n+1}$ это многочлен от x и $u^{(n)}$. Итак, по уравнению (1.11) построено уравнение (1.18).

Теперь докажем, что решение (1.16) уравнения (1.18) мажорирует решение (1.13) уравнения (1.11). Доказательство проведем индукцией по k. Пусть неравенства (1.17) выполнены для $k < j$; докажем что они выполнены для $k = j$.

Сначала заметим, что согласно § 3 [2] при подстановке ряда (1.13) в уравнение (1.19) для каждого коэффициента c_k получаем уравнение вида

$$\mathcal{L}(x)c_k x^k = -b_k x^{k+v}, \ \ k \geq k_m + 1, \tag{1.22}$$

где коэффиценты b_k зависят от предыдущих коэффицентов разложения c_k с $k < j$ и от коэффициентов уравнения (1.19). Поэтому систему уравнений (1.22) можно записать в виде

$$\nu(k)c_k = -b_k, \ \ k \geq k_m + 1. \tag{1.23}$$

Для уравнения (1.18) аналогично получаем равенства

$$\sigma k(k-1)\ldots(k-n+1)C_k = B_k, \ k = k_m + 1, \tag{1.24}$$

где коэффициенты B_k находятся также из уравнения (1.18), как коэффициенты b_k – из уравнения (1.11). При этом B_j является многочленом с положительными коэффициентами от предыдущих C_k и B_k с $k < j$. По индуктивному предположению и построению имеем $B_j \geq |b_j|$ Кроме того,

$$\left| x^{-(v+j)}\mathcal{L}(x)x^j \right| = |\nu(j)| \geq \sigma j(j-1)\ldots(j-n+1).$$

Поэтому

$$C_j = B_j / \left(\sigma j(j-1)\ldots(j-n+1)\right) \geq |c_j| = |b_j|/|\nu(j)|.$$

Для начала индукции утверждение очевидно. Следовательно, решение (1.16) уравнения (1.18) мажорирует решение (1.13) уравнения (1.11).

Теперь напомним теорему о неявной функции в ее аналитическом варианте [3]. Пусть функция $f(x,z)$ аналитична в нуле $x = z = 0$ (т. е. разлагается в сходящийся ряд по x и z), $f(0,\,0) = 0$, и $\partial f/\partial z \neq 0$ при $x = z = 0$. Тогда уравнение $f(x,\,z) = 0$ имеет единственное решение

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} d_k x^k,$$

которое аналитично вблизи нуля $x = 0$, т. е. ряд сходится для достаточно малых $|x|$.

Применим эту теорему Коши к уравнению (1.18). В нем $x = x$, $z = \varphi^{(n)}$ и $f(x,\, z) = \sigma\varphi^{(n)} - xG(x,\, \varphi^{(n)}) = \sigma z - xG(x,\, z)$. При этом функция $G(x,\, z)$ – многочлен, т. е. она аналитична в точке $x = z = 0$. Кроме того, $f(0,\, 0) = 0$ и $\partial f/\partial z = \sigma \neq 0$ в точке $x = z = 0$. Следовательно, выполнены все условия теоремы Коши. Согласно этой теореме уравнение (1.18) имеет единственное решение

$$z = \varphi^{(n)} = \sum_{k=k_m-n}^{\infty} d_k x^k, \tag{1.25}$$

которое является аналитическим, т.е. разложение сходится для достаточно малых $|x|$.

Решение (1.16) получается n-кратным интегрированием решения (1.25), следовательно, также аналитично для малых $|x|$. Наконец, оно мажорирует решение (1.13) уравнения (1.11). Поэтому решение (1.13) также аналитично. ■

Очевидно, что $\pi(f_1) = \pi(f)$, но, вообще говоря, $\pi(\mathcal{L}u) \leq \pi(\hat{f})$, хотя строгое неравенство здесь имеется только в вырожденных случаях.

Другие условия сходимости формального решения (1.9) уравнения (1.2) см. в [4].

§2. Пример

Рассмотрим третье уравнение Пенлеве [5] при значениях параметров $a = b = -c = d = 1$

$$f(x,\, y,\, y',\, y'') \stackrel{\text{def}}{=} -xyy'' + xy'^2 - yy' + y^3 + y - cxy^4 + x = 0. \tag{2.1}$$

Носитель $\mathbf{S}(f)$ уравнения (2.1) изображен на рис. 3. Уравнение (2.1) имеет формальное решение

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \tag{2.2}$$

где $c_1 = 1$, c_2 – произвольная постоянная, остальные c_k постоянны и однозначно определены. Положим $c_2 = 1$. Тогда $c_3 = 1/3$, $c_4 = 1/3$, $c_5 = 11/45, c_6 = 32/135, \ldots$. Согласно (1.10) и (1.14) делаем замену $y = x + x^2 + x^3/3 + u$ в уравнении (2.1). При этом оно принимает вид (1.11)

$$f_1(x,\, u,\, u',\, u'') \stackrel{\text{def}}{=} \left[-u''x^2 + u'x\right] - 4xu + \frac{x^{13}}{81} + 5x^5 - \left(x^3 + xu + \frac{x^4}{3}\right)u''$$

$$+7x^3u^2 + \frac{4x^{12}}{27} + \frac{8x^{10}}{3} + u^3 + \frac{25x^8}{3} + \left(3x^2 + \frac{5x^3}{3} - u\right)u' + 9x^4u +$$

$$12x^7u + 12x^4u^2 + 6x^3u + \frac{16x^8u}{3} + 10x^5u^2 + 4x^2u^3 + xu'^2 + 3xu^2$$

$$+\frac{4x^9u}{3}+4x^6u^2+4x^3u^3+\frac{4}{27}x^{10}u+\frac{2}{3}x^7u^2+\frac{4}{3}x4u^3+xu^4+\frac{8x^4}{3}+\frac{26x^7}{3}$$
$$+3x^2u^2+\frac{49x^6u}{3}+14x^5u+7x^6+\frac{22x^{11}}{27}+\frac{154x^9}{27}=0, \tag{2.3}$$

где в квадратных скобках выписан оператор $\mathcal{L}(x)u$. Носитель $\mathbf{S}(f_1)$ уравнения (2.3) лежит и слева и справа от прямой $q_1 = v = 0$ (см. рис. 4). Сделаем степенное преобразование (1.15) с $\alpha = 2$ в уравнении (2.3). Получаем уравнение

$$f_2(x,\, w,\, w',\, w'') \stackrel{\text{def}}{=} [-x^4w''-3x^3w'] + \left(\frac{4}{3}x^{10}+x^6+4x^9+4x^8\right)w^3$$
$$+\left(3x^6+4x^{10}+7x^7+12x^8+3x^5+\frac{2}{3}x^{11}+10x^9\right)w^2+\Big(14x^7+9x^6$$
$$-x^4w'-x^5w''+\frac{49}{3}x^8+\frac{16}{3}x^{10}+6x^5+12x^9+\frac{4}{27}x^{12}+\frac{8}{3}x^4+\frac{4}{3}x^{11}\Big)w$$
$$+\frac{26}{3}x^7-x^4w'+\frac{8}{3}x^{10}+x^5w'^2+\frac{25}{3}x^8-x^5w''+\frac{22}{27}x^{11}+\frac{4}{27}x^{12}+5x^5$$
$$+\frac{x^{13}}{81}+\frac{1}{3}x^5w'+\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{3}x^6w''+7x^6+\frac{154}{27}x^9+x^9w^4=0. \tag{2.4}$$

Носитель $\mathbf{S}(f_2)$ уравнения (2.4) лежит в множестве $q_1 \geq v$, $q_2 \geq 0$ и удовлетворяет свойствам (1.12) (см. рис. 5). Уравнение (2.4) имеет формальное решение

$$w(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k, \tag{2.5}$$

где $c_2 = 1/3,\ c_3 = 11/45, c_4 = 32/135, \ldots$.

Запишем уравнение (2.4) в виде (1.19)

$$x^4w''+3x^3w' = \left(\frac{4}{3}x^{10}+x^6+4x^9+4x^8\right)w^3$$
$$+\left(3x^6+4x^{10}+7x^7+12x^8+3x^5+\frac{2}{3}x^{11}+10x^9\right)w^2+\Big(14x^7+9x^6$$
$$-x^4w'-x^5w''+\frac{49}{3}x^8+\frac{16}{3}x^{10}+6x^5+12x^9+\frac{4}{27}x^{12}+\frac{8}{3}x^4+\frac{4}{3}x^{11}\Big)w$$
$$+\frac{26}{3}x^7-x^4w'+\frac{8}{3}x^{10}+x^5w'^2+\frac{25}{3}x^8-x^5w''+\frac{22}{27}x^{11}+\frac{4}{27}x^{12}+5x^5$$
$$+\frac{x^{13}}{81}+\frac{1}{3}x^5w'+\frac{8}{3}x^4-\frac{1}{3}x^6w''+7x^6+\frac{154}{27}x^9+x^9w^4. \tag{2.6}$$

Согласно (1.21) левую часть уравнения (2.6) оценим $x^4w''+3x^3w' \geq x^4w''$. Построим функцию G из правой части уравнения (2.6). Для этого сначала в правой части уравнения (2.6) заменим производную w' и функцию w на $w''x$ и $w''x^2$ соответственно, а коэффициенты – на их модули. Получим многочлен

$$\begin{gathered} G(x,\, w'') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{4}{3}x^4 + 1 + 4x^3 + 4x^2\right) x^{12}w''^3 \\ + \left(3x + 4x^5 + 7x^2 + 12x^3 + 3 + \frac{2}{3}x^6 + 10x^4\right) x^9 w''^2 + \big(14x^3 + 9x^2 \\ + w' + xw'' + \frac{49}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^6 + 6x + 12x^5 + \frac{4}{27}x^8 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x^7\Big) x^6 w'' \\ + \frac{26}{3}x^7 + x^5 w'' + \frac{8}{3}x^{10} + x^7 w''^2 + \frac{25}{3}x^8 + x^5 w'' + \frac{22}{27}x^{11} + \frac{4}{27}x^{12} \\ + \frac{x^{13}}{81} + 5x^5 + \frac{1}{3}x^6 w'' + \frac{8}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^6 w'' + 7x^6 + \frac{154}{27}x^9 + x^{17}w''^4. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Уравнение

$$\begin{gathered} x^4 w'' = \left(\frac{4}{3}x^4 + 1 + 4x^3 + 4x^2\right) x^{12}w''^3 \\ + \left(3x + 4x^5 + 7x^2 + 12x^3 + 3 + \frac{2}{3}x^6 + 10x^4\right) x^9 w''^2 + \big(14x^3 + 9x^2 \\ + w' + xw'' + \frac{49}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^6 + 6x + 12x^5 + \frac{4}{27}x^8 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x^7\Big) x^6 w'' \\ + \frac{26}{3}x^7 + x^5 w'' + \frac{8}{3}x^{10} + x^7 w''^2 + \frac{25}{3}x^8 + x^5 w'' + \frac{22}{27}x^{11} + \frac{4}{27}x^{12} \\ + \frac{x^{13}}{81} + 5x^5 + \frac{1}{3}x^6 w'' + \frac{8}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^6 w'' + 7x^6 + \frac{154}{27}x^9 + x^{17}w''^4 \end{gathered} \tag{2.8}$$

поделим на $x^{v+n} = x^4$, перенесем правую часть влево и получим уравнение

$$\begin{gathered} f_3(x,\, w'') \stackrel{\mathrm{def}}{=} w'' - \bigg[\left(\frac{4}{3}x^4 + 1 + 4x^3 + 4x^2\right) x^{8}w''^3 \\ + \left(3x + 4x^5 + 7x^2 + 12x^3 + 3 + \frac{2}{3}x^6 + 10x^4\right) x^5 w''^2 + \big(14x^3 + 9x^2 \\ + w' + xw'' + \frac{49}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^6 + 6x + 12x^5 + \frac{4}{27}x^8 + \frac{8}{3} + \frac{4}{3}x^7\Big) x^2 w'' \\ + \frac{26}{3}x^3 + xw'' + \frac{8}{3}x^{6} + x^3 w''^2 + \frac{25}{3}x^4 + xw'' + \frac{22}{27}x^{7} + \frac{4}{27}x^{8} \\ + \frac{x^{9}}{81} + 5x^5 + \frac{1}{3}x^2 w'' + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}x^2 w'' + 7x^2 + \frac{154}{27}x^5 + x^{13}w''^4\bigg] = 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Отметим, что носитель уравнения (2.8) совпадает с носителем уравнения (2.6) (рис. 5). Уравнение (2.9) имеет формальное решение в виде ряда

$$w(x) = \sum_{k=2}^{\infty} C_k x^k, \tag{2.10}$$

где $C_2 = 4/3$, $C_3 = 31/18$, $C_4 = 313/108$, $C_5 = 58/9 \ldots$. Ряд (2.10) по построению мажорирует ряд (2.5). По теореме о неявной функции ряд (2.10) сходится, поскольку уравнение (2.9) удовлетворяет условиям $f_3(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f_3}{\partial w''}(0,0) = 1$. И следовательно, ряд (2.5) также сходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

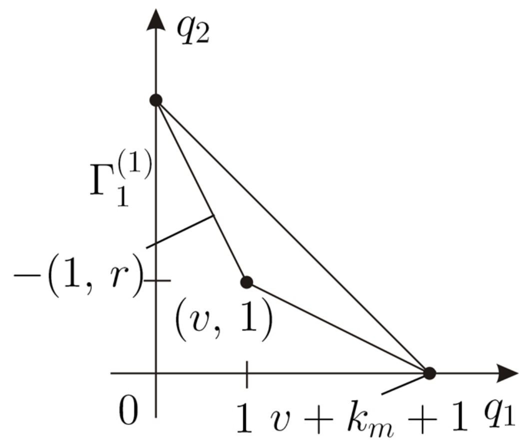
1. *Кузнецов А.Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функциональный анализ и его приложения. 1989. **23**. №4. 63–74.

2. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. **59**. №3. 31–80.

3. *Гурса Э.,* Курс математического анализа. Москва-Ленинград: ГТТИ. 1933. **1**. 1 ч. 368 с.

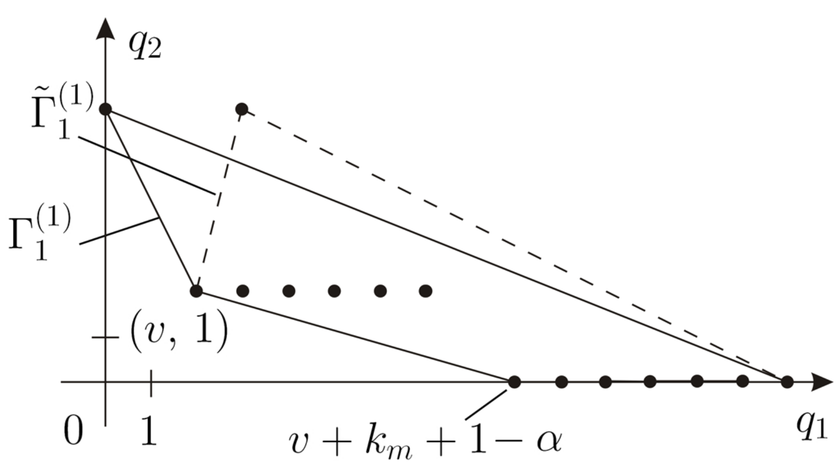
4. *Брюно А.Д.* Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // ДАН. 2001. **380**. №2. 155–159.

5. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Асимптотики решений третьего уравнения Пенлеве // ДАН. 2008. **422**. №6. 729–732.



q_2
$\Gamma_1^{(1)}$
$-(1,\, r)$
$(v,\, 1)$
0
1
$v + k_m + 1$
q_1

Рис. 1



q_2
$\tilde{\Gamma}_1^{(1)}$
$\Gamma_1^{(1)}$
$(v,\, 1)$
0
1
$v + k_m + 1 - \alpha$
q_1

Рис. 2

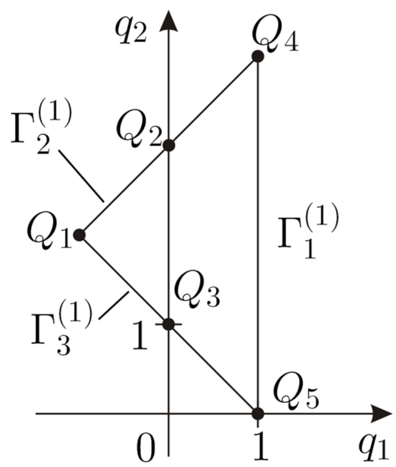


Рис. 3

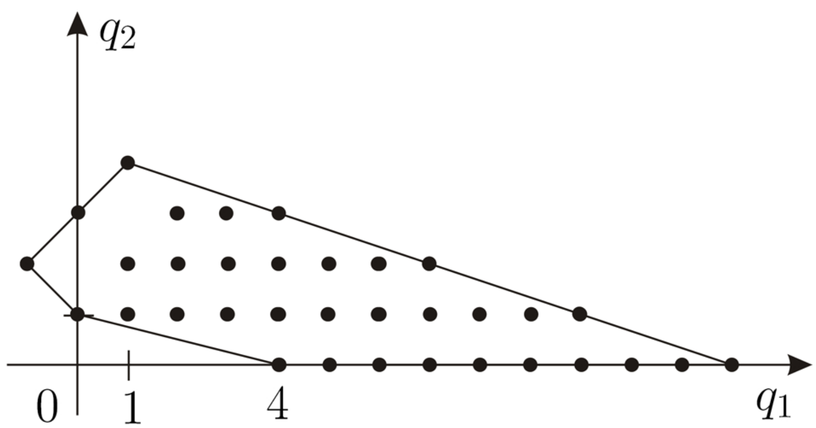


Рис. 4

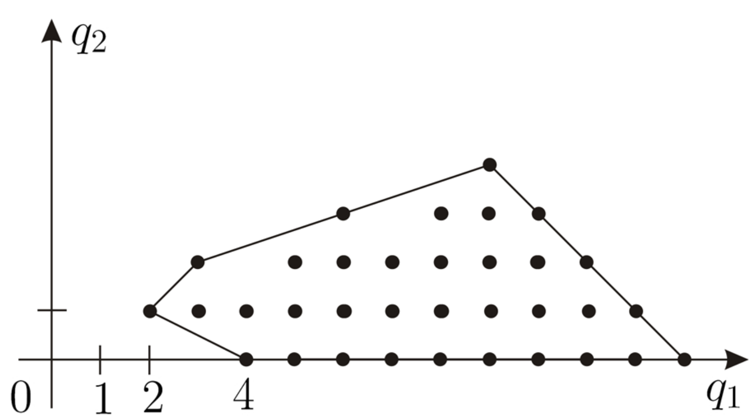


Рис. 5