ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 43 за 2009 г.

Пустыльников Л.Д.

О связи гипотезы Римана со свойствами одной динамической системы

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

Л.Д. Пустыльников

О СВЯЗИ ГИПОТЕЗЫ РИМАНА СО СВОЙСТВАМИ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Москва, 2009 г.

УДК 511.36

Л.Д. Пустыльников. О связи гипотезы Римана со свойствами одной динамической системы. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2009.

Дана конструкция оператора, действующего в гильбертовом пространстве так, что гипотеза Римана о нулях дзета-функции эквивалентна существованию для этого оператора собственного вектора с собственным значением -1. Построена динамическая система, которая связана с гипотезой Римана так, что для каждого комплексного нуля дзета-функции, не лежащего на критической прямой, существует периодическая траектория второго порядка, имеющая специальный вид.

L.D. Pustyl'nikov. On the connection of the Riemann problem with properties of a dynamical system. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2009.

We give the construction of an operator acting in a Hilbert space such that the Riemann hypothesis on zeros of the zeta-function is equivalent to the problem of the existence of an eigenvector for this operator with eigenvalue -1. We give also the construction of a dynamical system which turns out to be related to the Riemann hypothesis in the following way: for each complex zero of the zeta-function not lying on the critical line, there is a periodical trajectory of order two having a special form.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08-01-00082 и 09-01-00291.

Сайт: www.keldysh.ru

Введение

В последние годы в теории дзета-функции Римана $\zeta(s)$ были получены новые результаты, связанные с гипотезой Римана о нулях. Эти результаты можно разделить на две группы. К первой группе относятся результаты, которые связаны с построением оператора, действующего в гильбертовом пространстве, у которого наличие в его спектре собственного значения $\lambda = -1$ даёт необходимое и достаточное условие для справедливости гипотезы Римана. Ко второй группе относятся результаты, связанные с поведением функции $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ и её производных в точке $s = \frac{1}{2}$, где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера. Доказано, что если хотя бы одна чётная производная функции $\xi(x)$ в точке $s = \frac{1}{2}$ — не положительная, то гипотеза Римана о нулях дзета-функции $\zeta(s)$ не справедлива. Однако также было доказано, что все чётные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = \frac{1}{2}$ строго положительные и найдена асимптотика этих производных, когда порядок производной стремится к бесконечности. Эти результаты позволяют доказать, что гипотеза Римана не справедлива для сколь угодно точной аппроксимации функции $\zeta(s)$, удовлетворяющей тому же функциональному уравнению (и другим свойствам), что и функция $\zeta(s)$ [1].

Целью настоящей работы является изложение результатов, относящихся к первой группе. Идея, согласно которой проблема Римана о нулях дзета-функции связана со спектром некоторого оператора, восходит к Гильберту. В настоящей работе мы доказываем (теорема 1), что проблема Римана эквивалентна проблеме о существовании собственного вектора с собственным значением $\lambda = -1$ для некоторого оператора, действующего в гильбертовом пространстве, который задаётся посредством бесконечной матрицы Якоби и представляется в виде суммы самосопряжённого оператора и оператора, заданного бесконечной двухдиагональной матрицей с элементами, убывающими согласно определённому закону (замечание 3). В процессе доказательства теоремы 1 получено и существенно используется представление функции $\zeta(s)$ в критической полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$ с помощью бесконечного произведения конкретных матриц второго порядка (теорема 2). Указанные результаты позволяют построить динамическую систему, связанную с гипотезой Римана следующим образом (теорема 3): для каждого комплексного нуля функции $\zeta(s)$, не лежащего на критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, существует периодическая траектория второго порядка, имеющая специальный вид.

1 Построение оператора

Рассмотрим гильбертово пространство l, элементами которого являются односторонние последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$, где $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Введём оператор $A = A(s)$, зависящий от комплексного числа s, удовлетворяющего неравенству $0 < \operatorname{Re} s < 1$, который действует на l и задаётся с помощью бесконечной трёхдиагональной матрицы $A = (a_{kj})$ $(k, j = 1, 2, \ldots)$ с элементами

$$a_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k - j = -1 \\ p_k, & \text{если } 0 \le k - j \le 1 \\ 0, & \text{если } |k - j| > 1 \end{cases},$$

где $p_k = \frac{h_k}{h_{k-1}}$,

$$h_k = h_k(s) = \begin{cases} \frac{1}{k^s} - \frac{k^{1-s} - (k-1)^{1-s}}{1-s}, & \text{если } k \ge 2 \\ (s-1)^{-1}, & \text{если } k = 1 \\ 1, & \text{если } k = 0 \end{cases}.$$

Оператор A переводит $x = (x_1, x_2, \ldots)$ в $x' = (x'_1, x'_2, \ldots)$, где $x'_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Замечание 1. При $k \to \infty$

$$p_k = 1 - \frac{s+1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad h_k = \frac{1}{(k+1)^s} - \frac{1}{k^s} + \frac{s}{2k^{1+s}} + O\left(\frac{1}{k^{2+s}}\right),$$

где $\left|O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| < \frac{C}{k^2}$, $\left|O\left(\frac{1}{k^{2+s}}\right)\right| < \frac{C}{k^{2+s}}$, а константа C не зависит от k.

Замечание 2. Если $0 < \operatorname{Re} s < 1$, то $h_k(s) \ne 0$.

Замечание 3. Оператор A представляется в виде суммы самосопряжённого оператора, имеющего тёплицеву матрицу с ненулевыми элементами, равными 1, и оператора с двухдиагональной матрицей $\tilde{A} = (\tilde{a}_{kj})$, такой что $\tilde{a}_{kj} = -\frac{s+1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, если $0 \le k - j \le 1$.

Теорема 1. *Функция $\zeta(s)$ имеет нуль в области $0 < \operatorname{Re} s \ne \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда область $0 < \operatorname{Re} s < 1$ содержит такое значение s, что оператор $A(s)$, действующий в пространстве l, имеет собственный вектор с собственным значением $\lambda = -1$.*

Доказательство теоремы 1 будет проведено в секции 3 и существенно использует результат из секции 2.

2 Представление дзета-функции в критической полосе с помощью бесконечного произведения матриц второго порядка

При $k = 1,\, 2,\, \ldots$ введём комплексные матрицы второго порядка Q_k, зависящие от числа s, следующим образом:

$$Q_k = Q_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p_k & -1 - p_k \end{pmatrix},$$

где p_k — числа, введённые в секции 1.

Теорема 2. *Бесконечные произведения*

$$Q'_\infty = Q'_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} Q_{2k}(s) Q_{2k-1}(s) \ldots Q_1(s)$$

и

$$Q''_\infty = Q''_\infty(s) = \lim_{k\to\infty} Q_{2k-1}(s) Q_{2k-2}(s) \ldots Q_1(s)$$

определены в области $0 < \operatorname{Re} s < 1$*, и справедливы равенства*

$$Q'_\infty(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\zeta(s) \\ \zeta(s) \end{pmatrix}, \qquad Q''_\infty(s) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta(s) \\ -\zeta(s) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. С помощью индукции несложно получить следующие равенства:

$$Q_{2k}(s) Q_{2k-1}(s) \ldots Q_1(s) = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) & -1 - \sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) \\ \sum\limits_{\nu=1}^{2k} h_\nu(s) & 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{2k} h_\nu(s) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$Q_{2k-1}(s) Q_{2k-2}(s) \ldots Q_1(s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\nu=1}^{2k-2} h_\nu(s) & 1 + \sum\limits_{\nu=1}^{2k-2} h_\nu(s) \\ -\sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) & -1 - \sum\limits_{\nu=1}^{2k-1} h_\nu(s) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $k > 1$, а величина $h_\nu(s)$ при $\nu = k$ введена в секции 1. В области $\operatorname{Re} s > 0$ имеем:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k(s) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} \right) = \zeta(s), \tag{3}$$

([2], глава III, § 1, лемма 1), что и доказывает теорему 2.

3 Доказательство теоремы 1

Предположим, что вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots) \in l$ и он является собственным для оператора $A(s)$ с собственным значением $\lambda = -1$, и $x_1^* = 1$. Тогда из определения оператора A в секции 1 следует, что при $k \geq 1$

$$\begin{pmatrix} x_k^* \\ x_{k+1}^* \end{pmatrix} = Q_k(s)Q_{k-1}(s)\ldots Q_1(s)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Если $\zeta(s) = 0$, то в силу (4), (1), (2) и (3)

$$|x_k^*| = \left|1 + \sum_{\nu=1}^{k-1} h_\nu(s)\right| = \left|\sum_{\nu=k}^{\infty} h_\nu(s)\right|,$$

и согласно замечанию 1 в секции 1 в области $\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, s$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{\nu=k}^{\infty} h_\nu(s)\right|^2 < \infty,$$

то есть $x^* \in l$. Если же $\zeta(s) = 0$ и $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$, то согласно замечанию 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^*)^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{\nu=k}^{\infty} h_\nu(s)\right|^2 = \infty,$$

то есть $x^* \notin l$. Так как нули функции $\zeta(s)$ расположены симметрично относительно прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ в области $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$, то из предыдущего доказательства следует утверждение теоремы 1.

4 О связи гипотезы Римана о нулях со свойствами одной динамической системы

Пусть $\Pi = \{s : 0 < \mathrm{Re}\, s < 1\}$ — критическая полоса, l — гильбертово пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексных чисел, таких что $\|x\| \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^2 < \infty$, $A = A(s)$ — оператор, введённый в секции 1.

Определение. *Рассмотрим прямое произведение $\Omega = \Pi \times l \times l$ и пусть T — преобразование (динамическая система) пространства Ω, определённое следующим образом: если $(s, x, y) \in \Omega$ ($s \in \Pi$, $x \in l$, $y \in l$), то $T(s, x, y) = (s', x', y')$, где $s' = 1 - s$, $x' = A(s')y$, $y' = A(s)x$.*

Теорема 3. *Функция $\zeta(s)$ имеет нуль $s_* \in \Pi$, такой что $\mathrm{Re}\, s_* \neq \frac{1}{2}$, тогда и только тогда, когда существует точка $(s_*, e, \delta) \in \Omega$ ($e \in l$, $\delta \in l$), такая что $\|e\| + \|\delta\| \neq 0$, из равенства $(s_*', e', \delta') = T(s_*, e, \delta)$ следуют* *равенства* $e' = -\delta$, $\delta' = -e$, *и отображение* T^2 *имеет неподвижную точку* (s_*, e, δ)*:* $T^2(s_*, e, \delta) = (s_*, e, \delta)$.

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1) $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s_* < 1$;

2) $0 < \operatorname{Re} s_* < \frac{1}{2}$.

В случае 1), если $\zeta(s_*) = 0$, то в качестве δ возьмём последовательность, состоящую из одних нулей, а в качестве e возьмём собственный вектор оператора $A(s_*)$, соответствующий собственному значению $\lambda = -1$, который существует согласно теореме 1 (секция 1) и её доказательству (секция 3). Утверждения теоремы 3 в этом случае непосредственно следуют из определения динамической системы T. В случае 2), если $\zeta(s_*) = 0$, то в качестве e возьмём последовательность, состоящую из одних нулей, а в качестве δ возьмём собственный вектор оператора $A(1-s_*)$, соответствующий собственному значению $\lambda = -1$, который существует согласно теореме 1 и её доказательству. Утверждения теоремы 3 в этом случае также следуют из определения динамической системы T.

Список литературы

[1] Л. Д. Пустыльников. О гипотезе Римана для приближённой дзета-функции. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша N 70, 2008.

[2] А. А. Карацуба. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.