



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 38 за 2009 г.



Колдоба А.В., Повецено Ю.А.,
Попов М.В., Устюгова Г.В.,
Чечеткин В.М.

Математическое
моделирование лазерного
спекания двухкомпонентных
порошковых смесей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Математическое моделирование лазерного спекания двухкомпонентных порошковых смесей / А.В.Колдоба [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 38. 15 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-38>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША

А.В. Колдоба, Ю.А. Повещенко, М.В. Попов, Г.В. Устюгова, В.М. Чечеткин

Математическое моделирование
лазерного спекания двухкомпонентных порошковых смесей

Москва 2009

А.В. Колдоба, Ю.А. Повещенко, М.В. Попов, Г.В. Устюгова, В.М. Чечеткин

**Математическое моделирование
лазерного спекания двухкомпонентных порошковых смесей**

аннотация

В работе исследована модель плавления двухкомпонентных порошковых смесей при нагревании лазерным лучом. Рассматривалась смесь, состоящая из легкоплавкой и тугоплавкой компонент. В рамках построенной модели были проведены численные эксперименты и выполнен анализ результатов. Был исследован процесс движения фронтов плавления и застывания. Сделано заключение и получен критерий неэволюционности фронта плавления порошковых смесей в гравитационном поле.

Mathematical modeling of laser sintering of two-component powder mixtures

abstract

This study examines a model of two-component metal powder mixtures melting under laser heating. A mixture consisting of components with high and low melting temperatures is studied. Within the suggested model, several numerical experiments have been carried out and their results analyzed. The process of the propagation of the melting and the solidification fronts has been investigated. A conclusion and a criterion have been obtained for the melting front of the powder mixtures to be non-evolutionary in the gravity field.

Содержание

1. Введение.....	3
2. Физическая модель.....	3
3. Основные уравнения	
3.1 Уравнение неразрывности.....	4
3.2 Уравнение энергии.....	6
3.3 Лагранжевые переменные.....	6
4. Граничные условия.....	7
5. Разностная схема.....	8
6. Численные расчеты.....	8
7. Анализ результатов.....	10
8. Заключение.....	14

1. Введение

Избирательное лазерное спекание порошков – это передовая технология производства сложных деталей с заданными свойствами путем нанесения последовательных слоев за счет плавления и застывания порошка. Управление процессом осуществляется с помощью системы компьютерного моделирования. При этом могут использоваться различные материалы, например, поликарбонат, стекло, нейлон или металлы. При математическом моделировании плавления порошковых смесей необходимо учитывать движение жидкой фазы и возникающие в расплаве конвективные потоки, поверхностное натяжение и силу гравитации. Кроме того, большое значение имеют параметры модели, такие как мощность лазерного луча, скорость его перемещения, однородность и толщина порошковой смеси, коэффициент пористости и размеры частиц. Для математического описания процесса плавления возможны различные подходы [1,2]. Подход с использованием уравнения Эйлера был применен в [3,4], где была предложена трехмерная численная модель однослойного и многослойного спекания однокомпонентных порошков. Возможно также использование закона Дарси, который целесообразно применять при моделировании спекания двухкомпонентного порошка, тугоплавкая компонента которого образует каркас, сквозь который просачивается расплавленное вещество за счет действия гравитационных и капиллярных сил [5]. Т.к. во время плавления объемная часть газа в порошке уменьшается, происходит значительное изменение плотности. Кроме того, тугоплавкие частицы начинают двигаться внутри расплава вниз за счет усадки. Сильное влияние на перенос энергии в образце оказывает движение как тугоплавких частиц, так и жидкой фазы. При этом эффектом проседания верхней поверхности при плавлении порошка пренебречь нельзя. Металлический порошок имеет очень большую внутреннюю теплоту плавления, следовательно, процесс плавления и повторного застывания оказывает сильное влияние на распределение температуры, остаточное напряжение и локальную скорость плавления.

В данной работе исследуется процесс плавления двухкомпонентного металлического порошка с использованием численной модели, в которой движение расплава описывается законом Дарси. Одномерная постановка позволила исследовать процесс движения фронтов плавления и застывания, определить критерий их эволюционности, а также оценить применимость приближения постоянной пористости.

2. Физическая модель

В начальный момент времени в образце имеется однородное распределение температуры T^0 . Плавление начинается, когда температура порошка достигает T_m - температуры плавления легкоплавких частиц. Для замыкания системы уравнений необходимо использовать дополнительное соотношение между объемными долями компонент. Для этого можно использовать либо приближение о постоянной пористости смеси, либо приближение о постоянном объеме. Если размер легкоплавких частиц много меньше размера тугоплавких, то проседания смеси при плавлении легкоплавкой компоненты не происходит, т.к. крупные частицы образуют устойчивый каркас. В этом случае целесообразно использовать приближение о постоянном объеме. В нашей работе мы рассматриваем плавление порошка с размером частиц одного порядка. В этом случае после расплавления легкоплавких частиц, каркас из тугоплавких частиц начинает проседать под действием силы гравитации и решать задачу целесообразно в приближении постоянной пористости.

Будем также использовать следующие естественные дополнительные приближения:

1. Тепловые свойства обоих порошков не зависят от температуры. Тепловые свойства легкоплавкого порошка не зависят от фазового состояния.
2. Плотности легкоплавкого порошка и его расплава одинаковы.
3. Плотностью и теплоемкостью газа можно пренебречь.
4. Для описания течения жидкого расплава в порошке можно использовать линейный закон Дарси.
5. Давление газовой фазы постоянно.

3. Основные уравнения

3.1 Уравнения неразрывности

Мы предполагаем, что плотности легкоплавкого порошка и жидкой фазы одинаковы, скорости проседания тугоплавких и легкоплавких (нерасплавленных) частиц одинаковы и равны v_h . В этом случае уравнение неразрывности для легкоплавкой компоненты имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_l + \varphi_s) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_l v_l + \varphi_s v_h) = 0, \quad (1)$$

где φ_l и φ_s - объемные доли жидкой фазы и твердого легкоплавкого порошка соответственно, v_l - скорость жидкой фазы.

Уравнение неразрывности тугоплавких частиц имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_h v_h) = 0, \quad (2)$$

где φ_h - объемная доля тугоплавкого порошка.

Мы принимаем модель постоянной пористости, в рамках которой считается, что

$$\varphi_s + \varphi_h = 1 - m, \quad (3)$$

соответственно

$$\varphi_g + \varphi_l = m,$$

где m - пористость, φ_g - объемная доля газа.

Интенсивность фазового перехода равна нулю везде, кроме границы жидкое-твердое между легкоплавкой частью и жидкой фазой. В областях, где плавления еще нет $v_h = 0$. Для вычисления скорости жидкой фазы относительно порошка мы использовали закон Дарси в форме

$$v_l - v_h = -\frac{KK_{rl}}{\varphi_l \mu} \left(\frac{\partial P_l}{\partial z} - \rho_l g \right). \quad (4)$$

Здесь K - абсолютная проницаемость, K_{rl} - относительная проницаемость, μ - динамическая вязкость, P_l - давление в жидкой фазе, ρ_l - плотность в жидкой фазе, g - ускорение свободного падения.

Давление в жидкой фазе есть сумма капиллярного и газового давления

$$P_l = P_c + P_g .$$

Разница между давлением в жидкой и газовой фазах обусловлена капиллярным эффектом. Мы рассматриваем случай несмачивающей жидкости, что означает $P_c > 0$ (см. рис. 1).

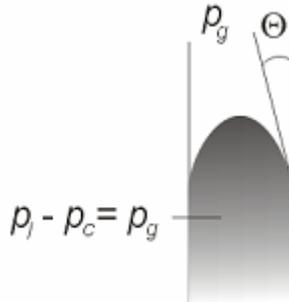


рис. 1

Абсолютная проницаемость K в (4) определяется уравнением Кармана-Козени и имеет значение

$$K = \frac{d_p^2 m^2}{180(1-m)^2},$$

где d_p - диаметр частиц порошка.

Мы считаем, что относительная проницаемость K_{rl} есть функция насыщенности жидкой фазой $S \equiv \varphi_l / m$ и имеет вид

$$K_{rl}(S) = S_e^3,$$

где S_e - нормированная насыщенность

$$S_e = \begin{cases} \frac{S - S_{ir}}{1 - S_{ir}} & S > S_{ir}, \\ 0 & S \leq S_{ir}. \end{cases}$$

Здесь S_{ir} - остаточная насыщенность.

В приближении постоянного давления газовой фазы закон Дарси (4) превращается в

$$W = \varphi_l (v_l - v_h) = - \frac{K K_{rl}(S)}{\mu} \left(\frac{\partial P_c}{\partial z} - \rho_l g \right). \quad (5)$$

Здесь W - скорость фильтрации жидкой фазы относительно порошка.

Капиллярное давление $P_c = P_c(S, T)$ может быть вычислено через функцию Леверетта:

$$P_c(S, T) = \sigma(T) \sqrt{\frac{m}{K}} \cos \theta J(S).$$

Здесь $\sigma(T)$ - коэффициент поверхностного натяжения, $\sqrt{\frac{m}{K}}$ - характерный линейный размер пор, θ - угол смачивания на границе порошок-жидкость-газ (рис. 1), $J(S)$ - функция Леверетта. Мы приняли $\cos \theta = 1$ и следующее выражение для функции Леверетта [6]:

$$J(S) = a(S_e + b)^c,$$

где $a = 0.38$, $b = 0.014$, $c = 0.27$ - эмпирические константы.

Воспользовавшись (5) перепишем (1) в виде

$$\frac{\partial(\varphi_l + \varphi_s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}((\varphi_l + \varphi_s)v_h + W) = 0. \quad (6)$$

3.2 Уравнение энергии

Для описания переноса тепла мы использовали уравнение энергии в энтальпийной форме. При этом принималось, что можно пренебречь энергией межфазовой границы, гравитацией и кинетической энергией. Внешнее давление считалось постоянным. В этих предположениях уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_h i_h + \varphi_l i_l + \varphi_s i_s) + \frac{\partial}{\partial z}(v_l \varphi_l i_l) + \frac{\partial}{\partial z}[v_h(\varphi_h i_h + \varphi_s i_s)] = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad (7)$$

где $\lambda(T)$ - коэффициент теплопроводности смеси, $i_h = C_h(T - T_m)$ - плотность энтальпии тугоплавкого порошка, $i_s = C_s(T - T_m)$ - плотность энтальпии легкоплавкого порошка, $i_l = C_l(T - T_m) + Q$ - плотность энтальпии жидкой фазы. Здесь C_h , C_s , C_l - соответствующие теплоемкости, Q - теплота фазового перехода, отнесенная к единице объема.

$$Q = \rho_l h_{sl},$$

где h_{sl} - внутренняя теплота плавления или застывания.

Коэффициент теплопроводности смеси тугоплавкой компоненты, легкоплавкой компоненты и жидкости имеет сложный вид, но мы полагаем $\lambda(T) = \lambda = const$. Теплопроводностью газа мы пренебрегаем.

Воспользовавшись (5) перепишем (7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_h i_h + \varphi_l i_l + \varphi_s i_s) + \frac{\partial}{\partial z}[v_h(\varphi_h i_h + \varphi_s i_s)] + \frac{\partial}{\partial z}(W i_l + v_h \varphi_l i_l) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right). \quad (8)$$

3.3 Лагранжевые переменные

Существует подход, когда в пространственной одномерной задаче с переменной массой в области течения удастся описывать среду в рамках лагранжевого подхода. Описание такого сорта было названо в [7] квазилагранжевыми массовыми переменными. Ниже вводятся лагранжевые массовые переменные, связанные с тугоплавкой компонентой. Для этого перепишем (2) в виде

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial t} = - \frac{\partial(\varphi_h v_h)}{\partial z}.$$

Отсюда видно, что существует величина $x = x(z, t)$, такая что

$$dx = \varphi_h dz - \varphi_h v_h dt.$$

Следовательно, x - лагранжевая координата по тугоплавкой фазе,

$$dz = \frac{dx}{\varphi_h} + v_h dt$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varphi_h} \right) = \frac{\partial v_h}{\partial x}.$$

В новых переменных уравнения (6)-(8) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varphi_l + \varphi_s}{\varphi_h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} W = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(i_h + \frac{\varphi_l i_l + \varphi_s i_s}{\varphi_h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (i_l W) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \varphi_h \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (10)$$

Для построения вычислительного алгоритма удобно ввести переменные

$$i = \frac{\varphi_l i_l + \varphi_s i_s}{\varphi_l + \varphi_s} \text{ и } \omega = \frac{\varphi_l + \varphi_s}{\varphi_h}.$$

Тогда уравнения (9)-(10) запишутся в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (i_h + \omega i) + \frac{\partial}{\partial x} (i_l W) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \varphi_h \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (12)$$

Уравнения (11)-(12) записаны в системе координат, связанной с частицами тугоплавкого порошка. Мы исключили из уравнений компоненту скорости v_h , что позволяет использовать однородную неподвижную разностную сетку в переменных x и t .

4. Граничные условия

Пусть ось z направлена вниз, $z = z_0$ и $z = H$ - верхняя и нижняя граница порошкообразной смеси соответственно. Граничные условия для уравнения энергии выглядят следующим образом:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = I, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0,$$

где I - энергия лазерного луча. В переменных x и t они записываются в виде:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{I}{\varphi_h}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_H} = 0,$$

где $[0, x_H]$ - расчетная область. В начальный момент времени задается однородное распределение температуры $T = T^0$.

5. Разностная схема

Необходимо численно решить систему уравнений (11)-(12):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} W(S, T) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} W(S, T) i_l = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \varphi_h \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (14)$$

относительно ω и $B = i_h + \omega i$, являющихся функциями температуры T и насыщенности S . Для проведения расчетов энтальпия на границе фазового перехода задавалась с помощью кусочно-линейной функции вида:

$$i = \begin{cases} i_s(T) & T < T_m - \Delta T, \\ i_{s0} + \frac{i_{l0} - i_{s0}}{2\Delta T} (T - T_m + \Delta T) & T_m - \Delta T < T < T_m + \Delta T, \\ i_l(T) & T > T_m + \Delta T, \end{cases}$$

где $i_{s0} = i_s(T_m - \Delta T)$, $i_{l0} = i_l(T_m + \Delta T)$, ΔT - параметр, определяющий ширину переходной зоны между фазами.

Система (13)-(14) решалась в области $[0, x_H] = [0, 1]$ на однородной разностной сетке с шагом Δx . Аппроксимированные на разностной сетке уравнения имеют вид:

$$\frac{\hat{\omega}_k - \omega_k}{\Delta t} + \frac{W_{k+1/2} - W_{k-1/2}}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\hat{B}_k - B_k}{\Delta t} + \frac{(Wi_l)_{k+1/2} - (Wi_l)_{k-1/2}}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\varphi_h(\lambda T_{k+1/2}) \frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta x} - \varphi_h(\lambda T_{k-1/2}) \frac{T_k - T_{k-1}}{\Delta x} \right).$$

Здесь величины с целыми индексами k соотносятся с центрами ячеек, величины с полуцелыми индексами $k \pm 1/2$ – с их границами.

Условия на границах:

$$-\lambda \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = \frac{I}{\varphi_h}, \quad \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta x} = 0.$$

Шляпкой обозначаются величины на следующем временном слое. Значения величин на границах ячеек определялись с помощью интерполяции.

6. Численные расчеты

Чтобы данная технология спекания порошков для производства сложных металлических частей работала, необходимо хорошее соответствие между поверхностными свойствами двух материалов. Подбор материалов с необходимыми свойствами усложняется тем, что термофизические свойства различных материалов описаны в литературе недостаточно полно. Некоторые параметры необходимо подбирать экспериментально. В наших расчетах в качестве легкоплавкой части мы использовали порошок никеля (температура плавления 1728 К, 20% по объему), в качестве тугоплавкой части - порошок углеродной стали марки AISI 1010 (температура плавления 1789 К, 40% по объему). Средний диаметр частиц никеля 45 мкм, частиц AISI 1010 – 68 мкм. 40% объема занимает воздух в порах.

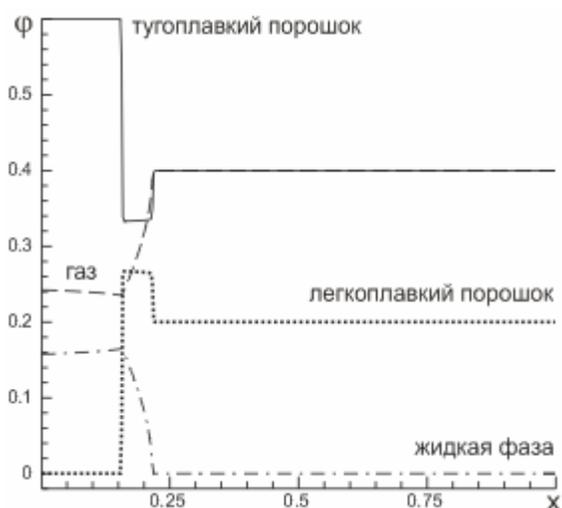


рис.2

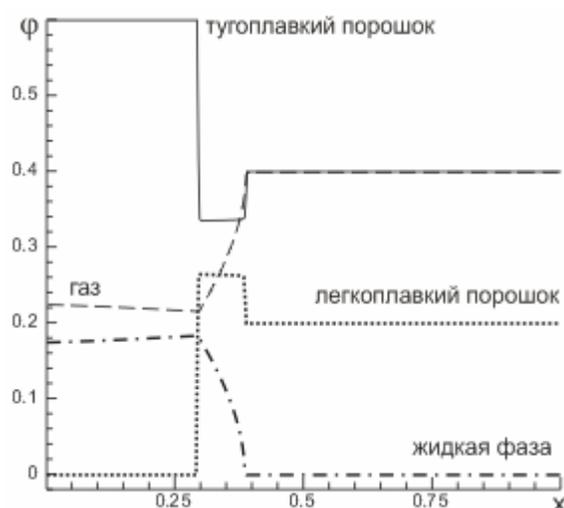


рис. 3

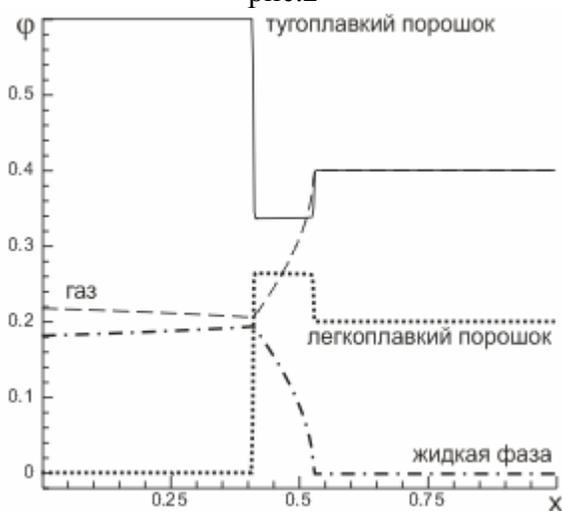


рис.4



рис. 5

Использовались следующие значения параметров:

остаточная насыщенность $S_{ir} = 0.08$;

пористость смеси $m = 0.4$;

диаметр частиц порошка $d_p = 5.65 \times 10^{-5}$ м;

динамическая вязкость расплава никеля $\mu = 5.474 \times 10^{-3}$ кг/(с·м);

поверхностное натяжение расплава никеля $\sigma(T) = 1.207 - 1.802 \times 10^{-4}(T - 1271)$ Н/м;

внутренняя теплота плавления или застывания никеля $h_{sl} = 3.774 \times 10^5$ Дж/кг;

удельная теплоемкость AISI 1010 $c_{ph} = 450$ Дж/(К·кг);

удельная теплоемкость никеля $c_{pl} = 444.18$ Дж/(К·кг);

плотность AISI 1010 $\rho_h = 7.9 \times 10^3$ кг/м³;

плотность твердого никеля $\rho_s = 8.908 \times 10^3$ кг/м³;

плотность расплава никеля $\rho_l = 7.81 \times 10^3$ кг/м³;

теплопроводность AISI 1010 $k_h = 65.2$ Вт/(К·м);

теплопроводность никеля $k_l \approx k_s = 90.9$ Вт/(К·м);

эффективная теплопроводность нерасплавленного порошка $k_{eff} = 0.6k_h + 0.4k_s$;

температура плавления никеля $T_m = 1728$ К;

начальная температура смеси $T^0 = 1600$ К;

мощность лазерного луча $I = 30$ Вт.

На рис. 2-5 представлены объемные доли компонент в последовательные моменты времени. Сплошная линия соответствует тугоплавкому порошку, точки – нерасплавленному легкоплавкому, точка-пунктир – жидкой фазе, пунктир – воздуху, имеющемуся в порах. По оси абсцисс отложена безразмерная координата x . Результаты демонстрируют изменение объемных долей в процессе плавления. На рис. 6 представлено распределение температуры в координатах (z, t) . Линиями показаны изотермы. Видно, что при плавлении порошок проседает.

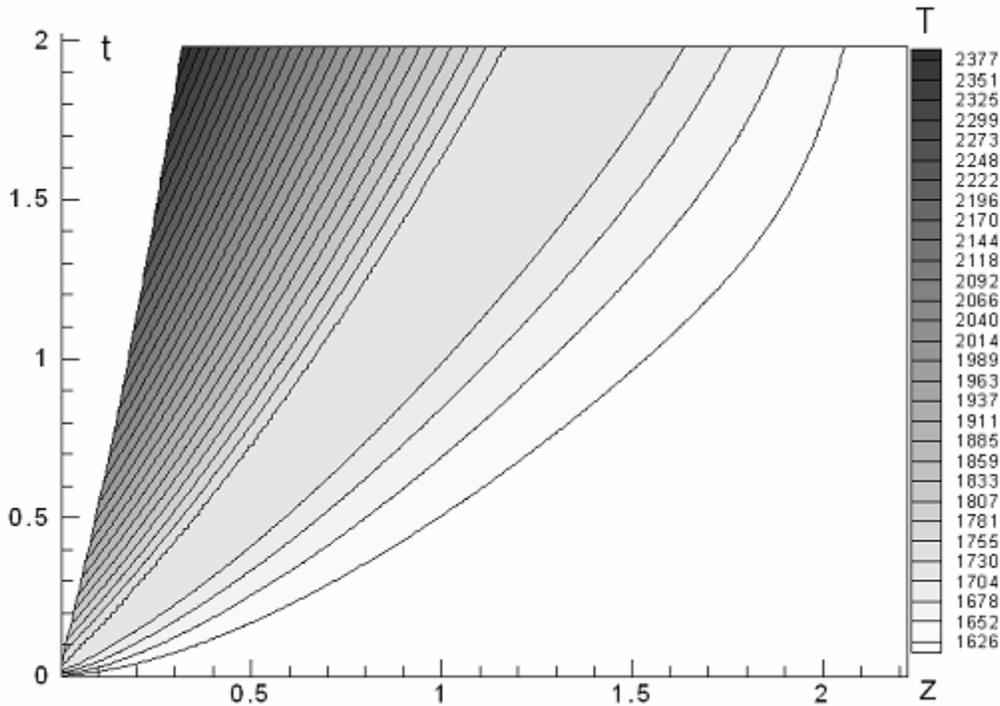


рис. 6

7. Анализ результатов

Как видно из полученных результатов, существует конечная ширина зоны плавления, которая увеличивается с течением времени. Кроме того, объемная доля легкоплавкого порошка в зоне плавления больше, чем в нерасплавленной зоне, а тугоплавкого порошка наоборот меньше. Чтобы объяснить такое поведение решения, проанализируем уравнения (11)-(12):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(i_h + \omega i) + \frac{\partial}{\partial x}(i_l W + q) = 0,$$

где $q = -\lambda \varphi_h \frac{\partial T}{\partial x}$.

Характерный график распределения температуры представлен на рис. 7. Внутри зоны плавления температура постоянна и равна T_m . Характерный график теплового потока q представлен на рис. 8. В области 1, где плавление еще не началось, $q = q_1 > 0$, внутри зоны плавления $q = q^* = 0$, в области 2 $q = q_2 > q_1 > 0$.

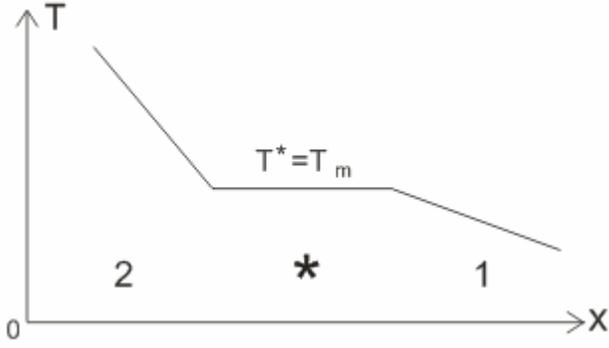


рис. 7

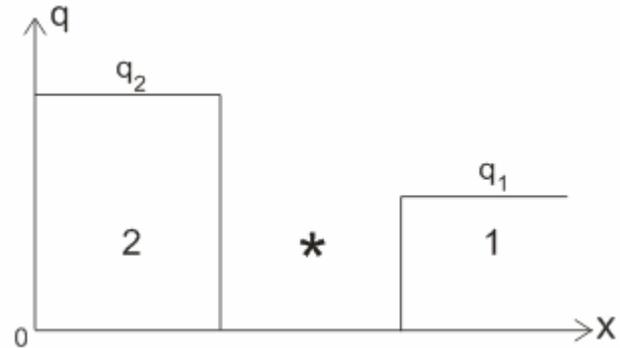


рис. 8

На фронте фазового перехода выполнены соотношения Гюгонио:

$$\begin{aligned} \dot{x}[\omega] &= [W], \\ \dot{x}[i_h + \omega i] &= [i_l W] + [q], \end{aligned}$$

где \dot{x} - скорость движения фронта фазового перехода, $[i_h] = 0$.

Соотношения Гюгонио для фронта 1:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(\omega^* - \omega_1) &= W^* - W_1, \\ \dot{x}_1(\omega^* i^* - \omega_1 i_1) &= i_l^* W^* - i_{l1} W_1 + [q]_1. \end{aligned}$$

Для простоты примем, что функция W зависит от объемной доли легкоплавкого порошка квадратичным образом:

$$W \approx A\varphi_l^2,$$

где $A = const > 0$.

В области 1: $W_1 = 0$, $i_1 = 0$ (т.к. $\varphi_{l1} = 0$, $i_{s1} = C_s(T - T_m) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_m$),
 $i_{l1} = C_l(T - T_m) \rightarrow 0$.

В области *: $i_l^* = C_l(T - T_m) + Q = Q$, при $T = T_m$, $\omega^* = \frac{\varphi_l^* + \varphi_s^*}{\varphi_h^*}$, $W^* = A\varphi_l^{*2}$,

$$\omega^* i^* = \frac{\varphi_l^* + \varphi_s^*}{\varphi_h^*} \frac{\varphi_l^* i_l^* + \varphi_s^* i_s^*}{\varphi_l^* + \varphi_s^*} = \frac{\varphi_l^* Q}{\varphi_h^*}. \text{ Из (3) следует } \varphi_h^* = 1 - m - \varphi_s^*.$$

Скачок теплового потока $[q]_1 = q^* - q_1 = -q_1 < 0$. Следовательно, на фронте 1 имеем следующие соотношения:

$$\dot{x}_1 \left(\frac{\varphi_l^* + \varphi_s^*}{1 - m - \varphi_s^*} - \omega_1 \right) = A\varphi_l^{*2}, \quad (15)$$

$$\dot{x}_1 \frac{\varphi_l^*}{1-m-\varphi_s^*} = A\varphi_l^{*2} + \kappa_1, \quad (16)$$

где введено обозначение $\kappa_1 = \frac{-q_1}{Q}$.

Соотношения Гюгонио для фронта 2 :

В области 2: $\varphi_{s2} = 0$, $W_2 = A\varphi_{l2}^2$, $\omega_2 i_2 = \frac{\varphi_{l2} + \varphi_{s2}}{\varphi_{h2}} \frac{\varphi_{l2} i_{l2} + \varphi_{s2} i_{s2}}{\varphi_{l2} + \varphi_{s2}} = \frac{\varphi_{l2} Q}{\varphi_{h2}}$,

$i_{s2} = C_s(T - T_m) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_m$.

Скачок теплового потока $[q]_2 = q_2 - q^* = q_2 > 0$. Следовательно, на фронте 2 имеем следующие соотношения:

$$\dot{x}_2 \left(\omega_2 - \frac{\varphi_l^* + \varphi_s^*}{1-m-\varphi_s^*} \right) = A(\varphi_{l2}^2 - \varphi_l^{*2}), \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 \left(\omega_2 - \frac{\varphi_l^*}{1-m-\varphi_s^*} \right) = A(\varphi_{l2}^2 - \varphi_l^{*2}) + \kappa_2, \quad (18)$$

где введено обозначение $\kappa_2 = \frac{q_2}{Q}$.

Вычтем (16) из (15), тогда

$$\dot{x}_1 \left(\frac{\varphi_s^*}{1-m-\varphi_s^*} - \omega_1 \right) = -\kappa_1. \quad (19)$$

Из (16) следует

$$\varphi_s^* = -\dot{x}_1 \frac{\varphi_l^*}{A\varphi_l^{*2} + \kappa_1} + 1 - m. \quad (20)$$

Подставив (20) в (19) получаем выражение для \dot{x}_1 :

$$\dot{x}_1 = \frac{(1-m)(A\varphi_l^{*2} + \kappa_1)}{(1+\omega_1)\varphi_l^*} + \frac{\kappa_1}{1+\omega_1}. \quad (21)$$

Подставляем (21) в (20), тогда

$$\varphi_s^* = -\frac{1}{1+\omega_1} \left(1-m + \frac{\kappa_1 \varphi_l^*}{A\varphi_l^{*2} + \kappa_1} \right) + 1 - m. \quad (22)$$

Вычтем (18) из (17) и выразим \dot{x}_2 :

$$\dot{x}_2 = \kappa_2 \frac{1-m-\varphi_s^*}{\varphi_s^*}. \quad (23)$$

Подставляем (22) в (23), тогда

$$\dot{x}_2 = \kappa_2 \frac{(1-m)(A\varphi_l^{*2} + \kappa_1) + \kappa_1\varphi_l^*}{\omega_1(1-m)(A\varphi_l^{*2} + \kappa_1) - \kappa_1\varphi_l^*}. \quad (24)$$

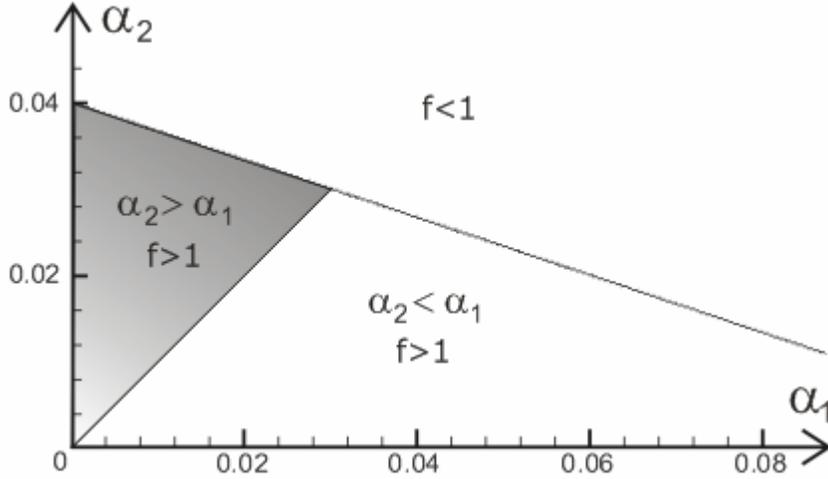


рис. 9

Разделив (21) на (24) находим отношение скоростей первого и второго фронта:

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} \equiv f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\omega_1(1-m)(\varphi_l^{*2} - \alpha_1) + \alpha_1\varphi_l^*}{\alpha_2(1 + \omega_1)\varphi_l^*},$$

где $\alpha_1 = -\frac{\kappa_1}{A} = \frac{q_1}{QA} > 0$ и $\alpha_2 = \frac{\kappa_2}{A} = \frac{q_2}{QA} > \alpha_1$. Полученная функция f определяет отношение скоростей фронтов в зависимости от положительных параметров α_1 и α_2 (причем $\alpha_2 > \alpha_1$), которые связаны с физическими свойствами веществ. Расширяющаяся в процессе плавления зона фазового перехода означает, что функция $f > 1$. На рис. 9 цветом показана область, где это условие выполнено. Для расчетов мы использовали следующие значения:

$$m = 0.4, \omega_1 = 0.5, \varphi_l^* = 0.2. \quad (25)$$

Видно, что $f > 1$ выполняется только для малых α_1 и α_2 . Малые значения данных параметров возможны при высокой проницаемости веществ (большой коэффициент A) либо высокой теплоте фазового перехода Q . Это означает, что расплавленная легкоплавкая компонента под действием силы тяжести просачивается внутрь порошка и застывает на фронте 1.

Из (22) и (3) следует, что

$$\varphi_h^* = \frac{1}{1 + \omega_1} \left(1 - m - \frac{\alpha_1\varphi_l^*}{\varphi_l^{*2} + \alpha_1} \right). \quad (26)$$

На рис. 10 представлен график функции (26) для значений (25).

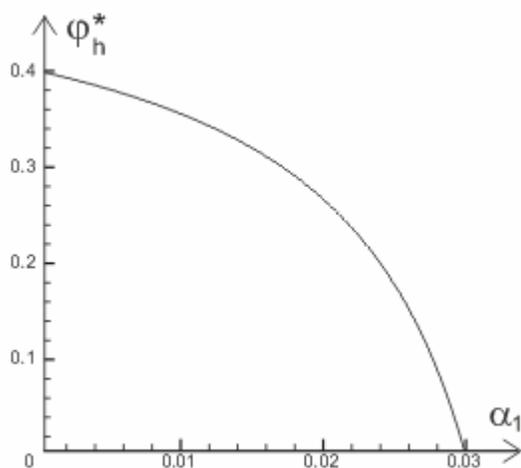


Рис. 10

Видно, что для всех допустимых значений параметра α_1 объемная доля тугоплавкого порошка внутри зоны плавления не может превышать её значения в области 1:

$$\varphi_h^* < \varphi_{h1} = \frac{1-m}{1+\omega_1} = 0.4,$$

что объясняет полученные численные результаты (см. рис. 2-5). Заметим, что подобное поведение решения связано с приближением постоянной пористости порошка, которое используется в математической модели.

8. Заключение

В рамках рассмотренной численной модели был исследован процесс движения фронтов плавления и застывания порошкообразной смеси при нагревании лазерным лучом. В результате вычислительного эксперимента в приближении постоянной пористости был получен эффект проседания поверхности порошка. Ширина зоны плавления увеличивалась с течением времени, причем объемная доля легкоплавкого порошка в зоне плавления оказалась больше, чем в нерасплавленной зоне, а тугоплавкого порошка наоборот меньше. Было показано, что скорость увеличения ширины зоны плавления зависит от физических характеристик веществ и растет с увеличением как проницаемости, так и теплоты фазового перехода. В результате анализа уравнений была получена диаграмма эволюционности фронта плавления, позволяющая предсказать качественное поведение решения в зависимости от параметров смеси. Также было показано, что в приближении постоянной пористости объемная доля тугоплавкой фазы внутри зоны плавления не может превышать её значения в области, где плавления еще не произошло. Этим объясняется соотношение объемных долей компонент в зоне плавления.

Список литературы

- [1] V.I. Mazhukin, A.A. Samarskii, Mathematical modeling in the technology of laser treatments of material. *Surv. Math. Ind.*, **4**, 85-149, 1994.
- [2] М.П. Галанин, И.С. Ерхов, Е.Ю. Локтионов, Ю.Ю. Протасов, Численное моделирование динамики температурных полей на плоских мишенях при нестационарном интенсивном лазерном воздействии. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2008, № 61, 33 с.

- [3] B. Xiao, Y. Zhang, Numerical investigation for direct metal laser sintering of single-component powders on top of sintered layers *2006 ASME Int. Mechanical Engineering Congr. (Chicago, IL, 5–10 November 2006)*.
- [4] B. Xiao, Y. Zhang, Laser sintering of metal powders on sintered layers. *J. of Phys. D: Appl. Phys.* **40**, 6725-6734, 2007.
- [5] Y. Zhang, A. Faghri, C.W. Buckley, T.L. Bergman, Three-dimensional sintering of two-component metal powders with stationary and moving laser beams. *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **49**, issue 7-8, 1489-1492, 2006.
- [6] J. Pak, O.A. Plumb, Melting in a Two-Component Packed Bed, *ASME J. Heat Transfer*, **119**, 553-559, 1997.
- [7] Ю.А. Повещенко, Ю.П. Попов. Некоторые задачи газовой динамики при наличии источников. *ЖВМ МФ* **18**, № 4, 1978.