



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 80 за 2009 г.



Винниченко А.А., [Зайцев Н.А.](#)

Прозрачные граничные условия для волнового уравнения в квадратной области

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Винниченко А.А., Зайцев Н.А. Прозрачные граничные условия для волнового уравнения в квадратной области // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 80. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-80>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША

А.А.Винниченко, Н.А.Зайцев

ПРОЗРАЧНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ  
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ  
В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ

Москва, 2009

А.А.Винниченко, Н.А.Зайцев. *Прозрачные граничные условия для волнового уравнения в квадратной области.*

**Аннотация.** Работа посвящена построению граничного условия полной прозрачности для волнового уравнения в квадратной области. Идея метода заключается в сведении задачи в области с негладкой границей к задаче с бесконечно гладкой границей. Для этого используется вспомогательная область, частично перекрывающаяся с исходной областью – "областью интереса". Во вспомогательной области расчёт ведётся в пространстве коэффициентов Фурье, что существенно уменьшает вычислительные затраты на вспомогательную задачу. На внешней круговой границе вспомогательной области ставятся условия полной прозрачности Софронова [6]. Приведены результаты тестовых расчётов, демонстрирующие точность и устойчивость предложенного метода.

A.A.Vinnichenko, N.A.Zaitsev. *Transparent boundary conditions for the wave equation in the square domain.*

**Abstract.** The preprint is devoted to constructing of Transparent Boundary Conditions (TBC) for the wave equation in the square domain. The idea of the method consists in reducing the problem in a domain with non-smooth boundary to the problem with infinitely smooth boundary. It uses an auxiliary region, partly overlapping with the original area – "area of interest." In the auxiliary field calculations are carried out in the space of Fourier coefficients, which significantly reduces the computational cost of the auxiliary problem. Sofronov's Transparent Boundary Conditions [6] are put on the outside, circular, boundary of the auxiliary domain. Results of test calculations to demonstrate the accuracy and stability of the proposed method are presented.

## Введение

При решении задач механики, физики, техники, геофизики и других наук конечно-разностными методами неограниченная область задания функции заменяется расчетной областью конечных размеров. При этом на внешней границе расчетной подобласти возникает потребность конструирования искусственных граничных условий (ИГУ), которые обеспечили бы необходимое замыкание "усеченной" постановки задачи и более или менее равносильно заменили бы влияние всей отбрасываемой (неограниченной) части исходной области. Вышеупомянутую внешнюю границу часто называют искусственной (как и требующиеся на ней граничные условия), подчеркивая тем самым ее происхождение от ограничений численного метода решения, а не от первоначальной постановки задачи.

Обеспечение высокой точности, как правило, требует, чтобы ИГУ имели нелокальный характер. В частности, точные ИГУ, то есть те, что не приносят никакой дополнительной ошибки за счет усечения области, всегда оказываются нелокальными, если количество пространственных измерений в задаче больше одного.

В нестационарном случае обычно имеет место нелокальность также и по времени. Широко распространённая точка зрения состоит в том, что нелокальность приводит к большим вычислительным затратам, а также создает труднопреодолимые препятствия при практической реализации ИГУ. Поэтому в качестве альтернативы (высоко)точным нелокальным ИГУ рассматриваются различные локальные подходы, которые могут быть получены как независимо, так и путем аппроксимации нелокальных ИГУ. Такие локальные ИГУ обычно дешевле и проще в реализации, чем нелокальные методы, но могут приводить к неприемлемой величине вносимой погрешности.

Многочисленные теоретические и практические исследования позволили накопить ряд рецептов построения приближённых ИГУ, которые основаны на рассмотрении одномерных уравнений, выпуске через искусственную границу частных решений (плоские или сферические волны), затухании уходящих волн и др. Они известны под названиями радиационные, неотражающие, открытые, характеристические, поглощающие и т.д.

Новый подход предложил В. С. Рябенский, который поставил задачу построения граничного условия на искусственной границе, эквивалентного решению задачи во всей отбрасываемой области. Эта программа была реализована в работах [1 – 5] и др.

Такую же постановку задачи построения ИГУ, эквивалентного решению задачи во всей отброшенной области, но для дифференциальных уравнений использовал И. Л. Софронов. В [6] он получил аналитические условия полной прозрачности (УПП), позволяющие эквивалентно заменить внешнюю задачу для волнового уравнения на задачу с искусственной границей, образованной окружностью (двумерная задача) или сферой (трёхмерная задача). Суть метода заключается в том, чтобы найти общее решение внешней,

вспомогательной, задачи, описывающее все убывающие на бесконечности задачи (функцию Грина этой задачи).

Впоследствии И. Л. Софронов один и с соавторами решил ряд задач постановки УПП для различных уравнений и областей (смотри, например, [7 – 10] и др.). В большинстве рассмотренных задач найти решение вспомогательной задачи аналитически не представляется возможным, и оно находится численно. С этой целью решение на внешней границе разлагается по подходящему базису и для каждой базисной функции вычисляется решение внешней задачи.

Таким образом, и при аналитическом, и при численном построении граничного оператора УПП (в англоязычной литературе ТВС – Transparent Boundary Conditions) существенным является разложение решения на границе в ряд Фурье. Это обстоятельство накладывает свои ограничения на гладкость искусственной границы. Во-первых, на негладкой границе бывает непросто найти подходящий базис. Во-вторых, негладкость границы приводит к замедлению скорости сходимости разложения по базису. И, в-третьих, решить внешнюю задачу для негладкой границы очень сложно.

Поэтому мы погружаем область интереса с негладкой границей (квадрат) в область с гладкой границей (круг), для которой решение внешней задачи ищется гораздо легче (в нашем случае оно найдено аналитически в [6]).

Возникает вопрос: допустим, что мы умеем решать задачу в квадрате и знаем УПП на окружающей его окружности, но как решать задачу в области между квадратом и окружностью? Метод решения этой вспомогательной задачи должен удовлетворять нескольким требованиям: 1) он не должен вносить в решение ошибку больше, чем та, которая обусловлена погрешностью решения задачи в квадрате и реализацией УПП на внешней границе; 2) он должен быть достаточно экономичным, чтобы в результате использования УПП время расчёта уменьшилось, а не увеличилось; 3) он должен быть устойчивым при расчёте на большие времена; 4) он не должен накладывать более жёсткие ограничения на шаг по времени, чем это требует алгоритм решения задачи в квадрате.

Один из возможных путей решения вспомогательной задачи — следующий: нужно покрыть вспомогательную область между областью интереса (квадратом) и внешней границей (окружностью) нерегулярной сеткой и сконструировать для нерегулярных точек разностную схему для расчета решений волнового уравнения. Наш опыт продвижения по этому пути оказался неудачным. Мы построили нерегулярную сетку во вспомогательной области. Расстояния между расчётными точками выбирались достаточно большими, чтобы не делать ограничение на шаг по времени более жёстким, чем того требует явная разностная схема на равномерной сетке в квадрате. Чтобы компенсировать разреженность вспомогательной сетки, аппроксимация оператора Лапласа осуществлялась с третьим порядком (в квадрате использовалась центральная схема второго порядка). Аппроксимация производной по времени осуществлялась центральной разностью второго порядка аппроксимации, как и во внутренних точках квадрата. Полученная

разностная схема оказалась устойчивой на коротких временах, что позволило проверить порядок аппроксимации, но на больших временах схема оказалась неустойчивой. Попытки модифицировать разностную схему по времени, включая использование неявной схемы, замедлили рост численного решения, но не устранили долговременную неустойчивость полностью.

В настоящей работе мы предлагаем другой подход для решения вспомогательной задачи: мы используем вспомогательную область правильной формы, внешняя граница которой совпадает с искусственной границей, а внутренняя погружена в область интереса, т.е. целиком лежит внутри квадрата. Таким образом, область интереса и вспомогательная область частично перекрываются. Для согласованного решения волнового уравнения в этих областях необходимо на каждом шаге по времени интерполировать решение, полученное во внутренних точках квадратной области, на внутреннюю границу вспомогательной области, а решение, полученное во вспомогательной области, на границу квадрата.

Особенностью алгоритма расчёта волнового уравнения во вспомогательной области является использование записи волнового уравнения для коэффициентов Фурье по угловой переменной. Это позволило существенно сократить временные затраты на расчет гладких решений во вспомогательной области и упростить реализацию УПП [6].

## §1. Постановка задачи

Постановка дифференциальной задачи у нас такая же, как в работе [6]: рассматривается двумерная нестационарная задача Коши, описываемая уравнением

$$Lu = F \quad (1)$$

для которого известно, что вне некоторого квадрата  $D_0$

- I) функция  $F$  равна нулю;
- II) начальные значения

$$u|_{t=+0} = u_t|_{t=+0} = 0;$$

- III) оператор  $L$  является волновым т.е.

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

где  $c = const > 0$  — скорость распространения волн.

Вид оператора  $L$  внутри  $D_0$  несущественен:  $L$  может быть любым оператором, в том числе и нелинейным. Однако предполагаем, что решение задачи (1) существует и единственно.

Кроме того, мы предполагаем, что есть алгоритм расчёта решений задачи (1) внутри  $D_o$ , для работы которого достаточно задавать значения функции  $u$  на границе  $D_o$  на каждом временном шаге.

Требуется дополнить этот алгоритм так, не меняя его во внутренних точках  $D_o$ , чтобы решения этой начально-краевой задачи были близки к решению задачи Коши (1) в общих точках (в точках квадрата  $D_o$ ) и асимптотически к нему сходились при увеличении размерности дискретной задачи.

Заметим, что предлагаемый ниже способ построения ИГУ не предполагает квадратность области  $D_o$ . Она может быть, например, треугольником, лишь бы не слишком вытянутым, т.к. тогда круговая форма границы будет слишком невыгодной. В этом случае нужно будет строить другую вспомогательную область с гладкой границей более близкую к области интереса, а для неё аналитических формул нет, и нужно будет вычислять коэффициенты граничного оператора численно, хотя и это возможно.

Мы выбрали квадрат в качестве области интереса  $D_o$  главным образом потому, что в нашей постановке задачи предполагается наличие алгоритма для расчёта решения внутри области интереса. Проще всего такой алгоритм написать для квадратной области. Он нам нужен только для проверки работоспособности методики построения УПП.

Из соображений простоты проверки методики мы также будем предполагать, что оператор  $L$  является волновым всюду, что не влияет на предложенный нами алгоритм перехода от задачи Коши к начально-краевой задаче.

## §2. Метод решения

Для перехода от задачи Коши к начально-краевой задаче мы воспользуемся условием полной прозрачности (УПП), предложенного в [6]. С этой целью погрузим квадрат  $D_o$  в круг  $D_e$ . Границу области  $D_e$  и будем считать искусственной границей  $\Gamma$ , на которой поставим УПП [6]. Так как УПП [6] эквивалентно решению задачи вне окружности, на которой оно ставится, то мы расположим искусственную границу как можно ближе к области интереса, т.е. в качестве границы области  $D_e$  возьмем описанную окружность квадрата  $D_o$ .

Для простоты формул поместим квадрат  $D_o$  в начало координат:

$$D_o = \{(x, y) : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, y_{\min} \leq y \leq y_{\max}, y_{\max} = -y_{\min} = x_{\max} = -x_{\min} = S/2\},$$

где  $S$  — длина стороны квадрата. Тогда

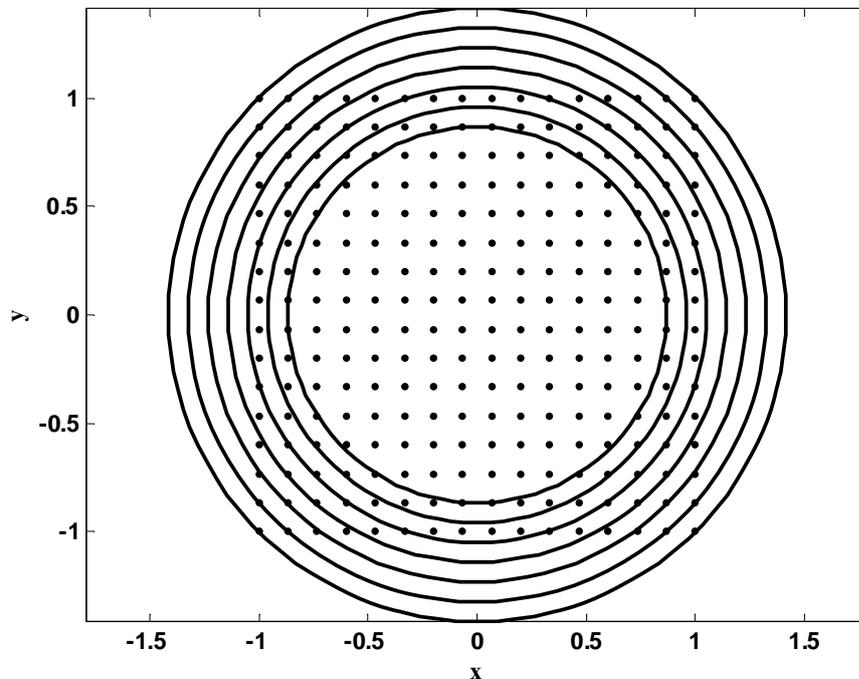
$$D_e = \left\{ (x, y) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_{\max} = S/\sqrt{2} \right\}.$$

На границе  $\Gamma$  области  $D_e$  потребуем выполнения УПП [6], которые могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c}{2r} u - \Phi^{-1} \left[ \int_0^t \hat{K}(r, t-t') \Phi[u(r, t')] dt' \right] = 0, \quad (2)$$

где  $\Phi$  — оператор преобразования Фурье,  $\hat{K}$  — ядро свёртки, которое будет конкретизировано ниже,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Для расчёта решения во вспомогательной области между  $\Gamma$  и квадратом построим кольцевую область, внешняя граница которой совпадает с  $\Gamma$ . Внутреннюю границу кольцевой области выберем так, чтобы она целиком лежала внутри квадрата. Для экономии вычислительных ресурсов эта граница должна располагаться как можно ближе к границе квадрата, но всё же отстоять от неё как минимум на один шаг сетки. Пример взаимного расположения квадрата и кольцевой области показан на рисунке **Рисунок 1**, где кольцевая область покрыта концентрическими окружностями, а точками показаны расчётные точки в квадратной области.



**Рисунок 1. Пример расположения кольцевой области относительно расчётных точек квадрата.**

Алгоритм для решения задачи в целом заключается в согласованном расчёте решений в двух перекрывающихся областях. Согласование осуществляется путем обмена информацией между областями на каждом временном шаге: решение, полученное во внутренних точках квадратной области, интерполируется на внутреннюю границу кольцевой области, а решение, полученное в кольцевой области, в то же время интерполируется на границу квадрата.

### §3. Разностная схема для внутренних точек квадрата

Для расчёта решения уравнения (1) в  $D_o$  введем равномерную расчётную сетку

$$\Omega_0 = \{(x_m, y_k) : x_m = x_{\min} + mh, y_k = y_{\min} + kh; m, k = 0, \dots, N_x; h = S / N_x\}$$

и сеточные функции  $u_{m,k}^n = u(x_m, y_k, t^n)$ , где  $t^n = n\tau$ ,  $\tau$  — величина шага по времени.

Для дискретизации уравнения (1) воспользуемся центральной разностной схемой второго порядка точности:

$$\frac{u_{m,k}^{n+1} - 2u_{m,k}^n + u_{m,k}^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \left( \frac{u_{m+1,k}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m-1,k}^n}{h^2} + \frac{u_{m,k+1}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m,k-1}^n}{h^2} \right) + F_{m,k}^n, \quad (3)$$

которую удобно записать в следующем виде:

$$u_{m,k}^{n+1} = (2 - 4q^2)u_{m,k}^n + q^2(u_{m+1,k}^n + u_{m-1,k}^n + u_{m,k+1}^n + u_{m,k-1}^n) - u_{m,k}^{n-1} + \tau^2 F_{m,k}^n, \\ m, k = 1, \dots, N_x - 1,$$

где  $q = c\tau / h$  — число куранта. Разностная схема (3) устойчива при  $q \leq 1/\sqrt{2}$ .

### §4. Расчёт решения в кольцевой области

Для решения задачи в кольцевой области

$$D_r = \{(x, y) : r_{\min} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_{\max} = S/\sqrt{2}, r_{\min} = S/2 - h\}$$

запишем уравнение (1) в полярной системе координат:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{F}{c^2}. \quad (4)$$

Сделаем преобразование Фурье уравнения (4) и будем искать решение в виде

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^M f_m^c(r, t) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^M f_m^s(r, t) \sin(m\varphi),$$

где  $f_m^c(r, t)$  и  $f_m^s(r, t)$  — амплитуды косинус- и синус-гармоник соответственно,  $M$  — номер наиболее высокочастотной гармоники, учитываемой при вычислении решения в кольце  $D_r$  (всего учитывается  $2M + 1$  гармоника). Эти амплитуды должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f_m^c}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_m^c}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} f_m^c + \frac{\hat{F}_m^c}{c^2}, \quad m = 0, 1, \dots, M; \quad (5)$$

и

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f_m^s}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_m^s}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} f_m^s + \frac{\hat{F}_m^s}{c^2}, \quad m = 1, \dots, M; \quad (6)$$

где  $\hat{F}_m^c(r, t)$  и  $\hat{F}_m^s(r, t)$  — коэффициенты Фурье правой части  $F$ .

Для того чтобы решать уравнения (5) и (6) численно, построим равномерную расчётную сетку

$$r_j = r_{\min} + h_r j, \quad j = 0, \dots, N_r, \quad (7)$$

где  $h_r = (r_{\max} - r_{\min}) / N_r$ .

Во внутренних точках сетки (7) будем использовать следующую разностную аппроксимацию уравнений (5) и (6):

$$\frac{1}{c^2} \frac{f_j^{n+1} - 2f_j^n + f_j^{n-1}}{\tau^2} = \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{h_r^2} + \frac{1}{r_j} \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2h_r} - \frac{m^2}{r_j^2} f_j^n + \frac{\hat{F}_m^n}{c^2}, \quad (8)$$

$$j = 1, \dots, N_r - 1.$$

(Здесь индексы “ $m$ ”, “ $c$ ” и “ $s$ ” опущены, т.к. разностное уравнение (8) имеет один и тот же вид для уравнений (5) и (6).) Разностному уравнению (8) соответствует следующая расчётная формула:

$$f_j^{n+1} = \left( 2 - 2q_r^2 - \tau^2 c^2 \frac{m^2}{r_j^2} \right) f_j^n - f_j^{n-1} + \left( q_r^2 + \frac{q_r^2 h_r}{2r_j} \right) f_{j+1}^n + \left( q_r^2 - \frac{q_r^2 h_r}{2r_j} \right) f_{j-1}^n + \tau^2 \hat{F}_m^n,$$

$$j = 1, \dots, N_r - 1,$$

где  $q_r = \frac{\tau c}{h_r}$ .

Разностные уравнения (8) дополняются в точке  $j = N_r$  разностной аппроксимацией УПП (2), а в точке  $j = 0$  условием Дирихле:

$$f_0^{n+1} = f_m(r_{\min}, t^{n+1}).$$

Величины  $f_m(r_{\min}, t^{n+1})$  вычисляются в конце каждого временного шага путём интерполяции численного решения во внутренних точках квадрата.

### §5. Интерполяция решения на внутреннюю границу кольцевой области

Интерполяция решения из внутренних расчётных точек квадрата на внутреннюю границу кольцевой области (граничные точки квадрата для этой цели использовать нельзя) осуществляется в два этапа.

Сначала мы интерполируем решение из внутренних точек квадрата на вспомогательные расчётные точки

$$\left\{ (x_i^{\text{int}}, y_i^{\text{int}}) : x_i^{\text{int}} = r_{\min} \cos(\varphi_i), y_i^{\text{int}} = r_{\min} \sin(\varphi_i), \varphi_i = h_\varphi i, i = 1, \dots, N_\varphi \right\} \quad (9)$$

где  $h_\varphi = 2\pi / N_\varphi$  (число вспомогательных точек  $N_\varphi$  должно быть не меньше, чем общее число коэффициентов Фурье  $2M + 1$ , и близко к количеству точек на границе квадрата  $4N_x$ ). Мы интерполируем решение в эти точки, используя бикубическую интерполяцию. Пусть мы хотим провести интерполяцию в точку  $(x_i^{\text{int}}, y_i^{\text{int}})$  из списка (9), используя следующие значения сеточной функции в  $D_o$ :

$$u_{m,k}^{n+1}, \quad m = m_{\text{int}} - 2, \dots, m_{\text{int}} + 1, \quad k = k_{\text{int}} - 2, \dots, k_{\text{int}} + 1.$$

Как правило, точка  $(x_i^{\text{int}}, y_i^{\text{int}})$  принадлежит расчётной ячейке

$$\left\{ (x, y) : x_{m_{\text{int}}-1} \leq x \leq x_{m_{\text{int}}}, y_{k_{\text{int}}-1} \leq y \leq y_{k_{\text{int}}} \right\},$$

но в окрестности границы квадрата она может принадлежать соседней ячейке. Это происходит потому, что мы не используем граничные точки квадрата для интерполяции. В любом случае точка  $(x_i^{\text{int}}, y_i^{\text{int}})$  должна принадлежать квадрату

$$\left\{ (x, y) : x_{m_{\text{int}}-2} \leq x \leq x_{m_{\text{int}}+1}, y_{k_{\text{int}}-2} \leq y \leq y_{k_{\text{int}}+1} \right\}.$$

Поэтому индексы  $m_{\text{int}}$  и  $k_{\text{int}}$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$3 \leq m_{\text{int}} \leq N_x - 2, \quad 3 \leq k_{\text{int}} \leq N_x - 2.$$

Тогда значения функций во вспомогательных точках внутренней границы кольца вычисляются по следующим формулам:

$$u_k^* = \sum_{m=m_{\text{int}}-2}^{m_{\text{int}}+1} u_{m,k}^{n+1} \prod_{\substack{p=m_{\text{int}}-2 \\ p \neq m}}^{m_{\text{int}}+1} \frac{x_i^{\text{int}} - x_p}{x_m - x_p}, \quad k = k_{\text{int}} - 2, \dots, k_{\text{int}} + 1,$$

и

$$u_i^{\text{int}} = \sum_{k=k_{\text{int}}-2}^{k_{\text{int}}+1} u_k^* \prod_{\substack{p=k_{\text{int}}-2 \\ p \neq k}}^{k_{\text{int}}+1} \frac{y_i^{\text{int}} - y_p}{y_k - y_p}.$$

Так делается для всех  $i = 1, \dots, N_\varphi$ .

На втором этапе вычисляются коэффициенты Фурье  $(f_m^c)_j^{n+1}$  и  $(f_m^s)_j^{n+1}$  для  $j = 0$ :

$$f_0^c(r_{\min}, t^{n+1}) = \frac{\pi}{N_\varphi} \sum_{i=1}^{N_\varphi} u_i^{\text{int}};$$

$$f_m^c(r_{\min}, t^{n+1}) = \frac{2\pi}{N_\varphi} \sum_{i=1}^{N_\varphi} u_i^{\text{int}} \cos(m\varphi_i), \quad m = 1, \dots, M;$$

$$f_m^s(r_{\min}, t^{n+1}) = \frac{2\pi}{N_\varphi} \sum_{i=1}^{N_\varphi} u_i^{\text{int}} \sin(m\varphi_i), \quad m = 1, \dots, M.$$

## §6. Интерполяция решения в кольце на внутреннюю границу квадрата

Для согласованного решения задачи в кольце и квадрате необходимо также в конце каждого шага по времени интерполировать решение в кольце на границу квадрата. При этом нельзя использовать значения  $(f_m^c)_j^{n+1}$  и  $(f_m^s)_j^{n+1}$  для  $j = 0$ , т.к. они вычисляются интерполяцией решения в квадратной области.

Пусть мы хотим интерполировать решение в кольце на граничную точку квадрата  $(x_m^{\text{int}}, y_k^{\text{int}})$ . Её полярные координаты вычисляются по формулам

$$r^{\text{int}} = \sqrt{(x_m^{\text{int}})^2 + (y_k^{\text{int}})^2}, \quad \varphi^{\text{int}} = \text{atan2}(y_k^{\text{int}}, x_m^{\text{int}}).$$

Тогда мы вычисляем коэффициенты Фурье при  $r = r^{\text{int}}$  с помощью кубической интерполяции, используя значения этих коэффициентов в расчётных точках  $r_j, j = j_{\text{int}} - 2, \dots, j_{\text{int}} + 1$ . Как правило, точка  $r = r^{\text{int}}$  принадлежит расчётной ячейке  $r_{j_{\text{int}}-1} \leq r \leq r_{j_{\text{int}}}$ , но в окрестности границ она может принадлежать соседнему интервалу. В любом случае она должна принадлежать интервалу  $r_{j_{\text{int}}-2} \leq r \leq r_{j_{\text{int}}+1}$ . Индекс  $j_{\text{int}}$  должен удовлетворять следующим условиям:

$$3 \leq j_{\text{int}} \leq N_r - 1.$$

Тогда

$$(f_m^\alpha)^{\text{int}} = \sum_{j=j_{\text{int}}-2}^{j_{\text{int}}+1} (f_m^\alpha)^j \prod_{\substack{p=j_{\text{int}}-2 \\ p \neq j}}^{j_{\text{int}}+1} \frac{r^{\text{int}} - r_p}{r_j - r_p}, \quad m = 0, \dots, M; \quad \alpha = c, s;$$

и

$$u_{m,k}^{n+1} = \sum_{m=0}^M (f_m^c)^{\text{int}} \cos(m\varphi^{\text{int}}) + \sum_{m=1}^M (f_m^s)^{\text{int}} \sin(m\varphi^{\text{int}}).$$

### §7. УПП на внешней границе кольцевой области

На внешней границе кольцевой области мы ставим условие полной прозрачности (2) (см. [6]), которое в пространстве коэффициентов Фурье может быть записано следующим образом:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f_m}{\partial t} + \frac{\partial f_m}{\partial r} + \frac{1}{2r} f_m - \sum_{l=1}^{L_m} \alpha_{m,l} \int_0^t e^{\beta_{m,l}(t-t')} f_m(t') dt' = 0, \quad m = -M, \dots, M \quad (10)$$

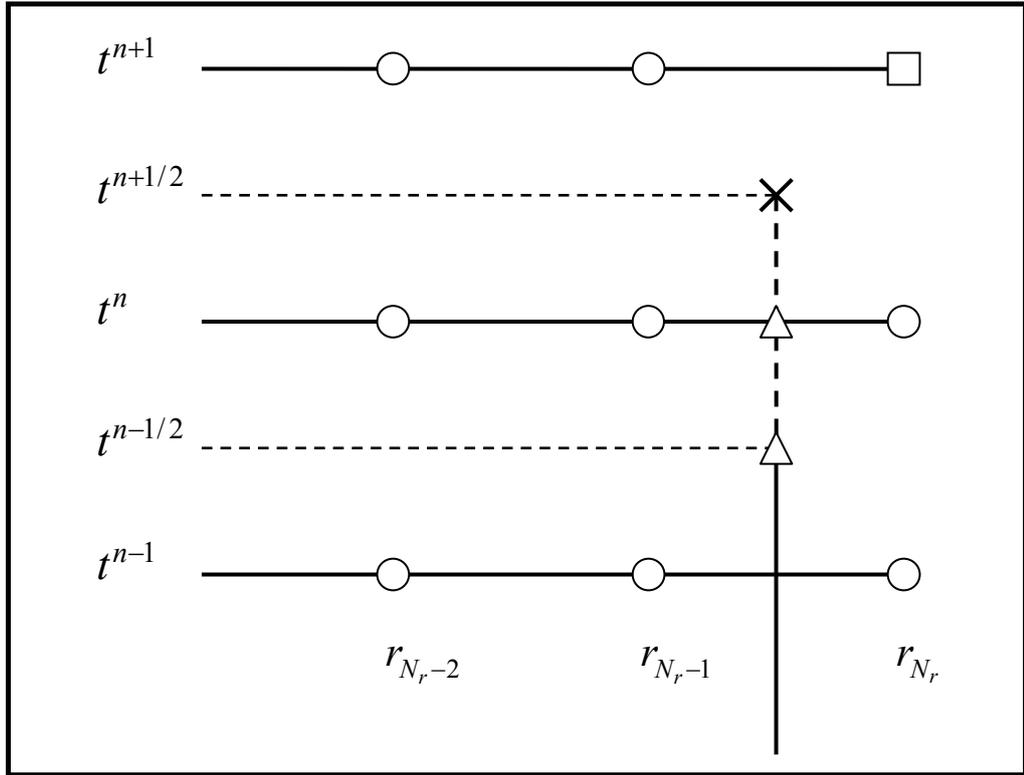
где

$$\begin{aligned} f_m &= f_m^c, & m &= 0, \dots, M; \\ f_{-m} &= f_m^s, & m &= 1, \dots, M; \end{aligned}$$

$\alpha_{m,l}$  и  $\beta_{m,l}$  — вычисленные заранее коэффициенты оператора УПП (см. [6]),  $L_m$  — количество слагаемых в ядре свёртки для  $m$ -той гармоники.

После расчёта новых значений решения на очередном шаге по времени во внутренних точках сетки (7) мы знаем его в точках, показанных на рисунке **Рисунок 2** кружками. Необходимо вычислить значение решения на новом временном слое на границе в точке, изображенной на рисунке квадратиком. Для этого мы воспользуемся разностной аппроксимацией второго порядка точности УПП (10) в полуцелой точке, изображённой на рисунке крестиком. Первые три слагаемые в (10) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &\approx \frac{f_{N_r}^{n+1} - f_{N_r}^n + f_{N_r-1}^{n+1} - f_{N_r-1}^n}{2\tau}, \\ \frac{\partial f}{\partial r} &\approx \frac{f_{N_r}^{n+1} - f_{N_r-1}^{n+1} + f_{N_r}^n - f_{N_r-1}^n}{2h_r}, \\ f &\approx \frac{f_{N_r}^{n+1} + f_{N_r-1}^{n+1} + f_{N_r}^n + f_{N_r-1}^n}{4}. \end{aligned}$$



**Рисунок 2. Расчётные точки в окрестности внешней границы**

Последнее слагаемое в (10) можно разбить на две части:

$$\begin{aligned}
 I_{m,l}^{n+1/2} &\equiv \int_0^{t^{n+1/2}} e^{\beta_{m,l}(t^{n+1/2}-t')} f_m(t') dt' \\
 &= \int_0^{t^{n-1/2}} e^{\beta_{m,l}(t^{n+1/2}-t')} f_m(t') dt' + \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} e^{\beta_{m,l}(t^{n+1/2}-t')} f_m(t') dt' \\
 &= e^{\beta_{m,l} \tau} I_{m,l}^{n-1/2} + \int_{t^{n-1/2}}^{t^{n+1/2}} e^{\beta_{m,l}(t^{n+1/2}-t')} f_m(t') dt'.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Формула (11) позволяет не вычислять свёрточный интеграл на каждом временном шаге от самого начала расчёта, а использовать полученное на предыдущем шаге значение. Остаётся вычислить интеграл только на отрезке  $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$ . Для приближённого вычисления этого интеграла мы используем формулу Симпсона (которая использует значения функции в точках, помеченных на рисунке треугольниками):

$$\int_{t^{n-\frac{1}{2}}}^{t^{n+\frac{1}{2}}} e^{\beta_{m,l} \left( t^{\frac{n+1}{2}-t'} \right)} f_m(t') dt' \approx \Delta I_{m,l} = c_{-0.5} (f_m)_{N_r-1/2}^{n-1/2} + c_0 (f_m)_{N_r-1/2}^n + c_{0.5} (f_m)_{N_r-1/2}^{n+1/2},$$

где

$$c_{-0.5} = \frac{\tau}{6} \exp(\beta_{m,l} \tau), \quad c_0 = \frac{2\tau}{3} \exp(\beta_{m,l} \tau / 2), \quad c_{0.5} = \frac{\tau}{6}. \quad (12)$$

Если для каких-нибудь значений коэффициентов  $m$  и  $l$   $|\beta_{m,l} \tau| > \varepsilon$ , то коэффициенты (12) должны быть изменены с учётом имеющейся информации о наличии в подынтегральной функции быстро меняющегося экспоненциального множителя:

$$\begin{aligned} c_{-0.5} &= \left[ e^{\beta_{m,l} \tau} (4 + \beta_{m,l}^2 \tau^2 - 3\beta_{m,l} \tau) - \beta_{m,l} \tau - 4 \right] / (\tau^2 \beta_{m,l}^3), \\ c_0 &= 4 \left[ e^{\beta_{m,l} \tau} (\beta_{m,l} \tau - 2) + \beta_{m,l} \tau + 2 \right] / (\tau^2 \beta_{m,l}^3), \\ c_{0.5} &= \left[ e^{\beta_{m,l} \tau} (4 - \beta_{m,l} \tau) - 4 - 3\beta_{m,l} \tau - \beta_{m,l}^2 \tau^2 \right] / (\tau^2 \beta_{m,l}^3). \end{aligned} \quad (13)$$

Значение параметра  $\varepsilon \sim 0.5$ .

Вспомогательные значения функций в полуцелых точках  $(f_m)_{N_r-1/2}^{n-1/2}$ ,  $(f_m)_{N_r-1/2}^n$  и  $(f_m)_{N_r-1/2}^{n+1/2}$  вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} f_{-0.5}^m &= \left( (f_m)_{N_r-1}^n + (f_m)_{N_r}^{n-1} \right) / 2, \\ f_0^m &= \left( (f_m)_{N_r-1}^n + (f_m)_{N_r}^n \right) / 2, \\ f_{0.5}^m &= \left( (f_m)_{N_r-1}^{n+1} + (f_m)_{N_r}^n \right) / 2. \end{aligned}$$

Окончательно вычисление свёрточных интегралов в (10) осуществляется по следующей формуле:

$$I_{m,l}^{n+1/2} = e^{\beta_{m,l} \tau} I_{m,l}^{n-1/2} + \Delta I_{m,l}, \quad l = 1, \dots, L_m; \quad m = -M, \dots, M.$$

После этого вычисляется значение решения на новом временном слое на границе:

$$(f_m)_{N_r}^{n+1} = \left( \frac{1}{2c\tau} + \frac{1}{2rh_r} + \frac{1}{8r} \right)^{-1} R_m, \quad m = -M, \dots, M,$$

где

$$\begin{aligned} R_m &= \sum_{l=1}^{L_m} \alpha_{m,l} I_{m,l}^{n+1/2} - \frac{-(f_m)_{N_r}^n + (f_m)_{N_r-1}^{n+1} - (f_m)_{N_r-1}^n}{2c\tau} \\ &\quad - \frac{-(f_m)_{N_r-1}^{n+1} + (f_m)_{N_r}^n - (f_m)_{N_r-1}^n}{2rh_r} - \frac{(f_m)_{N_r-1}^{n+1} + (f_m)_{N_r}^n + (f_m)_{N_r-1}^n}{8r}. \end{aligned}$$

## §8. Численные эксперименты

Для проверки работоспособности алгоритма были проведены расчёты следующей задачи:

сторона квадрата  $S = 2$  ;

скорость распространения волн  $c = 2$  ;

правая часть в (1)

$$F(x, y, t) = \exp\left\{-50\left[(x - 0.1)^2 + (y - 0.1)^2\right]\right\} \exp\left[\kappa\left(\frac{t}{t_0} - 1\right)^2\right],$$

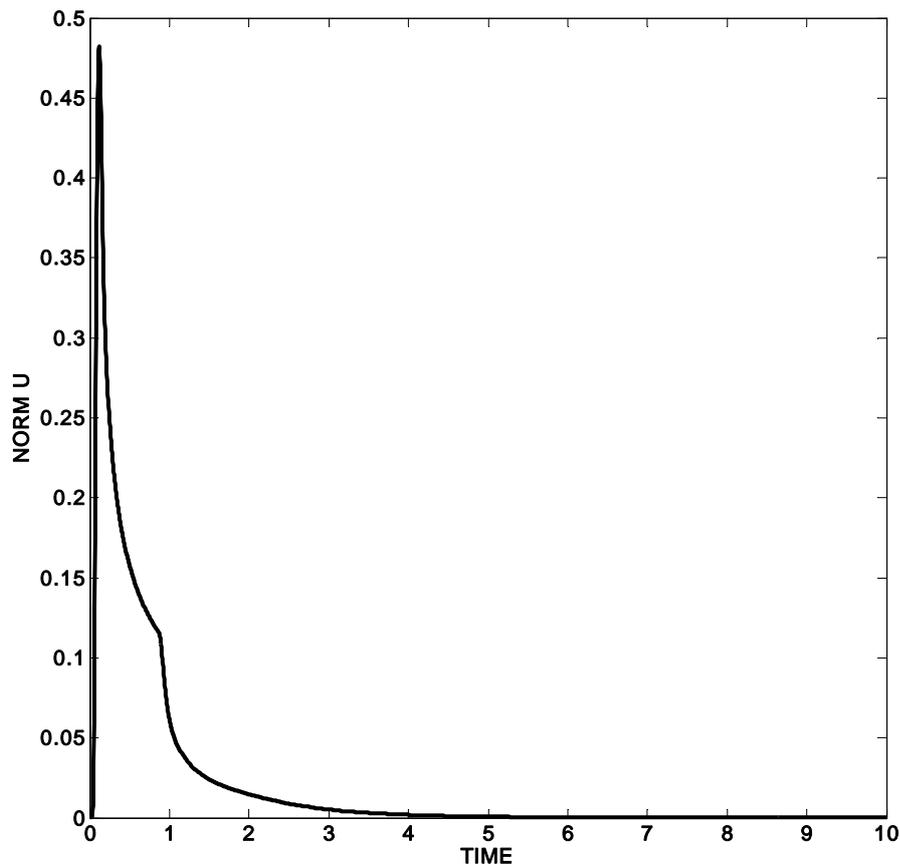
где  $t_0 = 0.05$ ,  $\kappa = -12$ .

### 1. Устойчивость на больших временах.

Для проверки устойчивости алгоритма и возможности его использования для проведения длительных расчётов (когда возмущение успевает много раз пройти через всю расчётную область), был проведен расчёт до  $t = 10$  со следующими параметрами:

$$N_x = 80, \quad N_r = 32, \quad M = 12, \quad N_\varphi = 64.$$

Зависимость нормы решения в квадрате от времени показана на рисунке **Рисунок 3**. Видно, что численное решение устойчиво.



**Рисунок 3.** Зависимость максимума модуля решения во внутренних точках квадрата от времени

## 2. Выход возмущения из расчётной области.

На следующих рисунках показаны изолинии решения в различные моменты времени. У аналитического решения этой задачи изолинии являются концентрическими окружностями с центром в точке  $(x = 0.1, y = 0.1)$ . Видно, что это свойство сохраняется в численном решении с хорошей точностью, т.е. возмущение выходит из расчётной области практически не отражаясь (и это искажение может быть уменьшено: в 4 раза после каждого удвоения сетки, см. ниже):

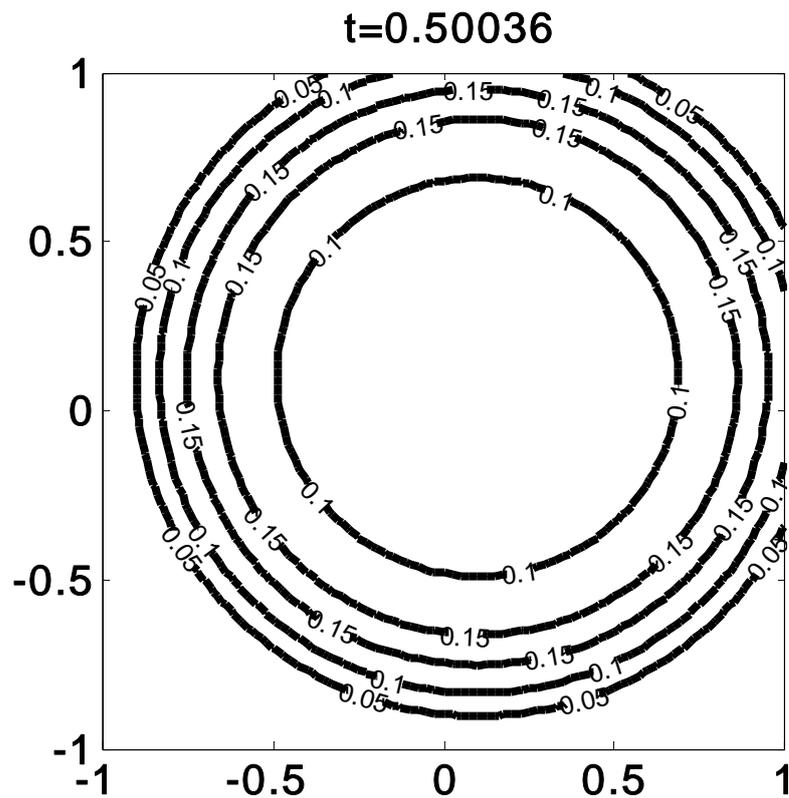
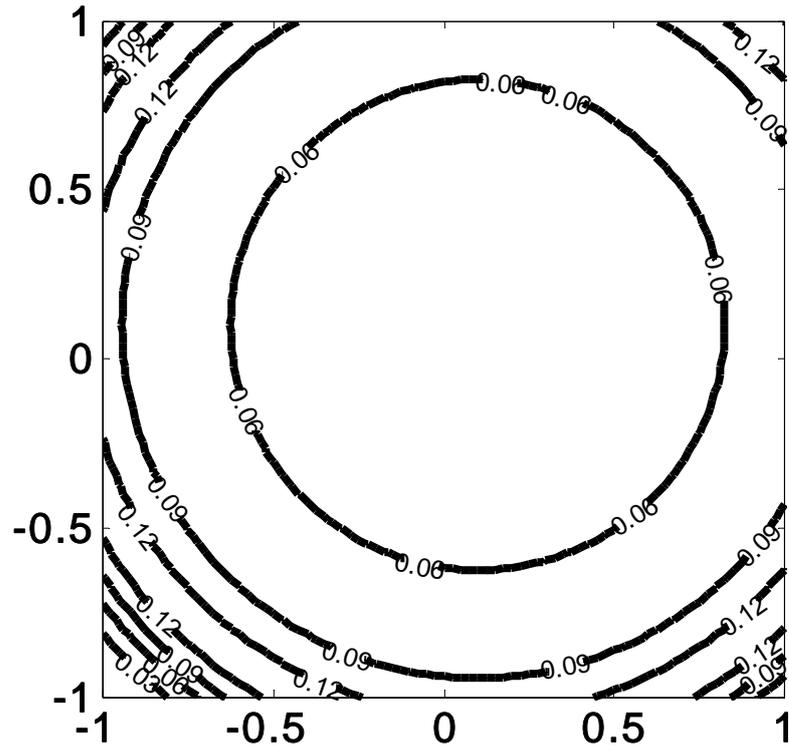
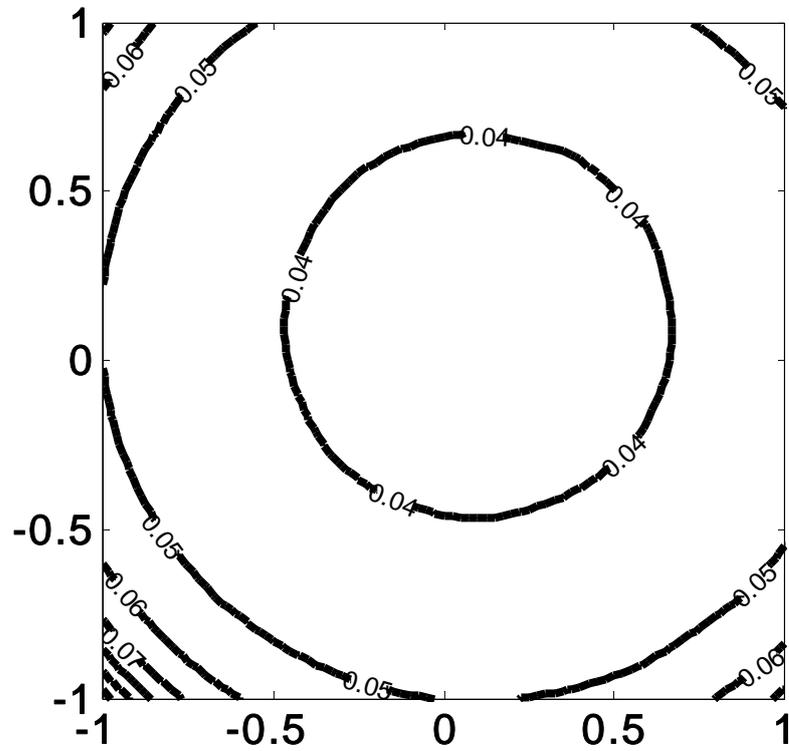


Рисунок 4. Изолинии решения с УПП при  $t=0.5$

$t=0.70135$ Рисунок 5. Изолинии решения с УПП при  $t=0.7$  $t=0.90235$ Рисунок 6. Изолинии решения с УПП при  $t=0.9$

t=1.0007

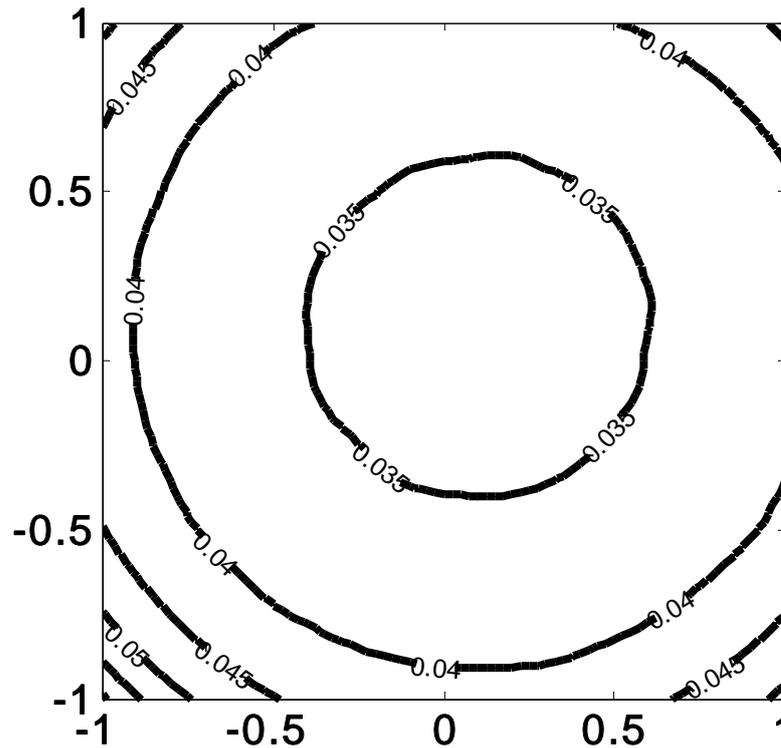


Рисунок 7. Изолинии решения с УПП при t=1

### 3. Скорость сходимости решения с УПП к аналитическому.

Для проверки скорости сходимости решения в квадрате с предложенной постановкой УПП была проведена серия расчётов той же задачи, параметры которых приведены в следующей таблице:

Таблица 1. Параметры дискретизации задачи с УПП

$N_x$	M	$N_\varphi$	$N_r$
20	5	16	8
40	8	32	16
80	12	64	32
160	17	128	64

Одновременно с расчётами в маленькой области с УПП на внешней границе (радиус внешней границы равен 1.539) проводились расчёты в «большой» области, границы которой брались так далеко, чтобы отражение решения от них не успевало дойти до области интереса (квадрата  $D_o$ ) за время расчёта. Мы в качестве большой области использовали квадрат со стороной 4, центр которого совпадал с центром  $D_o$ . Этого вполне достаточно для расчётов до  $t=1$ . Расчёты в большом квадрате проводились на равномерной сетке,

узлы которой совпадают с расчётными узлами квадрата  $D_o$ . Использовалась та же центрально-разностная схема второго порядка аппроксимации (3), что и для расчёта во внутренних точках квадрата  $D_o$ . На границе большого квадрата ставились нулевые граничные условия, которые согласованы с начальными данными. Полученное таким образом численное решение мы обозначили  $u^{ref}$ , имея в виду, что это именно то «идеальное» решение, которое можно численно на данной расчётной сетке (по данной разностной схеме).

В процессе каждого расчёта вычислялся максимум модуля разности между решением с УПП (проводимого для  $N_x \times N_x + 2M \times N_r$  точек) и решением в большом квадрате (проводимого для  $2N_x \times 2N_x$  точек) по всем расчетным точкам квадрата  $D_o$  и по всем шагам по времени до  $t = 1$ .

Заметим, что с увеличением времени расчёта размер «большого» квадрата необходимо увеличивать. Так для проведения расчёта до  $t = 10$  пришлось бы брать квадрат со стороной 22 и использовать сетку с  $11N_x \times 11N_x$  точками.

**Таблица 2. Отличие решения с УПП от решения в неограниченной области**

$N_x$	$h$	$\delta(N_x) = \ u_h - u_h^{ref}\ _C$	$\delta(N_x) / \delta(N_x / 2)$
20	0.1	0.0661	-----
40	0.05	0.0115	5.74
80	0.025	0.00240	4.79
160	0.0125	0.000577	4.15

В таблице **Таблица 2** приведены максимумы модулей разности решений с УПП  $u_h$  и  $u_h^{ref}$  и отношения этих норм разностей к тем же нормам на сетке с удвоенным шагом. Теоретически для методов второго порядка точности это отношение должно стремиться к 4 при мельчении сетки:

$$\frac{\|u_{2h} - u_{2h}^{ref}\|}{\|u_h - u_h^{ref}\|} \rightarrow 4, \quad h \rightarrow 0.$$

Из данных в **Таблица 2** видно, что указанное выше отношение стремится к теоретическому пределу при мельчении сетки, а решение с УПП стремится к решению задачи Коши.

Таким образом, предложенный алгоритм постановки искусственных граничных условий полной прозрачности является устойчивым, экономичным и не ухудшает скорость сходимости численного решения к аналитическому.

**Список Литературы**

- [1] Рябенский В.С. Точный перенос разностных краевых условий. Функц. анализ и его приложения, т.24, в.3, 1990, с.90-91.
- [2] Рябенский В.С. Точный перенос краевых условий. Вычислит. механика твердого тела, 1990, с.129-145.
- [3] Ryaben'kii V.S. Nonreflecting time dependent boundary conditions on artificial boundaries of varying location and shape. Applied Numerical Mathematics, V.33, 2000, p.481-492.
- [4] В. С. Рябенский, В. И. Турчанинов, “Спектральный подход к построению неотражающих искусственных граничных условий”, *Матем. моделирование*, **13**:11 (2001), 23–47.
- [5] Рябенский В.С. Метод разностных потенциалов и его приложения. Физматлит, 2002, с.1-492.
- [6] И. Л. Софронов, Условия полной прозрачности для волнового уравнения. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, №76, 1993.
- [7] И. Л. Софронов, Прозрачные условия на переднем и заднем сечениях аэродинамической трубы для задачи нестационарного дозвукового обтекания. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, №81, 1994.
- [8] Н. А. Зайцев, И. Л. Софронов, “Применение прозрачных граничных условий для решения двумерных задач упругости с азимутальной анизотропией”, *Матем. моделирование*, **19**:8 (2007), 49–54.
- [9] И. Л. Софронов, “О применении прозрачных граничных условий в задачах аэроакустики”, *Матем. моделирование*, **19**:8 (2007), 105–112.
- [10] I. L. Sofronov, N. A. Zaitsev, Transparent boundary conditions for the elastic waves in anisotropic media, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Eds. Benzoni-Gavage, Serre. Springer Verlag, p. 997-1004 (2008).