ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 55 за 2009 г.

Мирер С.А.

О некоторых экстремальных соотношениях между элементами тензора инерции твердого тела

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Мирер С.А. О некоторых экстремальных соотношениях между элементами тензора инерции твердого тела // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 55. 14 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-55

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

С.А. Мирер

О некоторых экстремальных соотношениях между элементами тензора инерции твердого тела

Москва - 2009

С.А. Мирер. О некоторых экстремальных соотношениях между элементами тензора инерции твердого тела. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2009, 14 страниц, 1 рисунок, библиография: 4 наименования.

В работе показано, что в ходе рассмотрения конкретной механической задачи об оптимальном демпфировании угловой скорости космического аппарата возникает необходимость анализа специфических функций элементов тензора инерции твердого тела. При этом доказаны некоторые общие экстремальные соотношения. В частности, оказалось, что произведение моментов инерции тела относительно трех ортогональных осей минимально, когда эти оси являются главными центральными осями инерции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Программы поддержки Ведущих научных школ России.

Ключевые слова: твердое тело, тензор инерции.

S.A. Mirer. On some extremal relations between inertia tensor elements of a rigid body. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2009, 14 Pages, 1 Figure, 4 References.

It is shown that in course of specific mechanical problem consideration, namely, optimal damping of a spacecraft attitude motion, we need to analyze certain functions of inertia tensor elements of a rigid body. As a result, some general extremal relations were proved. In particular, the product of three inertia moment relative three orthogonal axes is minimal in the case, when these axes are central principal axes of inertia of a rigid body.

The work is carried out under support of the Russian Foundation for Basic Research and the Program for support of Leading scientific schools of Russia.

Key words: rigid body, tensor of inertia.

1. Задача о модельном демпфировании

Рассматривается задача оптимального гашения малой угловой скорости твердого тела. По трем произвольно ориентированным в теле осям установлены устройства, вырабатывающие управляющие моменты, пропорциональные проекциям угловой скорости тела на эти оси. Подобная система рассматривалась в [1], где такой тип демпфирования назван модельным.

Движение тела относительно его центра масс описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{M} = \mathsf{M}_1\mathbf{e}_1 + \mathsf{M}_2\mathbf{e}_2 + \mathsf{M}_3\mathbf{e}_3 .$$

Здесь $\mathbf{K}$ - кинетический момент тела, $\mathbf{M}$ - управляющий момент, $\mathbf{I}$ - тензор инерции тела, $\boldsymbol{\omega}$ - его угловая скорость; $\mathbf{e}_i$ и M_i - орты осей управления и соответствующие управляющие моменты (*i=1, 2, 3*), причем

$$\mathsf{M}_i = -k_i\left(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i\right),$$

k_i - постоянные коэффициенты усиления моментных устройств. Тогда получаем

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = -\sum_{i=1}^{3} k_i\left(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i\right)\mathbf{e}_i \tag{1.1}$$

или, проектируя векторное уравнение (1.1) на главные центральные оси инерции тела,

$$\begin{aligned}
&I_1\dot{\omega}_1 + \left(I_3 - I_2\right)\omega_2\omega_3 + \sum_{i=1}^{3} k_i\left(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i\right)\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_1\right) = 0,\\
&I_2\dot{\omega}_2 + \left(I_1 - I_3\right)\omega_3\omega_1 + \sum_{i=1}^{3} k_i\left(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i\right)\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_2\right) = 0,\\
&I_3\dot{\omega}_3 + \left(I_2 - I_1\right)\omega_1\omega_2 + \sum_{i=1}^{3} k_i\left(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_i\right)\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_3\right) = 0.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь ω_i - проекции угловой скорости тела на его главные центральные оси инерции; тензор инерции в этих осях имеет диагональный вид $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\left(I_1, I_2, I_3\right)$; $\mathbf{E}_i$ - орты главных центральных осей инерции тела. Обозначим $\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_j\right) = a_{ij}$, тогда

$$M_i = (\mathbf{M}, \mathbf{E}_i) = -\sum_{j=1}^{3} k_j (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_j, \mathbf{E}_i) = -\sum_{j=1}^{3} k_j \left(\sum_{s=1}^{3} \omega_s a_{js} \right) a_{ji} =$$

$$= -\sum_{s=1}^{3} \omega_s \sum_{j=1}^{3} \omega_s k_j a_{js} a_{ji} = -\sum_{s=1}^{3} m_{is} \omega_s ,$$

где

$$m_{is} = \sum_{j=1}^{3} k_j a_{js} a_{ji} .$$

Таким образом, $\mathbf{M} = -\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}$, причем матрица $\mathbf{m}$ симметричная.

Известно, что любая симметричная матрица может быть представлена в виде $\mathbf{m} = \mathbf{S}^T \mathbf{B} \mathbf{S}$, где $\mathbf{S}$ - ортогональная матрица,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Поэтому систему, в которой моментные устройства установлены по трем произвольным осям, всегда можно свести к системе, в которой эти оси являются взаимно перпендикулярными. В дальнейшем считаем, что орты $\mathbf{e}_i$ образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Тогда

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \mathbf{A} ,$$

где $\mathbf{A}$ - ортогональная матрица.

Система уравнений (1.2) имеет тривиальное решение

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 ,$$

соответствующее невращающемуся телу. Для того, чтобы такое движение можно было использовать в качестве рабочего режима, необходимо не только гарантировать его асимптотическую устойчивость, но и выбрать значения параметров системы, при которых обеспечивается достаточно высокая скорость демпфирования собственных колебаний. Для оценки скорости демпфирования часто используется величина степени устойчивости ξ - взятая с обратным знаком действительная часть ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения линеаризованной системы [2]. Параметры, при которых реализуется максимальная степень устойчивости, называются оптимальными.

Линеаризуя (1.2) в окрестности решения $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, получим систему

$$
\begin{aligned}
&I_1\dot{\omega}_1 + m_{11}\omega_1 + m_{12}\omega_2 + m_{13}\omega_3 = 0,\\
&I_2\dot{\omega}_2 + m_{21}\omega_1 + m_{22}\omega_2 + m_{23}\omega_3 = 0,\\
&I_3\dot{\omega}_3 + m_{31}\omega_1 + m_{32}\omega_2 + m_{33}\omega_3 = 0,
\end{aligned}
$$

характеристическое уравнение которой имеет вид

$$
\begin{aligned}
&I_1I_2I_3p^3 + \left(I_1I_2m_{33} + I_2I_3m_{11} + I_3I_1m_{22}\right)p^2 +\\
&\quad + \left[I_1\left(m_{22}m_{33} - m_{23}^2\right) + I_2\left(m_{33}m_{11} - m_{31}^2\right) + I_3\left(m_{11}m_{22} - m_{12}^2\right)\right]p +\\
&\quad + \left(m_{11}m_{22}m_{33} + 2m_{12}m_{13}m_{23} - m_{11}m_{23}^2 - m_{22}m_{31}^2 - m_{33}m_{12}^2\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Подставляя m_{ij} и учитывая ортогональность матрицы $\mathbf{A}$, получаем

$$
\begin{aligned}
&I_1I_2I_3p^3 + \Big[k_1\left(I_2I_3a_{11}^2 + I_3I_1a_{12}^2 + I_1I_2a_{13}^2\right) +\\
&\qquad + k_2\left(I_2I_3a_{21}^2 + I_3I_1a_{22}^2 + I_1I_2a_{23}^2\right) +\\
&\qquad + k_3\left(I_2I_3a_{31}^2 + I_3I_1a_{32}^2 + I_1I_2a_{33}^2\right)\Big]p^2 +\\
&\qquad + \Big[k_1k_2\left(I_1a_{31}^2 + I_2a_{32}^2 + I_3a_{33}^2\right) + k_2k_3\left(I_1a_{11}^2 + I_2a_{12}^2 + I_3a_{13}^2\right) +\\
&\qquad + k_3k_1\left(I_1a_{21}^2 + I_2a_{22}^2 + I_3a_{23}^2\right)\Big]p + k_1k_2k_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&J_i = I_1a_{i1}^2 + I_2a_{i2}^2 + I_3a_{i3}^2,\\
&L_i = I_2I_3a_{i1}^2 + I_3I_1a_{i2}^2 + I_1I_2a_{i3}^2, \qquad (i = 1, 2, 3)\\
&\overline{k}_i = k_i / J_i .
\end{aligned}
$$

Тогда уравнение (1.3) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&I_1I_2I_3p^3 + \left(\overline{k}_1J_1L_1 + \overline{k}_2J_2L_2 + \overline{k}_3J_3L_3\right)p^2 +\\
&\qquad + \left(\overline{k}_1\overline{k}_2 + \overline{k}_2\overline{k}_3 + \overline{k}_3\overline{k}_1\right)J_1J_2J_3p + \overline{k}_1\overline{k}_2\overline{k}_3J_1J_2J_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Величина J_i представляет собой момент инерции тела относительно оси $\mathbf{e}_i$, т.е. характеризует меру инертности тела при воздействии на него управляющего момента по этой оси. Отсюда ясно, что чем больше J_i, тем больше должен быть и соответствующий момент M_i.

Пусть коэффициенты усиления моментных устройств выбраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{k_1}{J_1} = \frac{k_2}{J_2} = \frac{k_3}{J_3},$$

т.е. $\overline{k_1} = \overline{k_2} = \overline{k_2} = k$. Тогда уравнение (1.4) принимает окончательный вид

$$I_1 I_2 I_3 p^3 + k\left(J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3\right) p^2 + \left(3p + k\right) k^2 J_1 J_2 J_3 = 0. \qquad (1.5)$$

При поиске оптимальных параметров целого ряда пассивных и полупассивных систем ориентации спутников наблюдается тенденция выравнивания действительных частей корней характеристического уравнения при приближении к экстремуму степени устойчивости.

Предположим, максимальная степень устойчивости уравнения (1.5) достигается при таких значениях параметров, когда все корни действительны и равны между собой. Подобная ситуация имеет место, например, в задаче о быстродействии системы спутник-стабилизатор [3, 4]. Тогда должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} 3\xi I_1 I_2 I_3 &= k\left(J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3\right), \\ 3\xi^2 I_1 I_2 I_3 &= 3k^2 J_1 J_2 J_3, \\ \xi^3 I_1 I_2 I_3 &= k^3 J_1 J_2 J_3, \end{aligned}$$

откуда

$$J_1 J_2 J_3 = I_1 I_2 I_3, \qquad (1.6)$$

$$J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3 = 3 I_1 I_2 I_3, \qquad (1.7)$$

$$k = \xi. \qquad (1.8)$$

Из (1.8) следует, что коэффициент усиления k надо брать как можно больше. Что касается (1.6) и (1.7), то можно доказать, что эти равенства имеют место только в случае параллельности осей демпфирования и главных центральных осей инерции тела (при этом порядок соответствия осей несущественен).

Как видно, при рассмотрении конкретной прикладной задачи возникает необходимость в анализе специфических функций элементов тензора инерции твердого тела, а именно, $J_1 J_2 J_3$ и $J_1 L_1 + J_2 L_2 + J_3 L_3$. По результатам такого анализа, удалось, абстрагируясь от исходной задачи, доказать некоторые экстремальные соотношения между элементами тензора инерции произвольного твердого тела.

2. Экстремальные соотношения между элементами тензора инерции твердого тела

Рассмотрим твердое тело с главными центральными моментами инерции I_1, I_2, I_3 . Определим две связанные с телом правые прямоугольные системы координат:

$Ox_1x_2x_3$ - система координат с осями вдоль главных центральных осей инерции тела;

$Oy_1y_2y_3$ - система координат, ориентация которой относительно $Ox_1x_2x_3$ определяется ортогональной матрицей $\mathbf{A} = \left\| a_{ij} \right\|$; ее элементы являются направляющими косинусами между соответствующими осями, т.е.

$$a_{ij} = \cos\left(Oy_i, Ox_j\right).$$

Известно, что момент инерции тела относительно оси Oy_i имеет вид

$$J_i = \sum_{k=1}^{3} I_k a_{ik}^2 .$$

Теорема:

Для любого твердого тела выполняются следующие неравенства

$$I_1 I_2 I_3 \le J_1 J_2 J_3 \le \left(\frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} \right)^3, \tag{2.1}$$

причем правое равенство достигается только при коллинеарности осей Ox_i *и* Oy_j *(порядок соответствия осей значения не имеет), а левое равенство имеет место при* $J_1 = J_2 = J_3$.

Доказательство:

1°. Сначала докажем правую часть (2.1), т.е. неравенство

$$J_1 J_2 J_3 \le \left(\frac{I_1 + I_2 + I_3}{3} \right)^3 .$$

Обозначим $f = J_1 J_2 J_3$, $c = \left(I_1 + I_2 + I_3\right)/3$. С учетом очевидного соотношения

$$J_1 + J_2 + J_3 = I_1 + I_2 + I_3 = 3c$$

имеем

$$f = J_2 \cdot \frac{1}{4}\left[\left(J_1 + J_3\right)^2 - \left(J_1 - J_3\right)^2\right] \le \frac{1}{4} J_2 \left(3c - J_2\right)^2, \tag{2.2}$$

причем равенство в (2.2) достигается при $J_1 = J_3$.

Теперь рассмотрим

$$f_1\left(J_2\right) = \frac{1}{4} J_2 \left(3c - J_2\right)^2.$$

Заметим, что функция f_1 определена на отрезке $\left[0, 3c/2\right]$. В самом деле, рассмотрим «неравенства треугольника» для главных центральных моментов инерции тела

$$I_2 + I_3 \ge I_1, \quad I_3 + I_1 \ge I_2, \quad I_1 + I_2 \ge I_3$$

или эквивалентные им неравенства

$$I_1 + I_2 + I_3 \ge 2I_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Умножая (2.3) на a_{2i}^2 и складывая, получим

$$3c\left(a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2\right) \ge 2J_2$$

или, учитывая, что для ортогональной матрицы $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1$,

$$J_2 \le \frac{3}{2} c.$$

Принимая во внимание область определения функции f_1 и соотношения

$$\frac{df_1}{dJ_2} = \frac{3}{4}\left(3c - J_2\right)\left(c - J_2\right), \qquad \frac{d^2 f_1}{dJ_2^2} = \frac{3}{2}\left(J_2 - 2c\right),$$

приходим к выводу, что $\max f_1$ имеет место при $J_2 = c$. Таким образом, окончательно получаем $\max f = c^3$, причем это значение достигается при $J_1 = J_2 = J_3 = c$.

Покажем, что найденный максимум действительно достигается. Иными словами, докажем, что всегда можно так подобрать элементы матрицы a_{ij}, что будут справедливы условия

$$J_i = \sum_{k=1}^{3} I_k a_{ik}^2 = c, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

причем достаточно потребовать выполнения только двух из трех условий (2.4), например,

$$J_1 = I_1 a_{11}^2 + I_2 a_{12}^2 + I_3 a_{13}^2 = c\,, \tag{2.5}$$

$$J_2 = I_1 a_{21}^2 + I_2 a_{22}^2 + I_3 a_{23}^2 = c\,. \tag{2.6}$$

Заметим, что входящие в (2.5), (2.6) элементы матрицы $\mathbf{A}$ должны удовлетворять также условиям ортогональности

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \\ &a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \\ &a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Разрешая систему (2.5)-(2.7) относительно a_{ij}, мы, вообще говоря, должны получить однопараметрическое семейство. Не останавливаясь на получении этого семейства, ограничимся лишь тем, что покажем существование хотя бы одного решения.

Положение системы координат $Oy_1y_2y_3$ относительно $Ox_1x_2x_3$, а следовательно, и матрицу $\mathbf{A}$, можно определить тремя углами, например, самолетными углами тангажа α, рыскания β и крена γ (Рис. 1).

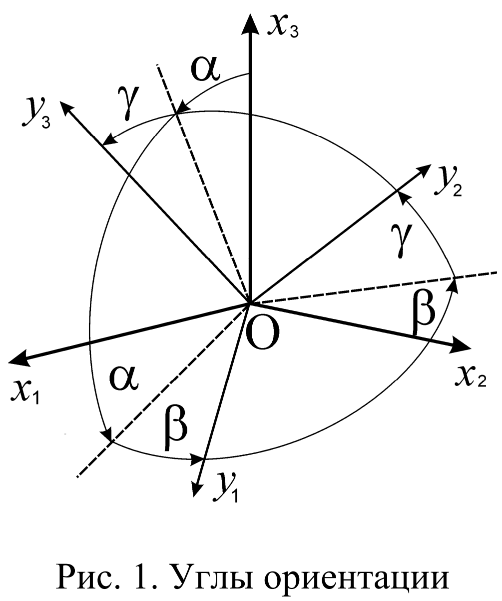

Рис. 1. Углы ориентации

Тогда условия ортогональности (2.7) выполняются автоматически. Уравнение (2.6) удовлетворяется, например, при

$$a_{21}^2 = a_{22}^2 = a_{23}^2 = 1/3$$

или, принимая во внимание выражения для направляющих косинусов a_{ij} через самолетные углы

$$a_{11} = \cos\alpha\cos\beta,$$
$$a_{12} = \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma,$$
$$a_{13} = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$
$$a_{21} = \sin\beta,$$
$$a_{22} = \cos\beta\cos\gamma,$$
$$a_{23} = -\cos\beta\sin\gamma,$$
$$a_{31} = -\sin\alpha\cos\beta,$$
$$a_{32} = \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,$$
$$a_{33} = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

при $\sin^2\beta = 1/3$, $\sin^2\gamma = 1/2$.

Пусть для определенности

$$\sin\beta = 1\big/\sqrt{3}, \quad \sin\gamma = 1\big/\sqrt{2}, \quad \cos\gamma = 1\big/\sqrt{2}.$$

Тогда

$$a_{11}^2 = \frac{1}{3}\left(1 + \cos 2\alpha\right),$$
$$a_{12}^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right), \tag{2.8}$$
$$a_{13}^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right).$$

Подставляя (2.8) в (2.5), получаем

$$c + \frac{1}{3}\left(I_1 - \frac{I_2 + I_3}{2}\right)\cos 2\alpha - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(I_2 - I_3\right)\sin 2\alpha = c,$$

откуда

$$\mathrm{tg}2\alpha = \sqrt{3}\,\frac{I_1 - c}{I_2 - I_3}. \tag{2.9}$$

Заметим, что выражение (2.9) теряет смысл при $I_2 = I_3$. Однако, в этом случае $\cos 2\alpha = 0$, откуда, в частности, $\alpha = \pi/4$.

Таким образом, показано, что для произвольного твердого тела всегда можно так выбрать направления осей системы координат $Oy_1y_2y_3$, что все осевые моменты инерции окажутся одинаковыми, т.е.

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{1}{3}\left(I_1 + I_2 + I_3\right).$$

Заметим, что полученный результат допускает также следующую геометрическую интерпретацию. Пусть имеется трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c. Тогда всегда можно ввести декартову систему координат с началом в центре эллипсоида таким образом, что точки пересечения координатных осей с эллипсоидом окажутся на одинаковом расстоянии d от его центра, причем

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

2⁰. Докажем левую часть (2.1), т.е. неравенство

$$I_1 I_2 I_3 \le J_1 J_2 J_3 = f. \tag{2.10}$$

Для этого сначала рассмотрим ряд вспомогательных соотношений.

Во-первых, легко показать, что

$$\begin{aligned} a_{21}^2 &= \left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right)^2, \\ a_{22}^2 &= \left(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}\right)^2, \\ a_{23}^2 &= \left(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} a_{21}^2 &= 1 - a_{11}^2 - a_{31}^2 = a_{12}^2 + a_{13}^2 - a_{31}^2\left(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2\right) = \\ &= \left(a_{12}^2 + a_{13}^2\right)\left(a_{32}^2 + a_{33}^2\right) - \left(a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33}\right)^2 = \\ &= a_{12}^2 a_{33}^2 + a_{13}^2 a_{32}^2 - 2a_{12}a_{33}a_{13}a_{32} = \left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right)^2. \end{aligned}$$

Остальные тождества (2.11) доказываются аналогично.

Теперь рассмотрим выражение $J_1 J_3$. Имеем

$$\begin{aligned}J_1J_3 &= \left(I_1a_{11}^2 + I_2a_{12}^2 + I_3a_{13}^2\right)\left(I_1a_{31}^2 + I_2a_{32}^2 + I_3a_{33}^2\right) = \\ &= I_1^2a_{11}^2a_{31}^2 + I_2^2a_{12}^2a_{32}^2 + I_3^2a_{13}^2a_{33}^2 + I_1I_2\left(a_{11}^2a_{32}^2 + a_{12}^2a_{31}^2\right) + \\ &+ I_2I_3\left(a_{12}^2a_{33}^2 + a_{13}^2a_{32}^2\right) + I_3I_1\left(a_{12}^2a_{31}^2 + a_{11}^2a_{33}^2\right) = \\ &= \left(I_1a_{11}a_{31} + I_2a_{12}a_{32} + I_3a_{13}a_{33}\right)^2 + I_1I_2\left(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}\right)^2 + \\ &+ I_2I_3\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right)^2 + I_3I_1\left(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}\right)^2,\end{aligned}$$

т.е., с учетом (2.11),

$$J_1J_3 = \left(I_1a_{11}a_{31} + I_2a_{12}a_{32} + I_3a_{13}a_{33}\right)^2 + I_1I_2a_{23}^2 + I_2I_3a_{21}^2 + I_3I_1a_{22}^2. \tag{2.12}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}&J_2\left(I_1I_2a_{23}^2 + I_2I_3a_{21}^2 + I_3I_1a_{22}^2\right) = \\ &\quad = \left(I_1a_{21}^2 + I_2a_{22}^2 + I_3a_{23}^2\right)\left(I_1I_2a_{23}^2 + I_2I_3a_{21}^2 + I_3I_1a_{22}^2\right) = \\ &\quad = I_1I_2I_3\left(a_{21}^4 + a_{22}^4 + a_{23}^4\right) + \\ &\qquad + I_1\left(I_2^2 + I_3^2\right)a_{22}^2a_{23}^2 + I_2\left(I_3^2 + I_1^2\right)a_{23}^2a_{21}^2 + I_3\left(I_1^2 + I_2^2\right)a_{21}^2a_{22}^2\end{aligned}$$

или окончательно

$$\begin{aligned}&J_2\left(I_1I_2a_{23}^2 + I_2I_3a_{21}^2 + I_3I_1a_{22}^2\right) = I_1I_2I_3 + \\ &\quad + I_1\left(I_2 - I_3\right)^2 a_{22}^2a_{23}^2 + I_2\left(I_3 - I_1\right)^2 a_{23}^2a_{21}^2 + I_3\left(I_1 - I_2\right)^2 a_{21}^2a_{22}^2.\end{aligned} \tag*{2.13)}$$

Воспользовавшись (2.12), (2.13), получаем

$$\begin{aligned}&f = J_1J_2J_3 = I_1I_2I_3 + \\ &\qquad + I_1\left(I_2 - I_3\right)^2 a_{22}^2a_{23}^2 + I_2\left(I_3 - I_1\right)^2 a_{23}^2a_{21}^2 + I_3\left(I_1 - I_2\right)^2 a_{21}^2a_{22}^2 + \\ &\qquad + \left(I_1a_{21}^2 + I_2a_{22}^2 + I_3a_{23}^2\right)\left(I_1a_{11}a_{31} + I_2a_{12}a_{32} + I_3a_{13}a_{33}\right)^2 \ge J_1J_2J_3,\end{aligned}$$

причем равенство достигается при одновременном выполнении условий

$$a_{21}a_{22} = 0, \qquad a_{22}a_{23} = 0, \qquad a_{23}a_{21} = 0; \tag{2.14}$$

$$I_1a_{11}a_{31} + I_2a_{12}a_{32} + I_3a_{13}a_{33} = 0. \tag{2.15}$$

Кроме того, в силу ортогональности матрицы $\mathbf{A}$,

$$a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0. \tag{2.16}$$

Анализ системы (2.14) – (2.16) при $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ показывает, что равенство в (2.10) возможно в следующих шести случаях (здесь приведены только ненулевые элементы матрицы $\mathbf{A}$):

$$\begin{array}{ll} 1).\ a_{11}^2 = a_{22}^2 = a_{33}^2 = 1; & 2).\ a_{11}^2 = a_{23}^2 = a_{32}^2 = 1; \\ 3).\ a_{12}^2 = a_{21}^2 = a_{33}^2 = 1; & 4).\ a_{12}^2 = a_{23}^2 = a_{31}^2 = 1; \\ 5).\ a_{13}^2 = a_{21}^2 = a_{32}^2 = 1; & 6).\ a_{13}^2 = a_{22}^2 = a_{31}^2 = 1. \end{array} \tag{2.17}$$

Из вида решений (2.17) следует, что все они отвечают ситуациям, в которых оси систем координат $Oy_1y_2y_3$ и $Ox_1x_2x_3$ совпадают (ось Oy_i коллинеарна оси Ox_k). Заметим, что среди решений (2.17) надо оставить лишь те, которые отвечают правой системе координат, т.е. удовлетворяющие условию $|\mathbf{A}| = 1$.

3º. Имеет место также неравенство

$$J_1L_1 + J_2L_2 + J_3L_3 \geq 3I_1I_2I_3, \tag{2.18}$$

где

$$L_i = I_2I_3a_{i1}^2 + I_3I_1a_{i2}^2 + I_1I_2a_{i3}^2. \tag{2.19}$$

Для доказательства подставим (2.19) в (2.18). Тогда после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} J_iL_i &= \sum_{i=1}^{3}\left(I_1a_{i1}^2 + I_2a_{i2}^2 + I_3a_{i3}^2\right)\left(I_2I_3a_{i1}^2 + I_3I_1a_{i2}^2 + I_1I_2a_{i3}^2\right) = \\ &= I_1I_2I_3\Big[\left(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2\right)^2 - 2\left(a_{11}^2a_{12}^2 + a_{12}^2a_{13}^2 + a_{13}^2a_{11}^2\right) + \\ &\qquad + \left(a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2\right)^2 - 2\left(a_{21}^2a_{22}^2 + a_{22}^2a_{23}^2 + a_{23}^2a_{21}^2\right) + \\ &\qquad + \left(a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2\right)^2 - 2\left(a_{31}^2a_{32}^2 + a_{32}^2a_{33}^2 + a_{33}^2a_{31}^2\right)\Big] + \\ &\qquad + I_3\left(I_1^2 + I_2^2\right)^2\left(a_{11}^2a_{12}^2 + a_{21}^2a_{22}^2 + a_{31}^2a_{32}^2\right) + \\ &\qquad + I_1\left(I_2^2 + I_3^2\right)^2\left(a_{12}^2a_{13}^2 + a_{22}^2a_{23}^2 + a_{32}^2a_{33}^2\right) + \\ &\qquad + I_2\left(I_3^2 + I_1^2\right)^2\left(a_{13}^2a_{11}^2 + a_{23}^2a_{21}^2 + a_{33}^2a_{31}^2\right) = \end{aligned}$$

$$= 3I_1I_2I_3 + I_1\left(I_2 - I_3\right)^2\left(a_{12}^2a_{13}^2 + a_{22}^2a_{23}^2 + a_{32}^2a_{33}^2\right) +$$
$$+ I_2\left(I_3 - I_1\right)^2\left(a_{13}^2a_{11}^2 + a_{23}^2a_{21}^2 + a_{33}^2a_{31}^2\right) +$$
$$+ I_3\left(I_1 - I_2\right)^2\left(a_{11}^2a_{12}^2 + a_{21}^2a_{22}^2 + a_{31}^2a_{32}^2\right),$$

откуда следует (2.18), причем равенство достигается при одновременном выполнении условий

$$a_{i1}a_{i2} = 0, \quad a_{i2}a_{i3} = 0, \quad a_{i3}a_{i1} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (2.20)$$

Очевидно, (2.20) имеет место только в случаях (2.17).

Литература

1. К.В. Луканин, В.А. Сарычев. Модельная задача о быстродействии и точности системы гравитационной стабилизации спутников. Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1971, №47.
2. Я.З. Цыпкин , П.В. Бромберг. О степени устойчивости линейных систем. Изв. АН СССР, ОТН, 1945, №12, с. 1163-1168.
3. В.А. Сарычев, С.А. Мирер. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор. Космические исследования, 1976, т. 14, №2, с. 209-219
4. V.A. Sarychev, S.A. Mirer, V.V. Sazonov. Plane Oscillations of a Gravitational System Satellite-Stabilizer with Maximal Speed of Response. Acta Astronautica, 1976, Vol. 3, No. 9-10, p. 651-669.