ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 52 за 2009 г.

Гавриков М.Б., Савельев В.В., Шмаровоз Г.В.

Ускорение двухжидкостной плазмы в плоском канале

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б., Савельев В.В., Шмаровоз Г.В. Ускорение двухжидкостной плазмы в плоском канале // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 52. 27 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-52

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

М.Б. Гавриков, В.В. Савельев, Г.В. Шмаровоз

Ускорение двухжидкостной плазмы в плоском канале

Москва – 2009

М.Б. Гавриков, В.В. Савельев, Г.В. Шмаровоз. Ускорение двухжидкостной плазмы в плоском канале. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2009, 27 страницы, 9 рисунков, библиография: 8 наименований.

В работе исследовано ускорение плазмы в плоском канале, обусловленное взаимодействием электронов и ионов, а не переменностью сечения канала. Найдены практически важные установившиеся течения, в которых мощное – в сотни раз – ускорение потока плазмы происходит в узкой, толщиной порядка инерционной длины зоне, примыкающей к входу в канал. Результаты исследования переносятся на каналы переменного сечения посредством квазиодномерного приближения, подробно рассмотренного в работе.

M.B. Gavrikov, V.V. Savelyev, G.V.Shmarovoz. Two-fluids plasma acceleration in plane channel. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2009, 27 Pages, 9 Figures, 8 References.

Here we discuss plasma acceleration in plane channel caused by ion-electron interactions, rather than the variability of the channel cross section. Research show that there are stable flows with strong – a hundreds of times – acceleration occurs in narrow, thick-order inertial length of the zone adjacent to the entrance of the channel. The results of these calculations can be used for channels with variable profiles using quasi one-dimensional approximation discussed in this paper.

Введение

Явление ускорения потоков газа и плазмы в каналах находит многочисленные технические применения (сопла, плазменные двигатели и пр.). Однако, механизм ускорения плазмы в каналах до сих пор недостаточно изучен, отчасти потому что его исследование базировалось на (холловской) магнитной гидродинамике (МГД), в которой структура плазменного вещества не рассматривается.

Учёт двухжидкостной природы плазмы приводит к важным закономерностям течения плазмы в каналах ускорителей. Например, как показано в работе, возможны такие установившиеся течения, в которых сильное (в десятки и сотни раз) ускорение потока плазмы происходит в узкой, толщиной порядка инерционной длины $\sim c/\omega_p$ (ω_p – плазменная частота) зоне, примыкающей к входу в канал. Это ускорение имеет место даже в канале постоянного сечения и обусловлено взаимодействием электронов и ионов, а не переменностью сечения канала, как это обычно считается в газовой динамике и МГД. Практическая важность таких и подобных им режимов вызывает особый интерес к двухжидкостной плазмодинамике.

В работе на основе уравнений двухжидкостной электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) изучается ускорение плазмы в плоском канале с нулевым продольным магнитным полем. Результаты исследований, используя квазиодномерные приближения, можно обобщить на каналы более сложной формы. В работе подробно обсужден принцип получения квазиодномерного приближения на примере осесимметричного канала и рассмотрена реализация этого принципа применительно к уравнениям газовой динамики.

1. Уравнения электромагнитной гидродинамики.

Рассмотрим установившееся течение плазмы в плоском канале длины l, стенки которого – бесконечные плоские электроды с подведенным к ним постоянным напряжением. На вход в канал подается полностью ионизованная электрон-ионная плазма с плотностью ρ_0, давлением p_0 и скоростью U_0, напряженность магнитного поля на входе равна H_0. Геометрия полей и токов изображена на Рис. 1. Сила Ампера $[\mathbf{j},\mathbf{H}]/c$ ускоряет плазму вдоль оси канала Ox. Основная цель работы – исследовать возникающее ускорение, при этом для простоты электроны и ионы считаются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ.

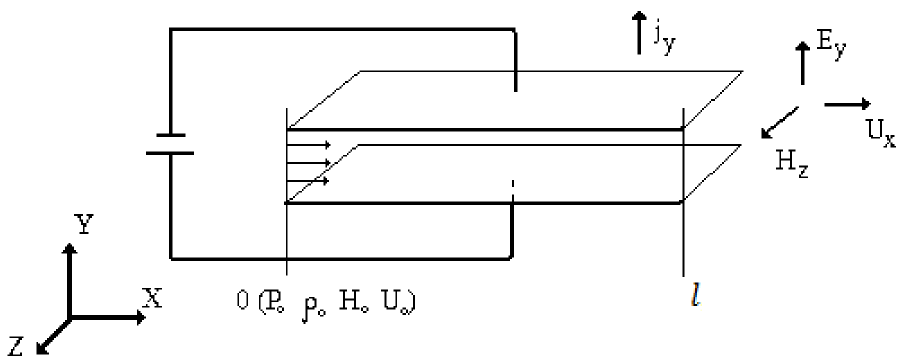


Рис.1

Необходимо подчеркнуть, что уравнения классической или холловской МГД непригодны для изучения ускорения плазмы в плоском канале – ниже станет ясно, что в МГД вопреки физической очевидности ускорение отсутствует вовсе. Поэтому исследуем ускорение плазмы на базе уравнений электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) с учетом магнитной вязкости [1,2]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{U}=0,\qquad \frac{\partial\rho\mathbf{U}}{\partial t}+\mathrm{Div}\Pi=0,$$

$$\frac{dp_i}{dt}+\mathbf{U}\nabla p_i+\gamma p_i\mathrm{div}\mathbf{U}+\lambda_e\rho^{\gamma-1}\mathbf{j}\nabla\left(\frac{p_\mathrm{i}}{\rho^\gamma}\right)=(\gamma-1)\frac{\mathrm{m_e}}{\mathrm{m}_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma},$$

$$\frac{dp_e}{dt}+\mathbf{U}\nabla p_e+\gamma p_e\mathrm{div}\mathbf{U}-\lambda_i\rho^{\gamma-1}\mathbf{j}\nabla\left(\frac{p_\mathrm{e}}{\rho^\gamma}\right)=(\gamma-1)\frac{\mathrm{m_i}}{\mathrm{m}_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma},\qquad(1.1)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\mathbf{E}=0, \quad \mathrm{div}\mathbf{H}=0, \quad \mathbf{j}=\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\mathbf{H},$$

$$\mathbf{E}+\frac{c^2\lambda_i\lambda_e}{4\pi\rho}\mathrm{rotrot}\mathbf{E}=\frac{\mathbf{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}[\mathbf{U},\mathbf{H}]+\frac{1}{\rho}\mathrm{Div}\mathrm{W}.$$

Здесь $\rho=\rho_i+\rho_e$, $p_\Sigma=p_i+p_e$, $m_\Sigma=m_i+m_e$, $\lambda_e=m_e/e$, $\lambda_i=m_i/(Ze)$, Z – кратность заряда ионов, $\mathbf{U}=(\rho_i\mathbf{V}_i+\rho_e\mathbf{V}_e)/\rho$ – массовая скорость плазмы, σ – проводимость плазмы, а тензоры плотности потока импульса Π и холловских напряжений W имеют вид:

$$\Pi=\Pi^{(h)}+\Pi^{(p)}+\Pi^{(c)},$$

$$\mathrm{W}=(\lambda_e-\lambda_i)\left(\Pi^{(p)}+\Pi^{(c)}\right)+(\lambda_e p_i-\lambda_i p_e)\mathrm{I}_3+\lambda_i\lambda_e(\mathbf{j}\cdot\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{j}) \qquad (1.2)$$

$$\Pi^{(h)}=\rho\mathbf{U}\mathbf{U}+P_\Sigma\,\mathrm{I}_3, \quad \Pi^{(p)}=\frac{\mathrm{H}^2}{8\pi}\mathrm{I}_3-\frac{\mathbf{H}\mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^{(c)}=\frac{\lambda_i\lambda_e\mathbf{j}\mathbf{j}}{\rho}$$

где I_3 – единичный трёхмерный тензор.

Система (1.1), (1.2) – это математически эквивалентная запись законов сохранения массы, импульса, энергии по отдельности для электронов и ионов, образующих квазинейтральный поток плазмы в квазистационарном магнитном поле. Гидродинамические плотности и скорости компонент плазмы по ρ , **U**, **H** определяются по формулам:

$$\mathbf{V}_i=\mathbf{U}+\frac{\lambda_e}{\rho}\mathbf{j}, \;\; \mathbf{V}_e=\mathbf{U}-\frac{\lambda_i}{\rho}\mathbf{j}, \;\; \rho_i=\frac{\lambda_i}{\lambda}\rho, \;\; \rho_e=\frac{\lambda_e}{\lambda}\rho \qquad (1.3)$$

где $\lambda=\lambda_i+\lambda_e$. Уравнения классической МГД получаются из уравнений системы (1.1), (1.2), если в них опустить все слагаемые, куда ρ входит в знаменателе, и сложить уравнения для давлений. Уравнения холловской МГД получаются из (1.1), (1.2), если положить $m_e=0$, $\lambda_e=0$ – тогда, в частности, $\Pi^{(c)}=0$, $\mathrm{W}=-\lambda_i\left(\Pi^{(p)}+p_e\mathrm{I}_3\right)$, а джоулево тепло выделяется только в электронах.

2. **Установившиеся течения в плоском канале**.

Рассмотрим для плоской геометрии $(\partial/\partial y=\partial/\partial z=0)$ установившиеся $(\partial/\partial t=0)$ течение плазмы в канале на Рис.1. Тогда $\mathrm{j_y}=-c/(4\pi)\,\partial\mathrm{H_z}/\partial\mathrm{x}$, $j_x=j_z=0$ и ЭМГД-уравнения примут вид:

$$\frac{\partial \rho U_x}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho U_x^2}{\partial x} + \frac{\partial p_\Sigma}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial x} = 0,$$

$$U_x \frac{\partial p_i}{\partial x} + \gamma p_i \frac{\partial \mathrm{U_x}}{\partial \mathrm{x}} = (\gamma - 1)\frac{\mathrm{m_e}}{\mathrm{m}_\Sigma}\frac{\mathrm{c}^2}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{\partial \mathrm{H_z}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2, \qquad (2.1)$$

$$U_x \frac{\partial p_e}{\partial x} + \gamma p_e \frac{\partial \mathrm{U_x}}{\partial \mathrm{x}} = (\gamma - 1)\frac{\mathrm{m_i}}{\mathrm{m}_\Sigma}\frac{\mathrm{c}^2}{16\pi^2\sigma}\left(\frac{\partial \mathrm{H_z}}{\partial \mathrm{x}}\right)^2,$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_y}}{\partial \mathrm{x}} = 0, \qquad \mathrm{E_y} = -\frac{\mathrm{c}}{4\pi\sigma}\frac{\partial \mathrm{H_z}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\mathrm{U_x H_z}}{\mathrm{c}} - \frac{\mathrm{c}\lambda_i\lambda_e}{4\pi\rho}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\mathrm{U_x}\frac{\partial \mathrm{H_z}}{\partial \mathrm{x}}\right)$$

Пренебрегая джоулевым нагревом, получим из (2.1) для нахождения функций $\rho(x)$, $U_{\mathrm{x}}(x)$, $H_{\mathrm{z}}(x)$, $p_{\mathrm{i}}(x)$, $p_{\mathrm{e}}(x)$, $E_{\mathrm{y}}(x)$ уравнения:

$$\rho U_x = I, \quad \rho U_x^2 + \mathrm{p}_\Sigma + \frac{\mathrm{H_z^2}}{8\pi} = \mathrm{D},$$

$$p_e|U_x|^\gamma = K_e, \qquad p_i|U_x|^\gamma = K_i,$$

$$E_y = const, \qquad (2.2)$$

$$\frac{\mathrm{c}\lambda_i\lambda_e}{4\pi\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\mathrm{U_x}\frac{\mathrm{dH_z}}{\mathrm{dx}}\right) + \frac{\mathrm{c}}{4\pi\sigma}\frac{\mathrm{dH_z}}{\mathrm{dx}} - \frac{\mathrm{U_x H_z}}{\mathrm{c}} + \mathrm{E_y} = 0,$$

где $\mathrm{I} \neq 0$, $\mathrm{D} > 0$, $K_e \geq 0$, $K_i \geq 0$ – константы, определяемые состоянием плазмы на входе в канал:

$$I = \rho_0 U_0, \; D = \rho_0 U_0^2 + p_0 + \frac{H_0^2}{8\pi}, \; K_i = p_{i0}|U_0|^\gamma, \; K_e = p_{e0}|U_0|^\gamma,$$

$$p_0 = p_{i0} + p_{i0},$$

По смыслу задачи $\mathrm{I} > 0$, тогда $U_0 > 0$, а знаки модулей в (2.2) можно опустить.

Рассмотрим сначала для простоты случай холодной плазмы ($8\pi p_0 \ll H_0^2$). Обезразмерим систему (2.2) в этом случае, выбирая в качестве характерных масштабов плотности, скорости и напряженности магнитного поля их значения на входе в канал, а в качестве характерной напряженности электрического поля — комбинацию $U_0 H_0/c$. За характерный масштаб длины примем длину канала l. Обозначая *U*= U_x, *H*=H_z, *E*=E_y, в безразмерном виде система (2.2) с учетом $K_e = 0$, $K_i = 0$, дает одно нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение для нахождения *H(x)* :

$$\xi^2 U \frac{d}{dx}\left(U\frac{dH}{dx}\right) + \mu\frac{dH}{dx} - UH + E = 0,$$

$$U = U(H) = 1 + \frac{1}{2M_A^2}(1 - H^2), \ \ \rho = \frac{1}{U}, \qquad (2.3)$$

$$H(0) = 1, \ \ \frac{dH}{dx}(1) = 0, \ \ E = const, \quad 0 \le x \le 1,$$

где числа подобия ξ, M_A, μ равны:

$$\xi = \frac{c\lambda_e^{1/2}\lambda_i^{1/2}}{(4\pi\rho)^{1/2} l}, \quad \mu = \frac{c^2}{4\pi\sigma U_0 l}, \ \ M_A = \frac{U_0}{V_A}, \ \ V_A = \frac{H_0}{(4\pi\rho_0)^{1/2}}, \qquad (2.4)$$

Граничное условие в (2.3) на правой границе *x=1* диктуется требование нулевого поперечного тока на выходе из канала. Условие $\rho > 0$ выделяет из решения краевой задачи (2.3) те функции *H(x)* , для которых *U(H) > 0* , откуда $|H| < (1 + 2M_A^2)^{1/2}$. Отсюда вытекает, что максимальное ускорение в плоском канале равно

$$\frac{U(1)}{U(0)} \le 1 + \frac{1}{2M_A^2}.$$

В частности, для больших альфвеновских чисел Маха на входе, $M_A^2 \gg 1$, ускорение ничтожно мало – $U(1)/U(0) \cong 1$. Параметр ξ равен отношению инерционной длины c/ω_p ($\omega_p = 4\pi\rho_0(\lambda_i\lambda_e)^{-1}$ –плазменная частота) к длине канала l и в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз меньше известного параметра обмена [3], используемого в работах по плазменным ускорителям.

3. Результаты расчетов и сравнение с МГД.

Для численного решения краевой задачи (2.3) использовалась простейшая нелинейная разностная схема на равномерной сетке шагом *h=1/N*, *N=2,3…* на отрезке [0,1], решение которой ищется итерациями по нелинейности:

$$\frac{\xi^2}{h}\left\{U\left(H^p_{k+\frac{1}{2}}\right)\frac{H^{p+1}_{k+1}-H^{p+1}_k}{h}-U\left(H^p_{k-\frac{1}{2}}\right)\frac{H^{p+1}_k-H^{p+1}_{k-1}}{h}\right\}-$$

$$-H^{p+1}_k+\frac{\mu}{U(H^p_k)}\frac{H^{p+1}_{k+1}-H^{p+1}_{k-1}}{2h}+\frac{E}{U(H^p_k)}=0, \qquad 0<k<N, \tag{3.1}$$

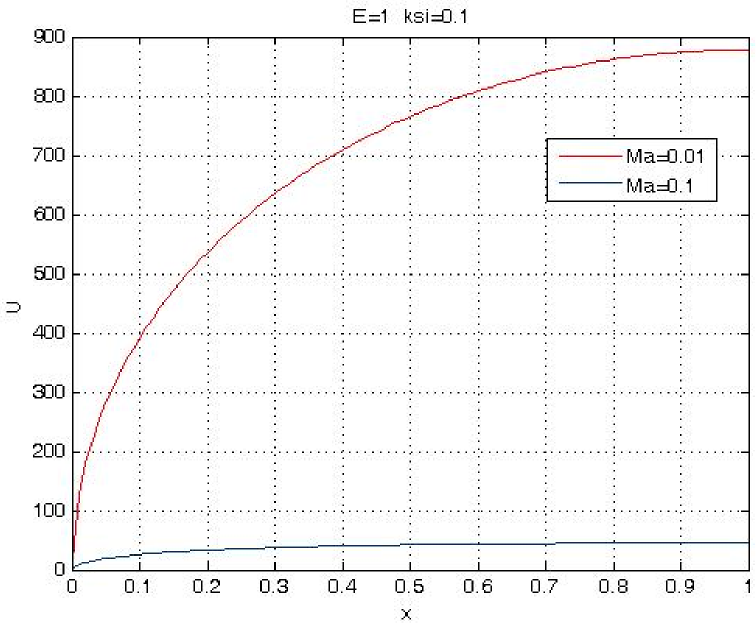
$$H^{p+1}_0=1, \qquad \frac{H^{p+1}_N-H^{p+1}_{N-1}}{h}=0.$$

Здесь *p=0,1,2…* – номер итерации по нелинейности, $H^0_k,\ 0\le k\le N$ – заданный начальный вектор. Вектор H^{p+1} по H^p ищется прогонкой, при этом на каждой итерации используются интерполяции:

$$U\left(H_{k+\frac{1}{2}}\right)\cong\frac{U(H_k)+U(H_{k+1})}{2}, \quad U\left(H_{k-\frac{1}{2}}\right)\cong\frac{U(H_k)+U(H_{k-1})}{2},$$

а начальный вектор H^0 выбирается равным $H^0_k=\varphi(kh),\ 0\le k\le N$, где $\varphi(x)$ – любая гладкая функция, удовлетворяющая граничным условиям для H из (2.3). Например, можно положить $\varphi(x)=(1-x)^2$ – от выбора $\varphi(x)$ результаты расчета не зависят.

Рассмотрим сначала результаты расчета для нулевой магнитной вязкости $\mu=0$. Тогда решение зависит от трёх констант ξ, M_A, E. При фиксированных ξ и E с уменьшением M_A, как показано на Рис.2, происходит значительный (в десятки и сотни раз) рост ускорения в канале. При фиксированных M_A и E с уменьшением ξ, как следует из Рис.3, наблюдается локализация ускорения в погранслое шириной $\sim\xi$ у входа в канал, при этом растет и величина ускорения. Переход $\xi\to 0$ соответствует МГД-пределу. При $\xi=0$, т.е. в МГД-теории, задача (2.3) переопределена и в зависимости от μ и E либо не имеет решений, либо имеет константное решение. В частности, в МГД-приближении ускорение плазмы в плоском канале отсутствует. Поскольку константы, к которым стремятся параметры установившегося течения на Рис.3 на выходе из канала, удовлетворяют МГД-уравнениям, ЭМГД-стационарное течение на выходе из канала устанавливается (пространственная переменная x играет при этом роль времени) и переходит в МГД-стационарное течение.



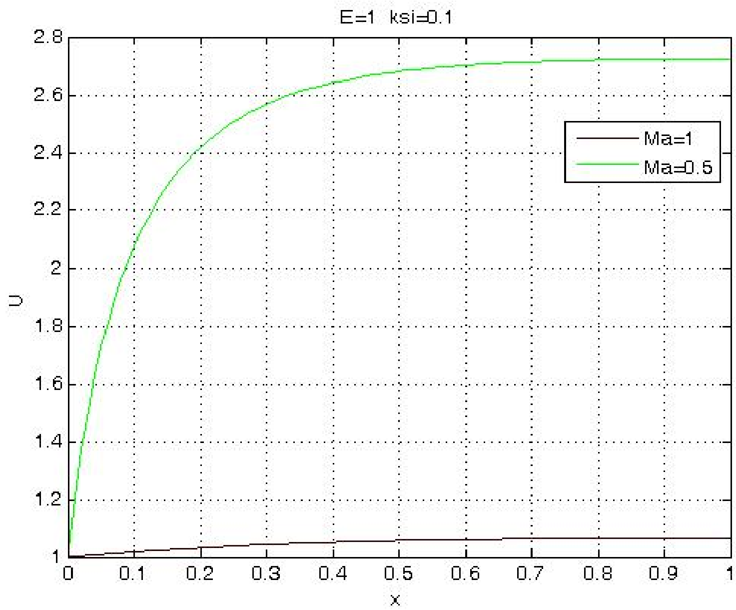


Рис.2

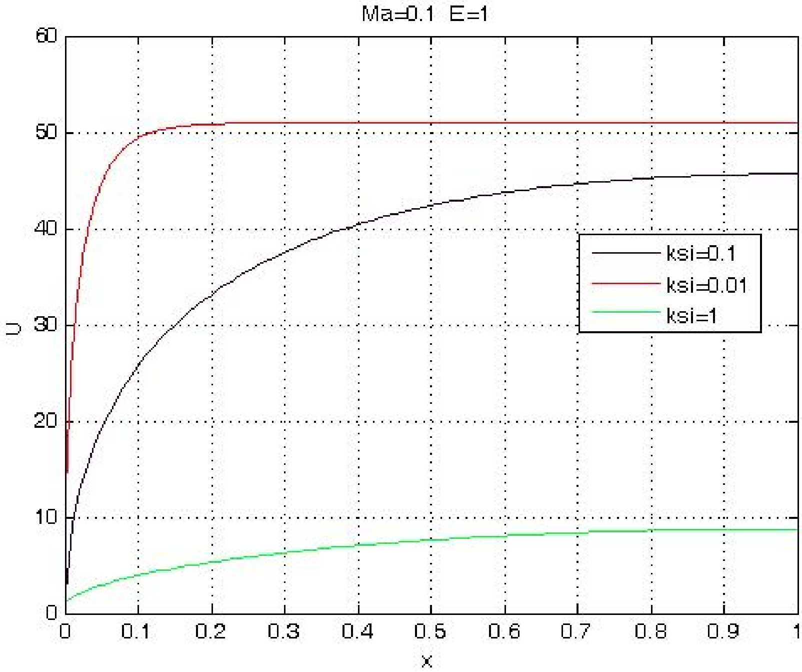


Рис.3

Учет магнитной вязкости μ парадоксальным образом влияет на представленные результаты. Рис.4 демонстрирует не уменьшение (как и следовало ожидать), а рост ускорения плазмы и локализацию его в приграничном с входом в канал слое при увеличении магнитной вязкости μ. В этой связи отметим возрастание роли магнитной вязкости при уменьшении параметра ξ. Формально это проявляется в преобразовании чисел подобия $\xi \to 1,\ \mu \to \mu_{eff} = \mu/\xi$ при замене переменных $x \to x/\xi$ в задаче (2.3), так что при $\xi \to 0$ эффективная магнитная вязкость μ_{eff} растёт. (Для Z–пинчей эффективное увеличение магнитной вязкости в рамках МГД-теории отмечалось ещё в [8], но там оно рассматривалось как следствие турбулентности плазмы). В частности, при $\mu=0$ указанной заменой переменных число подобия ξ можно вообще исключить из уравнения (2.3), при этом в $1/\xi$ раз увеличивается расчетная область.

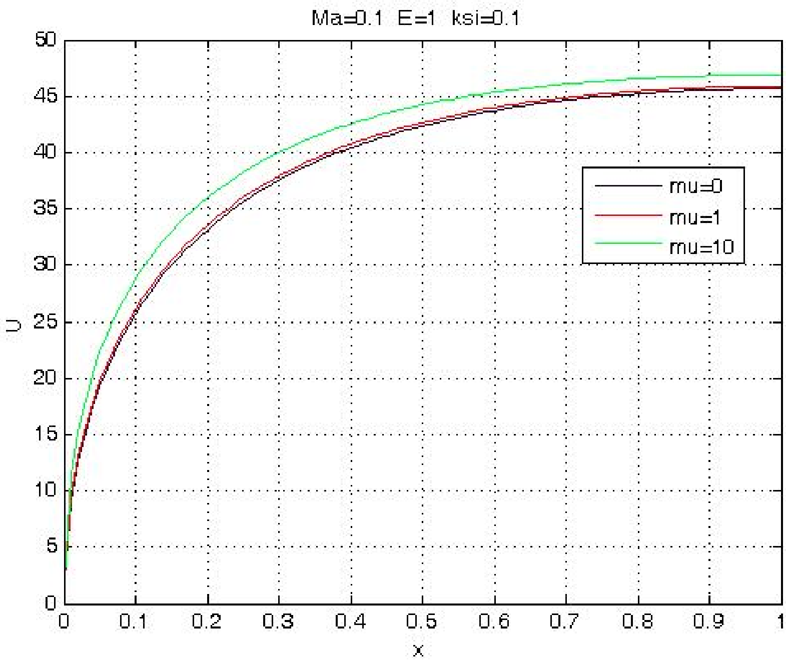


Рис.4

При μ=*0* можно указать все возможные типы решения уравнения (2.3) (аналогичная задача решалась в [4] при исследовании бесстолкновительных нелинейных колебаний плазмы), а значит и соответствующей краевой задачи, если заметить, что оно имеет следующий первый интеграл «энергии»:

$$\frac{\xi^2}{2}U^2\left(\frac{dH}{dx}\right)^2 + \Phi(H) \equiv \mathcal{E}, \qquad (3.2)$$

где $\mathcal{E}$ – произвольная константа,

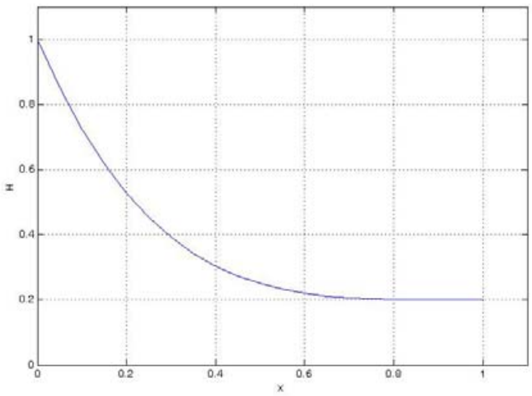
$$\Phi(H) = \int \big(E - HU(H)\big)dH = EH - \frac{1+\varkappa}{2}H^2 + \frac{\varkappa}{4}H^4 + const,$$

$$U(H) = 1 + \varkappa(1 - H^2), \qquad \varkappa = \frac{1}{2M_A^2}.$$

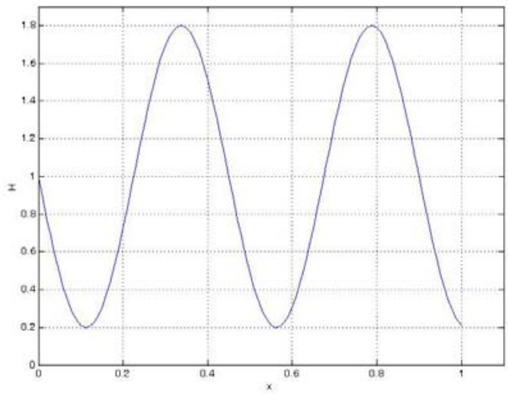
Как известно [5], решение (3.2) получается гладкой «сборкой» дуг, задаваемых уравнением, в левой части которого стоит эллиптический интеграл:

$$\pm\int \frac{\xi U(H)dH}{\sqrt{2(\mathcal{E} - \Phi(H))}} = x + const \qquad (3.3)$$

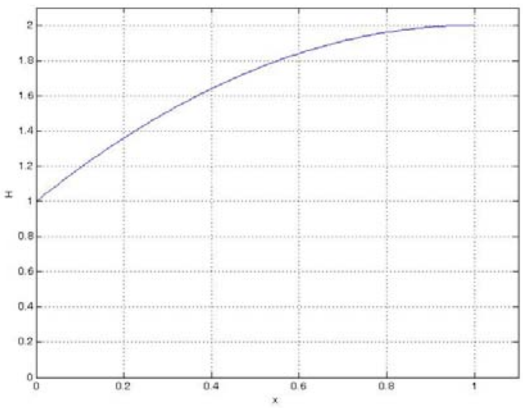
и принадлежащих потенциальной яме $\Phi(H) \le \mathcal{E}$. Подбором констант и знаков $\pm$ перед интегралом в (3.3) получается гладкое решение *H(x)* уравнения (3.2), являющееся либо периодической функцией, либо уединенной волной. При этом решение *H(x)* лежит в потенциальной яме, а вид решения завит от типа пересечения (трансверсальное или нет) прямой $\mathcal{E} = const$ с краями потенциальной ямы. Граничное условие (2.3) на правом конце *x=1* может выполняться только для периодической *H(x)*, поэтому возможны только 4 типа установившихся течений, приведенных на Рис.5.



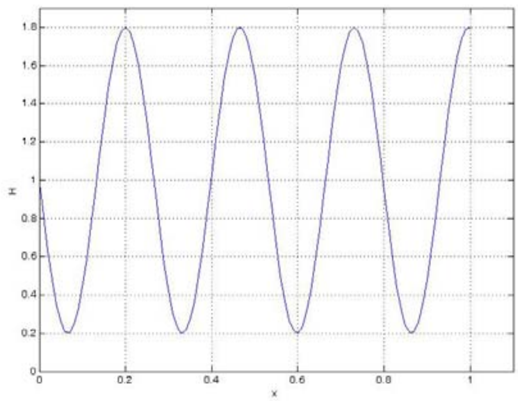
Простое ускорение



Сложное ускорение



Простая компрессия



Сложная компрессия

Рис.5.

При простом или сложном ускорении энергия магнитного поля на входе в канал преобразуется в кинетическую энергию плазмы на выходе, при этом плотность плазмы падает. При простой или сложной компрессии, наоборот, кинетическая энергия плазмы на входе преобразуется на выходе из канал в энергию магнитного поля, при этом происходит сжатие (компрессия) плазмы. Простые ускорение и компрессия это частные случаи сложных ускорения и компрессии, которые задаются отрезками периодических кривых. Какой из перечисленных типов течений в канале реализуется, зависит от констант E и M_A. Из вида потенциальной функции $\Phi(H)$ несложно вывести следующее необходимое условие. Пусть $M_A<1$, тогда простое ускорение возможно только при

$$E < \frac{2\sqrt{1+3M_A^2}-1}{27}\left[3+\frac{2}{M_A^2}+\frac{2\sqrt{1+3M_A^2}}{M_A^2}\right] = \varphi(M_A^2) \tag{3.4}$$

а простая компрессия только при

$$E > \frac{\sqrt{1+2M_A^2}+1}{4} = \psi(M_A^2) \tag{3.5}$$

Сложное ускорение и компрессия возможны только при одновременном выполнении неравенств (3.4), (3.5). Заметим, что при $M_A<1$ всегда $\psi(M_A^2) > \varphi(M_A^2)$. Приведенные условия только необходимы, но не достаточны для реализации простого (сложного) ускорения или компрессии. Достаточные условия более сложные и зависят от констант ξ и $\mathcal{E}$. Их анализ позволяет доказать единственность решения краевой задачи (2.3), которое может и не существовать.

4. Учет температуры электронов и ионов.

В этом случае появится ещё одно число подобия $M = U_0(\gamma p_0\,/\rho_0)^{-1/2}$ – число Маха, и в безразмерном виде уравнение для стационарного течения плазмы в плоском канале запишется следующим образом:

$$U+\frac{1}{\gamma M^2 U^\gamma}+\frac{H^2}{2M_A^2} \equiv D = 1++\frac{1}{\gamma M^2}+\frac{1}{2M_A^2}, \tag{4.1}$$

$$\xi^2 U\frac{d}{dx}\left(U\frac{dH}{dx}\right)+\mu\frac{dH}{dx}-UH+E=0, \tag{4.2}$$

$$H(0)=1,\;\; U(0)=1,\;\; \frac{dH}{dx}(1)=0,$$

$$p=\frac{1}{U^\gamma},\;\; \rho=\frac{1}{U},\quad 0\le x\le 1,$$

Теперь U – двухзначная функция H. Иными словами, ищется набор гладких функций *U(x)*, *H(x)*, $0 \leq x \leq 1$, которые доставляют решение краевой задаче (4.2) и при каждом $0 \leq x \leq 1$ точка *(H(x),U(x))* лежит на овале

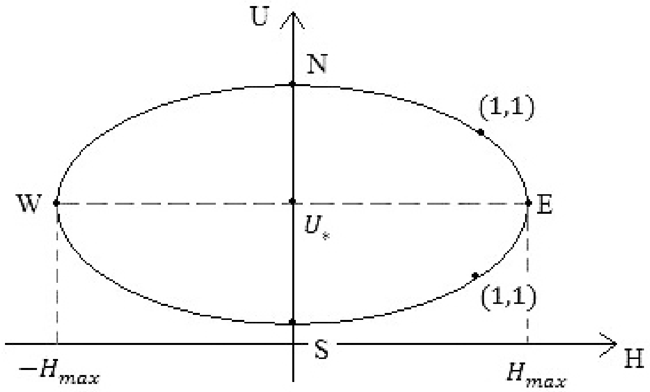


Рис.6

в плоскости *(H,U),* содержащим точку (1,1) и задаваемом уравнением (4.1). Здесь

$$H_{max} = \left[1 + 2M_A^2\left(1 + \frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma+1}{\gamma}M^{-\frac{2}{\gamma+1}}\right)\right]^{1/2}, \quad U_* = M^{-\frac{2}{\gamma+1}}$$

Двузначность функции *U(H)* приводит к появлению новых типов решений краевой задачи (4.2). Можно показать [6], что при $M \neq 1$, $\mu = 0$ гладкое решение уравнений (4.2) с начальным условием *H(0)=1, U(0)=1* лежит либо на открытой дуге $\widetilde{NE}$, либо на открытой дуге $\widetilde{SE}$. Первый случай реализуется для *M >1* (на входе в канал поток плазмы сверхзвуковой), второй – для *M <1* (входной поток – дозвуковой). В первом случае стационарные течения в плоском канале качественно ничем не отличаются от рассмотренных выше в параграфах 2,3 стационарных потоков холодной плазмы. Геометрически это проявляется в том, что в пределе холодной плазмы, $M \to +\infty$, верхняя дуга $\widetilde{WNE}$ переходит в график параболы $U(H) = 1 + (2M_A^2)^{-1}(1 - H^2)$, а нижняя дуга $\widetilde{WSE}$ вырождается в отрезок $[-(1 + 2M_A^2)^{1/2},\ (1 + 2M_A^2)^{1/2}]$ на оси H.

Имеет место первый интеграл «энергии»

$$\xi^2 \frac{U^2}{2}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2 + EH + M_A^2\frac{U^2}{2} + \frac{M_A^2}{(\gamma-1)M^2}\frac{1}{U^{\gamma-1}} = \mathcal{E}, \qquad (4.3)$$

($\mathcal{E}$ –произвольная константа), который при $M \to +\infty$ (т.е. в пределе холодной плазмы) переходит в интеграл (3.2)

Интеграл (4.3) позволяет найти общее решение уравнения (4.2), если в нём сделать замену переменных, выразив *H* через *U* посредством уравнения (4.1):

$$H = f(U) = \left[1 + 2M_A^2\left(1 + \frac{1}{\gamma M^2}\right) - U - \frac{1}{\gamma M^2 U^\gamma}\right]^{1/2}, \quad U_- \le U \le U_+,$$

где $U_\pm$– нули подкоренного выражения (заметим, что северный и южный полюсы овала на Рис.6 имеют координаты N$(0, U_+)$, S$(0, U_-)$). Полученное уравнение относительно *U(x)*:

$$\frac{\xi^2}{2}\left(Uf'(U)\frac{dU}{dx}\right)^2 + \Phi(U) = \mathcal{E} \tag{4.4}$$

$$\Phi(U) = Ef(U) + M_A^2\frac{U^2}{2} + \frac{M_A^2}{(\gamma-1)M^2}\frac{1}{U^{\gamma-1}}$$

имеет особенность при старшей производной в точке U_* – единственной точке, где $f'(U) = 0$. Решение (4.4) в потенциальной яме, не содержащей точку U_*, дается, как и раньше, квадратурой

$$\pm\int\frac{\xi Uf'(U)dU}{\sqrt{2\big(\mathcal{E} - \Phi(U)\big)}} = x + const \tag{4.5}$$

Однако интеграл в левой части уже не будет эллиптическим.

В случае *M >1* решение $H(x) = f\big(U(x)\big),\ U(x)$, задаваемое (4.5), лежит на дуге $\breve{NE}$ и дает те же тип ускорений, что и в случае холодной плазмы. При этом в кинетическую энергию укоренного движения плазмы переходит не только магнитная энергия, но и тепловая. Поэтому максимальное ускорение $U_+/U(0) = U_+$ будет большим, чем для случая холодной плазмы. При $\gamma = 1$ легко получить явную формулу для максимального ускорения:

$$\frac{U_+}{U(0)} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{M^2} + \frac{1}{2M^2} + \left\{\left[\left(1 + \frac{1}{M}\right)^2 + \frac{1}{2M_A^2}\right]\left[\left(1 - \frac{1}{M}\right)^2 + \frac{1}{2M_A^2}\right]\right\}^{1/2}\right\}.$$

В случае *M <1* решение лежит на дуге $\breve{SE}$ и формула (4.5) задает новые ускорительные режимы, при которых тепловая энергия переходит в кинетическую энергию плазмы и энергию магнитного поля. Максимальное ускорение $U_*/U(0) = U_* = M^{-\frac{2}{\gamma+1}}$ не зависит от M_A и стремится $+\infty$ к при $M \to 0$.

В случае горячей плазмы существуют и негладкие установившиеся течения. Так, при *M <1* возможны ускорительные режимы, при которых кривая *(H(x), U(x))* на овале, начинаясь в точке (1,1) на дуге $\breve{SE}$, проходит через точку E и попадает на дугу $\breve{NE}$ (Рис.7):

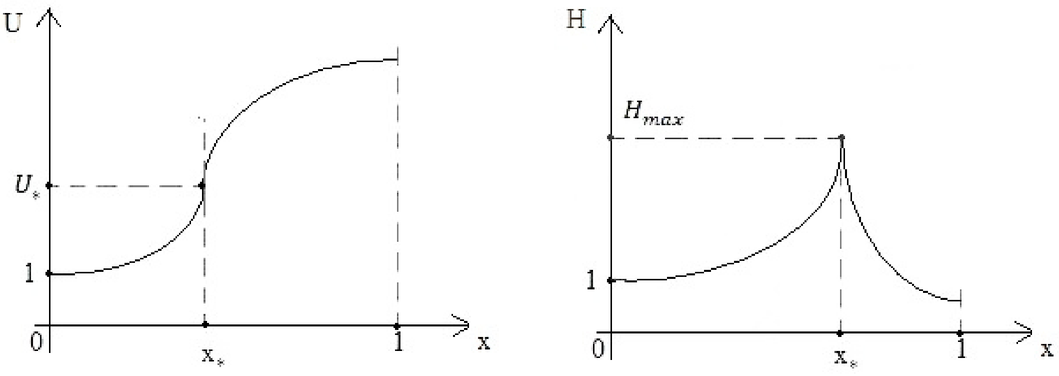


Рис.7

В некоторой точке x_* канала $(H(x_*), U(x_*))$=*E*. Ускорение потока плазмы при этом распадается на два этапа. На первом этапе $0 \le x \le x_*$ тепловая энергия переходит в магнитную и кинетическую энергию плазмы, на втором – при $x_* \le x \le 1$ – ускорение происходит за счет преобразования тепловой и магнитной энергии в кинетическую. При $x = x_*$ имеем $dU/dx = +\infty$, а *H(x)* имеет излом. Подобные режим возникают, когда потенциальная яма $\Phi(H) \le \mathcal{E}$ содержит особую точку U_*. Если допустить негладкие решения, то теорема существования и единственности решения уравнения (4.4) будет неверна, однако решения вида, изображенного на Рис.7 с одной особенностью определяются однозначно. Детальный анализ математических аспектов рассматриваемой задачи содержится в [6].

5. Квазиодномерные течения.

Допустим, в каждом поперечном сечении канала параметры течения слабо меняются от точки к точке. Такие течения называются квазиодномерными. Для них средние по сечению параметры среды приближенно удовлетворяют некоторой системе уравнений в частных производных (уравнения квазиодномерного течения) от двух переменных – времени и продольной координаты. Вывод уравнений квазиодномерных течений в МГД содержится в работах [3,7]. Наш подход основан на других идеях.

Получим уравнения квазиодномерных течений на примере осесимметричного канала с продольным направлением вдоль оси z, стенки которого – соосные цилиндрические поверхности $r = r_{\pm}(z)$, $r_{+}(z) > r_{-}(z) > 0$

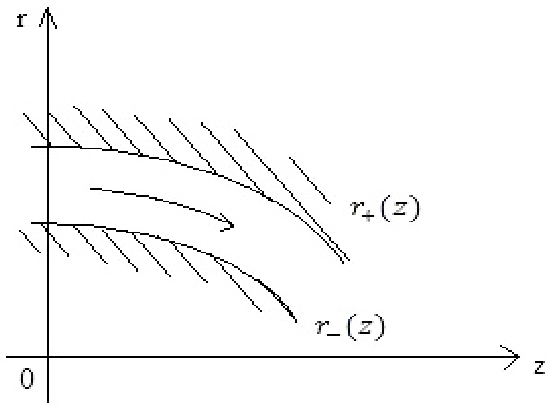


Рис. 8

Поперечное сечение такого канала – кольцо $r_{-}(z) \leq r \leq r_{+}(z)$ площади $S(z) = \pi(r_{+}^{2} - r_{-}^{2})$. Для параметра осесимметричного $(\partial/\partial\varphi = 0)$ течения в канале $f(t,r,z)$ определим среднее по сечению канала $\hat{f}(t,z)$:

$$\hat{f}(t,z) = \frac{1}{S(z)} \int_{r_{-}(z)}^{r_{+}(z)} 2\pi r f(t,r,z) dr = \frac{2}{r_{+}^{2} - r_{-}^{2}} \int_{r_{-}(z)}^{r_{+}(z)} r f(t,r,z) dr \qquad (5.1)$$

Следующее понятие является ключевым. Параметр $f(t,r,z)$ называется слабо меняющимся по сечению, если f представимо в виде:

$$f(t,r,z) = F(t,R,z), \;\; R = \varepsilon r\,, \qquad 0 < \varepsilon = \varepsilon(t,z) \ll 1$$

где $F(t,R,z)$ аналитична в нуле *R=0* по «медленной» переменой R. Функция $\varepsilon(t,z)$ обычно неизвестна, поэтому разложим $\hat{f}$ по степеням ε и получим уравнения на нулевые коэффициенты разложений.

По предположению,

$$F = F_{0} + F_{1}R + F_{2}R^{2} + \cdots, \qquad F_{i} = F_{i}(t,z) \qquad (5.2)$$

Делая замену переменных в интеграле (5.1), получим разложение в ряд по степеням ε среднего по сечению $\hat{f}$:

$$\hat{f}(t,z) = \frac{2}{r_+^2 - r_-^2}\int\limits_{r_-(z)}^{r_+(z)} rf(t,r,z)dr = \frac{2}{R_+^2 - R_-^2}\int\limits_{R_-(z)}^{R_+(z)} RF(t,R,z)dR = \hat{F}(t,z) =$$

$$= \frac{2}{R_+^2 - R_-^2}\sum_{k=0}^{\infty} F_k \int_{R_-}^{R_+} R^{k+1}dR = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k r_k(z) F_k, \qquad (5.3)$$

где $R_\pm(z) = \varepsilon r_\pm(z)$ и

$$r_k(z) = \frac{2}{k+2}\frac{r_+^{k+2}(z) - r_-^{k+2}(z)}{r_+^2(z) - r_-^2(z)}, \;\; k \geq 0 \qquad (5.4)$$

(в частности, $r_0(z) = 1$). Из разложения (5.3) следует важная в дальнейшем эквивалентность $\hat{f} \sim F_0,\;\; \varepsilon \to 0$.

Рассмотрим следующий способ получения уравнений на осреднённые величины $\hat{f}$. Он состоит из нескольких этапов. Пусть дано дифференциальное уравнение, связывающее параметры осесимметричного течения в канале.

1) Перейдем в дифференциальном уравнении от переменных *(t,r,z)* к переменным *(t,R,z)* с учетом $R = \varepsilon r, \partial / \partial r = \varepsilon \partial / \partial R$ и разложим все функции в уравнении в ряды (5.2) по степеням R.
2) После выполнения действий над рядами проведем осреднение по переменной R на отрезке $[R_-,\ R_+]$, где $R_\pm = \varepsilon r_\pm$, что делается автоматически, поскольку усредняются степенные ряд по R.
3) Возвращаясь к функциям $r_\pm$, получим степенные ряды по ε с коэффициентами, зависящими от (t,z). Если нулевые члены этих разложений зависят только от нулевых коэффициентов разложений (5.2), то с учетом эквивалентности $\hat{f} \sim F_0,\ \varepsilon \to 0$ получим дифференциальное уравнение на средние величины.

Если имеется система дифференциальных уравнений, то указанная процедура выполняется для каждого уравнения системы.

Продемонстрируем методу получения уравнений на средние величины на примере уравнения неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho U_r)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho U_z)=0.$$

Ниже не делается различия в записи между функциями f и F.

1) Переходим к переменной R

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\rho U_r)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho U_z)=0$$

и разлагаем все функции в ряды (5.2) по степеням R:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k R^k\right)+\frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k R^k\sum_{s=0}^{\infty}U_{rs}R^s\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k R^k\sum_{s=0}^{\infty}U_{zs}R^s\right)=0.$$

2) Выполняем действия над рядами (перемножаем ряды и почленно дифференцируем их по *t, R, z*)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial\rho_n}{\partial t}R^n+\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sum_{k+s=n}\rho_k U_{rs}R^{n-1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k+s=n}\rho_k U_{zs}\right)R^n=0$$

и усредняем по R на отрезке $[R_-,\ R_+]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\partial\rho_n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k+s=n}\rho_k U_{zs}\right)\right]\frac{2}{n+2}\frac{R_+^{n+2}-R_-^{n+2}}{R_+^2-R_-^2}+$$
$$+2\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k+s=n}\rho_k U_{rs}\right)\frac{R_+^{n+1}-R_-^{n+1}}{R_+^2-R_-^2}=0.$$

3) Подставляя в последнее равенство $R_\pm=\varepsilon r_\pm$, получаем ряд по степеням ε:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{\partial\rho_n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sum_{k+s=n}\rho_k U_{zs}\right)\right]\frac{2}{n+2}\frac{r_+^{n+2}-r_-^{n+2}}{r_+^2-r_-^2}\right.$$
$$\left.+\,2\sum_{k+s=n}\rho_k U_{rs}\frac{r_+^{n+1}-r_-^{n+1}}{r_+^2-r_-^2}\right\}\varepsilon^n=0.$$

Коэффициент при ε^0 зависит только от нулевых членов разложения (5.2):

$$\left[\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\rho_0 U_{z0}+\frac{2\rho_0 U_{r0}}{r_+ + r_-}\right]\varepsilon^0+[\dots]\varepsilon^1+[\dots]\varepsilon^2+\cdots=0.$$

Поэтому с точностью до членов $\sim\varepsilon$ $(\hat{f}\sim F_0,\ \varepsilon\to 0)$ получается следующее уравнение для средних величин:

$$\frac{\partial\hat\rho}{\partial t}+\frac{\partial\hat\rho\hat U_z}{\partial z}+\frac{\hat\rho\hat U_r}{r_*(z)}=0,\quad r_*(z)=\frac{r_+(z)+r_-(z)}{2} \tag{5.5}$$

где $r_*(z)$ – средний радиус канала.

Прежде чем привести примеры усреднения систем уравнений, рассмотрим роль граничных условий на стенках канала. Пусть для определённости это условия непротекания: $U_n=0$. Касательные вектора к стенкам канала на плоскости *(z,r)* имеют вид $(1,r'_\pm(z))$, а нормальные – $(-r'_\pm(z),1)$. Поэтому условия непротекания сводятся к равенствам:

$$U_r|_{r=r_\pm}=U_z|_{r=r_\pm}r'_\pm(z)$$

Подставляя в эти равенства разложения (5.2), получим:

$$\left(U_{r0}+\varepsilon r_\pm U_{r1}+\varepsilon^2 r_\pm^2 U_{r2}+\cdots\right)=\left(U_{z0}+\varepsilon r_\pm U_{z1}+\varepsilon^2 r_\pm^2 U_{z2}+\cdots\right)r'_\pm(z).$$

Откуда для нулевых членов разложения следуют равенства:

$$U_{r0}=U_{z0}r'_+(z),\quad U_{r0}=U_{z0}r'_-(z).$$

Поскольку U_{r0},U_{z0} не зависят от $r_\pm(z)$, то, вычитая одно из другого, приходим к соотношению:

$$U_{z0}(r_+ - r_-)'\equiv 0.$$

Исключая тривиальный случай $U_{z0}\equiv 0$, получим

$$r_+(z)-r_-(z)\equiv h=const.$$

Таким образом, для справедливости условий непротекания на верхней и нижней стенках канала, необходимо, чтобы последний имел произвольную, но постоянную ширину $h>0$. В частности,

$$r_\pm(z)=r_*(z)\pm\frac{h}{2},\quad S(z)=\pi(r_+^2-r_-^2)=2\pi r_*(z)h.$$

И мы получим:

$$\widehat{U}_r = \widehat{U}_z r_*'(z) \tag{5.6}$$

Подставляя (5.6) в усреднённое уравнение неразрывности (5.5), получим:

$$\frac{\partial \hat{\rho} r_*}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\rho} \widehat{U}_z r_*}{\partial z} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial \hat{\rho} S}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\rho} \widehat{U}_z S}{\partial z} = 0 \tag{5.7}$$

В тоже время для стационарных течений соотношение (5.6) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для нахождения формы канала $r_*(z)$:

$$\frac{dr_*}{dz} = \frac{\widehat{U}_r}{\widehat{U}_z} \tag{5.8}$$

Таким образом, в нашем подходе форма канала не может быть произвольной, а ищется вместе с нахождением средних величин.

6. Квазиодномерное приближение в газовой динамике.

Рассмотрим осесимметричное течение идеального политропного газа с показателем адиабаты γ в осесимметричном канале, изображенном на Рис.8. Уравнения газовой динамики в этом случае имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho U_r) + \frac{\partial \rho U_z}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial \rho U_r}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho U_r^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho U_r U_z) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \\
\frac{\partial \rho U_z}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho U_r U_z) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho U_z^2) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial p}{\partial t} + U_r\frac{\partial p}{\partial r} + U_z\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma p\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) = 0.
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Квазиодномерное приближение для системы (6.1), полученное по методу пункта 5, имеет вид:

$$\frac{\partial\rho r_*}{\partial t}+\frac{\partial\rho U_z r_*}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial\rho U_r r_*}{\partial t}+\frac{\partial\rho U_r U_z r_*}{\partial z}=0, \qquad (6.2)$$

$$\frac{\partial\rho U_z r_*}{\partial t}+\frac{\partial\rho U_z^2 r_*}{\partial z}+r_*\frac{\partial p}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial r_* p}{\partial t}+r_* U_z\frac{\partial p}{\partial z}+\gamma p\,\frac{\partial r_* U_z}{\partial z}=0,$$

$$\frac{dr_*}{dz}=\frac{U_r}{U_z},$$

где $r_*=(r_+ + r_-)/2$ – средний радиус канала, на стенках предполагается условие непротекания и тогда, как следует из результатов параграфа 5, $r_\pm(z)=r_*(z)\pm h/2$ где $h>0$ – произвольная величина.

Рассмотрим установившиеся квазиодномерные течения. Полагая в (6.2) $\frac{\partial}{\partial t}=0$, получим из первых двух уравнений

$$\rho U_z r_*\equiv I, \quad U_r=const.$$

Подставляя в третье и четвертое уравнения (6.2) $r_*=I/(\rho U_z)$, получим

$$U_z\frac{dU_z}{dz}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=0, \quad \frac{dp}{dz}-\frac{\gamma p}{\rho}\frac{d\rho}{dz}=0.$$

Из последнего уравнения следует $p=C\rho^\gamma$, $C>0$. Тогда оставшееся уравнение даёт

$$\frac{U_z^2}{2}+C\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}\equiv D.$$

Таким образом, U_z и r_* являются явными функциями ρ. Подставляя эти функции в последнее уравнение системы (6.2), получим дифференциальное уравнение для нахождения $\rho(z)$. Дальнейший анализ удобно провести, приведя все величины к безразмерному виду и приняв параметры газа на входе в канал за характерные:

$$U_0=U_z(0),\ p_0=p(0),\ \rho_0=\rho(0),\ R_*=r_*(0).$$

Характерный масштаб длины – длина канала l. Тогда

$$I=\rho_0 U_0 R_*,\quad C=\frac{p_0}{{\rho_0}^{\gamma}}\ ,\quad D=\frac{U_0^2}{2}+\frac{C_s^2}{\gamma-1},\quad C_s=\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2}.$$

И в безразмерном виде полученные выше первые интегралы запишутся так: $(U=U_z)$

$$\rho U\, r_*=\xi,\quad p=\rho^{\gamma},\ \ M^2\frac{U^2}{2}+\ \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1}=\frac{M^2}{2}+\frac{1}{\gamma-1},$$

где $\xi=R_*/l,\ \ M=U_0\ /C_s$ – число Маха.

Отсюда:

$$r_*=\frac{\xi}{\rho U(\rho)},\quad U(\rho)=\left[1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}-\ \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}\right]^{1/2}.$$

Подставляя эти выражения в последнее оставшееся уравнение системы (6.2)

$$\frac{dr_*}{dz}=\frac{U_r}{U}$$

Получим

$$U(\rho)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho U(\rho)}\right)=\frac{U_r}{\xi}.$$

Левая часть равна $-d\Phi(\rho)/dz$, где

$$\Phi(\rho)=\int\frac{1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M^2}-\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}}{\rho^2\left[1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M^2}-\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{\rho^{\gamma-1}}{M^2}\right]}d\rho.$$

Отсюда получается равенство $\Phi(\rho)=-\frac{U_r}{\xi}z+const$, где *const* определяется условием: при $z=0\ \ \rho=1$. Откуда получается окончательная формула:

$$F(\rho)=\int\limits_1^{\rho}\frac{1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M^2}-\dfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\dfrac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}}{\rho^2\left[1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M^2}-\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}\right]}d\rho=-\frac{U_r}{\xi}z,\quad 0\le z\le 1 \qquad (6.3)$$

$\rho(z)$ получается обращением функции $F(\rho)$. Функция $F(\rho)$ изображена на Рис.9

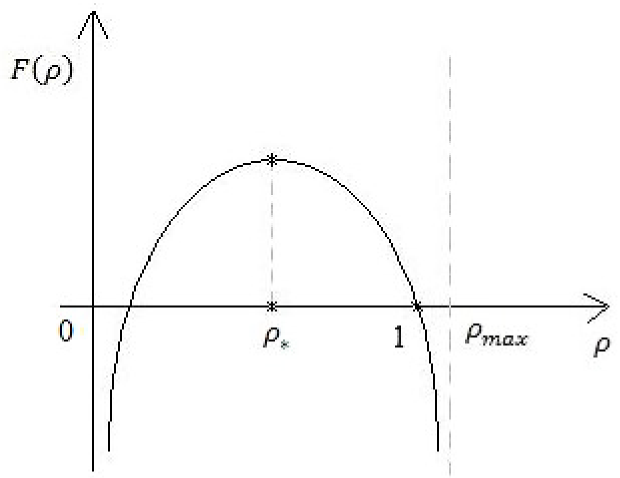


Рис.9

Она достигает максимума в точке $\rho_* = \left[\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{2}M^2+1\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$ и определена на интервале $(0, \rho_{max})$, $\rho_{max} = \left(\frac{\gamma-1}{2}M^2+1\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$, при $\rho \to 0+$, $\rho \to \rho_{max} - 0$ $F(\rho)$ стремится к $-\infty$. Слева от ρ_* $F(\rho)$ монотонно возрастает, справа – монотонно убывает. Наконец, одна из точек пересечения графика $F(\rho)$ с осью ρ равна 1. Если $\rho_* < 1$, то $\mathrm{M} < 1$ (входной поток дозвуковой). Если $\rho_* > 1$, то $M > 1$ (входной поток сверхзвуковой).

Проанализируем ситуацию для $\mathrm{M} < 1$ – входной поток дозвуковой. Тогда при $U_r > 0$ решение (6.3) задает монотонно возрастающую функцию $\rho(z)$ и, значит, $U(z)$ монотонно убывает – поток газа тормозится и при этом сжимается. Однако компрессия незначительная – максимально достижимое сжатие не превосходит $\rho_{max} \le \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$, что касается торможения – оно может достичь существенной величины и поток газа на выходе из канала имеет почти нулевую скорость. При $U_r < 0$ решение (6.3) задает монотонно убывающую функцию $\rho(z)$ и, значит, $U(z)$ монотонно возрастает – поток газа ускоряется. Максимальное ускорение $U(\rho_*) = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ при $M << 1$ имеет порядок $\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\frac{1}{M}$ и может быть значительным. Здесь возникает два случая. Если

$$\frac{|U_r|}{\xi} = \frac{|U_r|l}{U_0 R_*} \le \int_1^{\rho_*} \frac{1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}}{\rho^2\left[1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}-\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}\right]}d\rho \qquad (6.4)$$

то имеем гладкое решение в канале типа конфузора, при котором происходит ускорение потока газа. В случае знака равенства в (6.4) на выходе из канала получим поток газа со звуковой скоростью. Если условие (6.4) нарушается, то гладкое решение, вычисляемое по (6.3) имеет место при $0 \le z \le z_*$, где

$$z_* = \frac{\xi}{|U_r|}\int_1^{\rho_*} \frac{1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}}{\rho^2\left[1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}-\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}\right]}d\rho < 1.$$

При $z = z_*$ скорость U потока газа звуковая. Для восстановления решения при $z_* \le z \le 1$ надо использовать левую ветвь функции $F(\rho)$, изменив знак у U_r:

$$F(\rho) = \int_1^{\rho} \frac{1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}}{\rho^2\left[1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}-\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\rho^{\gamma-1}\right]}d\rho = \frac{2|U_r|z_*}{\xi} - \frac{|U_r|z}{\xi}.$$

Тогда при $z = z_*$, $\rho = \rho_*$ и при увеличении z функция $\rho(z)$ монотонно убывает, а значит $U(z)$ монотонно растёт. Теперь поток газа сверхзвуковой. При $z = z_*$ U_r скачком изменяется, так что канал $r_*(z)$ имеет излом. Однако

$$\left.\frac{dr_*(z)}{dz}\right|_{z=z_*+0} = \frac{|U_r|}{U(z_*)}, \qquad \left.\frac{dr_*(z)}{dz}\right|_{z=z_*-0} = -\frac{|U_r|}{U(z_*)},$$

но $U(z_*) = U(\rho_*) = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ и при $M \ll 1$

$$r_*'(z_*+0) \cong 0 \cong r_*'(z_*-0),$$

поэтому изломом можно пренебречь. Физически образование излома означает, что в рамках квазиодномерного приближения нельзя описать разворот потока в узком горле сопла Лаваля.

Список литературы

1. Гавриков М.Б. Основные уравнения двухжидкостной электромагнитной гидродинамики. Часть I. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. №59. 28с.
2. Гавриков М.Б., Сорокин Р.В. Однородные деформации двухжидкостной плазмы с учетом инерции электронов. // Изв. АН Механика жидкости газа. 2008. Т.6. с.156-169.
3. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Стационарные течения плазмы в магнитном поле. // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А.Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974. Вып.8. с.87-158.
4. Adlam J.H., Allen J.E. Phil Mag. **3**, 448 (1958)
5. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. // Ижевск: ИРТ, 2000. 367с.
6. Гавриков М.Б. Стационарные нелинейные волны в квазинейтральной плазме. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1990. №79. 28с.
7. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. 200с.
8. Дьяченко В.Ф., Имшенник В.С. Двумерная магнитогидродинамическая модель плазменного фокуса Z-пинча. // Вопросы теории плазмы. Под ред. М.А.Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974. Вып.8. с.164-256.