



Давыдов А.А., Сазонов В.В.

Определение параметров вращательного движения малого спутника связи по данным измерений тока солнечных батарей

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Давыдов А.А., Сазонов В.В. Определение параметров вращательного движения малого спутника связи по данным измерений тока солнечных батарей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 32. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-32>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

А.А. Давыдов, В.В. Сазонов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ МАЛОГО СПУТНИКА СВЯЗИ ПО ДАННЫМ
ИЗМЕРЕНИЙ ТОКА СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ**

Москва – 2009

Аннотация.

Рассматривается малый КА – спутник связи, находящийся на геостационарной орбите. Для управления вращательным движением КА используются двигатели-маховики. КА после нештатной ситуации перешёл в состояние неуправляемого вращения, при этом непосредственная телеметрическая информация о параметрах его вращательного движения отсутствовала. Вследствие этого возникла задача определения вращательного движения спутника по имеющейся косвенной информации – току, снимаемому с солнечных батарей. Телеметрические измерения тока солнечных батарей, полученные на интервале времени длиной несколько часов, обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений вращательного движения спутника. Приведены результаты обработки 10 отрезков данных измерений, позволившие определить фактическое вращательное движение КА и оценить суммарный кинетический момент двигателей-маховиков.

A.A. Davydov, V.V. Sazonov. Reconstruction of attitude motion of the small spacecraft by measurements of the current from solar arrays. We reconstruct the attitude motion of the small spacecraft, which was located in a geostationary orbit. This motion was controlled by reaction wheels. The Spacecraft passed in uncontrolled rotation, and the direct telemetry information about its attitude motion was absent. There was a problem to determine the real spacecraft attitude motion by available indirect information. We used the telemetry data of a current generated by solar arrays. This data, obtained on the time intervals about few hours, were processed jointly by the least squares method with integration of the spacecraft attitude motion equations. We quote the processing results for 10 data segments, which allowed to reconstruct the spacecraft real attitude motion and to estimate a total momentum of reaction wheels.

1. Математическая модель вращательного движения космического аппарата. КА считаем гиростатом, совершающим свободное вращательное движение. Для записи уравнений этого движения введём две правые декартовы системы координат – неподвижную в абсолютном пространстве $X_1X_2X_3$ и образованную главными центральными осями инерции КА $x_1x_2x_3$. Ось X_1 направлена на Солнце, положение которого в системе $X_1X_2X_3$ полагаем неизменным на рассматриваемом отрезке времени, ось X_3 направлена в сторону Северного полюса мира, лежащего в плоскости X_1X_3 .

Положение системы $x_1x_2x_3$ относительно системы $X_1X_2X_3$ зададим углами γ , δ и β , которые введём с помощью следующего условия. Система $X_1X_2X_3$ может быть переведена в систему $x_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол γ вокруг оси X_1 , 2) на угол δ вокруг новой оси X_2 , 3) на угол β вокруг новой оси X_3 , совпадающей с осью x_3 . Матрицу перехода от системы $x_1x_2x_3$ к системе $X_1X_2X_3$ обозначим $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где a_{ij} – косинус угла между осями X_i и x_j . Элементы этой матрицы выражаются через введённые углы с помощью формул

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \delta \cos \beta, & a_{21} &= \cos \gamma \sin \beta + \sin \gamma \sin \delta \cos \beta, \\ a_{12} &= -\cos \delta \sin \beta, & a_{22} &= \cos \gamma \cos \beta - \sin \gamma \sin \delta \sin \beta, \\ a_{13} &= \sin \delta, & a_{23} &= -\sin \gamma \cos \delta, \\ a_{31} &= \sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \sin \delta \cos \beta, \\ a_{32} &= \sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \delta \sin \beta, \\ a_{33} &= \cos \gamma \cos \delta. \end{aligned}$$

Система уравнений вращательного движения образована уравнениями, выражающими теорему об изменении кинетического момента спутника в его движении относительно центра масс и кинематическими соотношениями Пуассона для элементов первой и третьей строк матрицы A . Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu \omega_2 \omega_3 + h_2 \omega_3 - h_3 \omega_2, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} \omega_1 \omega_3 + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu} (h_3 \omega_1 - h_1 \omega_3), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu) \omega_1 \omega_2 + \lambda (h_1 \omega_2 - h_2 \omega_1), \\ \dot{a}_{11} &= a_{12} \omega_3 - a_{13} \omega_2, & \dot{a}_{12} &= a_{13} \omega_1 - a_{11} \omega_3, & \dot{a}_{13} &= a_{11} \omega_2 - a_{12} \omega_1, \\ \dot{a}_{31} &= a_{32} \omega_3 - a_{33} \omega_2, & \dot{a}_{32} &= a_{33} \omega_1 - a_{31} \omega_3, & \dot{a}_{33} &= a_{31} \omega_2 - a_{32} \omega_1, \\ \lambda &= \frac{J_1}{J_3}, & \mu &= \frac{J_2 - J_3}{J_1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ω_i – компоненты вектора абсолютной угловой скорости КА; J_i – моменты инерции КА относительно осей x_i ; $J_1 h_i$ – компоненты собственного кинетического момента двигателей-маховиков. В уравнениях (1) и далее, если не оговорено другое, компоненты векторов относятся к системе $x_1 x_2 x_3$.

Переменные a_{1i} и a_{3i} зависимы – связаны условиями ортогональности матрицы A , поэтому начальные условия для них выражаются через углы γ , δ и β . В процессе интегрирования уравнений (1), элементы второй строки матрицы A вычисляются как векторное произведение её первой и третьей строк. Размерность величин ω_i и h_i – с^{-1} , единица измерения времени – секунда. Параметры h_i считаются постоянными на участке интегрирования. Значения параметров λ и μ : $\lambda = 2.765$, $\mu = 0.474$.

2. Метод определения вращательного движения КА. Решения уравнений (1), аппроксимирующие фактическое движение КА относительно центра масс, выбираются из условия наилучшего сглаживания с их помощью телеметрических данных о токе, снимаемом с солнечных батарей (СБ). При этом определяются начальные условия движения КА и параметры h_i ($i = 1, 2, 3$).

Ток, вырабатываемый СБ, примерно пропорционален косинусу угла падения солнечных лучей на их светочувствительную поверхность. Полагаем, что эта поверхность представляет собой плоскость, неподвижную в системе $x_1 x_2 x_3$. Компоненты орта нормали $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ к светочувствительной поверхности имеют значения: $n_1 = -0.9997$, $n_2 = -0.0191$, $n_3 = 0.0165$. Орт \mathbf{S} направления «Земля-Солнце» в системе координат $X_1 X_2 X_3$ имеет компоненты $\mathbf{S} = (1, 0, 0)$. Расчётное значение снимаемого с СБ тока и косинус угла между ортами \mathbf{n} и \mathbf{S} задаются формулами

$$I = I_0 \max(\eta, 0), \quad \eta = \sum_{k=1}^3 a_{1k} n_k. \quad (3)$$

Здесь I_0 – максимальный ток, вырабатываемый батареями на орбите Земли при перпендикулярном падении солнечных лучей на их плоскость, $I_0 \approx 102$ А; На практике точный расчёт тока солнечных батарей достаточно сложен, однако упрощённые формулы (3) позволяют получить приемлемые для рассматриваемой задачи результаты. Эти формулы можно ещё упростить, учитывая, что в обработку следует включать только те моменты времени, для которых телеметрические значения тока превышают некоторый положительный предел I_{\min} . Для таких моментов времени заведомо выполнялось условие $\eta > 0$, и расчётные значения тока можно находить по формуле $I = I_0 \eta$. При обработке полученных данных принималось $I_{\min} = 1 \div 3$ А.

Поскольку в формулах (3) величина η зависит только от параметров a_{1k} , график $\eta(t)$ инвариантен по отношению к углу γ . С учётом этого обстоя-

тельства, уравнения для \dot{a}_{3i} можно исключить из системы (1). Однако эти уравнения оставлены для того, чтобы наряду с угловыми скоростями КА, найти угловое положение КА на исследуемых отрезках времени. Далее всюду начальное значение угла γ принято равным нулю.

Телеметрическая информация о токе, снимаемом с батареей, представляет собой последовательность чисел

$$t_n, I_n \quad (n=1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Здесь I_n – приближённое значение тока в момент времени t_n , $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$. Разности $t_{n+1} - t_n$, как правило, не превышают нескольких секунд. В обработку включаются отрезки данных, длина которых $t_N - t_1$ составляет от 3 до 11 часов.

Сглаживание данных (4) выполняется методом наименьших квадратов. Пусть ошибки в значениях I_n независимы и имеют одинаковое нормальное распределение с нулевым средним значением и стандартным отклонением σ . Значение σ неизвестно. На решениях уравнений движения, заданных на отрезке $t_1 \leq t \leq t_N$, определим функционал

$$\Phi = \sum_{n=1}^N [I_n - I_0 \eta(t_n)]^2. \quad (5)$$

Аппроксимацией фактического движения КА на этом отрезке будем считать решение, доставляющее такому функционалу минимум. Минимизация Φ проводится по начальным условиям движения КА в точке t_1 : $\delta_0 = \delta(t_1)$, $\beta_0 = \beta(t_1)$, $\omega_{i0} = \omega_i(t_1)$, и параметрам h_i . Как было указано выше $\gamma(t_1) = 0$. Для простоты письма все уточняемые параметры объединим в один вектор $q = (\delta_0, \beta_0, \omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, h_1, h_2, h_3) \in R^8$. Тогда $\Phi = \Phi(q)$, и $q_* = \arg \min \Phi(q)$ – искомая оценка вектора q .

Система (1) и выражения (3) инвариантны относительно преобразований векторов q и \mathbf{n} , приведенных в табл. 1. В первой строке таблицы указаны значения компонент этих векторов, которые назовём номинальными. Эти значения задают некоторую функцию $\eta^*(t)$. Во второй и последующих строках приведены преобразованные компоненты векторов q и \mathbf{n} , задающие ту же самую функцию $\eta^*(t)$. Поскольку компоненты n_i ($i=1, 2, 3$) неизменны и удовлетворяют условиям $|n_2| \ll |n_1|$, $|n_3| \ll |n_1|$, $n_1 < 0$, при минимизации функционала (5) для каждого исследуемого отрезка времени следует рассматривать четыре значения q , приближённо соответствующие первым четырём строкам таблицы 1. Для выбора значения q , отвечающего фактическому движению КА, проводился анализ полученных оценок компонент суммарного кинетического момента $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ двигателей-маховиков. Так как на всём рассматриваемом интервале движения КА один из двигателей-маховиков был отключён, то область вариации указанного вектора была достаточно сильно

сжата в направлении оси вращения неработающего маховика. В связи с этим, практически во всех рассмотренных случаях из четырёх найденных значений \mathbf{h} только одно удовлетворяло условию нахождения внутри области вариации суммарного кинетического момента. Это значение и принималось в качестве искомого решения.

Таблица 1. Преобразования векторов q и \mathbf{n} , инвариантные для $\eta(t)$.

№	компоненты q								компоненты \mathbf{n}		
1	δ_0	β_0	ω_{10}	ω_{20}	ω_{30}	h_1	h_2	h_3	n_1	n_2	n_3
2	$-\delta_0$	β_0	$-\omega_{10}$	$-\omega_{20}$	ω_{30}	$-h_1$	$-h_2$	h_3	n_1	n_2	$-n_3$
3	δ_0	$-\beta_0$	$-\omega_{10}$	ω_{20}	$-\omega_{30}$	$-h_1$	h_2	$-h_3$	n_1	$-n_2$	n_3
4	$-\delta_0$	$-\beta_0$	ω_{10}	$-\omega_{20}$	$-\omega_{30}$	h_1	$-h_2$	$-h_3$	n_1	$-n_2$	$-n_3$
5	$-\delta_0$	$\pi + \beta_0$	ω_{10}	ω_{20}	ω_{30}	h_1	h_2	h_3	$-n_1$	$-n_2$	$-n_3$
6	δ_0	$\pi + \beta_0$	$-\omega_{10}$	$-\omega_{20}$	ω_{30}	$-h_1$	$-h_2$	h_3	$-n_1$	$-n_2$	n_3
7	$-\delta_0$	$\pi - \beta_0$	$-\omega_{10}$	ω_{20}	$-\omega_{30}$	$-h_1$	h_2	$-h_3$	$-n_1$	n_2	$-n_3$
8	δ_0	$\pi - \beta_0$	ω_{10}	$-\omega_{20}$	$-\omega_{30}$	h_1	$-h_2$	$-h_3$	$-n_1$	n_2	n_3

Минимизация функционала (5) выполнялась в два этапа: сначала методом случайного поиска находилось грубое приближение q , которое затем уточнялось методом Левенберга-Марквардта.

3. Реализация метода Левенберга-Марквардта. Применение этого метода в задачах определения вращательного движения спутников по данным измерений бортовых датчиков описано в [3, 4, 5]. Метод является одним из вариантов метода Гаусса-Ньютона. На каждой итерации этого метода поправка Δq , уточняющая имеющееся приближённое значение q , определяется системой

$$[C(q) + \nu E_8] \Delta q = d(q), \quad C(q) = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^8, \quad d(q) = \|d_i\|_{i=1}^8,$$

$$c_{ij} = I_0^2 \sum_{n=1}^N \frac{\partial \eta(t_n)}{\partial q_i} \frac{\partial \eta(t_n)}{\partial q_j} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(q)}{\partial q_i \partial q_j}, \quad d_i = I_0 \sum_{n=1}^N [I_n - I_0 \eta(t_n)] \frac{\partial \eta(t_n)}{\partial q_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q_i}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial q_k} = \sum_{j,n,m=1}^3 e_{jnm} n_j a_{1n} \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_k}.$$

Здесь $C(q)$ – матрица системы нормальных уравнений, ν – положительный параметр, E_8 – единичная матрица порядка 8, e_{jnm} – символ Леви-Чивиты, $\partial \varphi_k / \partial q_i$ – псевдопроизводные [3], служащие для представления истинных производных $\partial \eta / \partial q_k$.

Значения $\partial \varphi_m(t_n) / \partial q_k$ ($k = 1, \dots, 8$) определяются в процессе интегрирования уравнений

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_m}{\partial q_k} = \sum_{j,l=1}^3 e_{mj l} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \omega_l + \frac{\partial \omega_m}{\partial q_k}$$

совместно с уравнениями (1) и уравнениями в вариациях относительно $\partial \omega_m / \partial q_k$. Ненулевые начальные условия $\partial \varphi_m(t_1) / \partial q_k$ и $\partial \omega_m(t_1) / \partial q_k$ имеют вид

$$\frac{\partial \omega_m(t_1)}{\partial \omega_{m0}} = 1, \quad \frac{\partial \varphi_1(t_1)}{\partial \delta_0} = \sin \beta_0, \quad \frac{\partial \varphi_2(t_1)}{\partial \delta_0} = \cos \beta_0, \quad \frac{\partial \varphi_3(t_1)}{\partial \beta_0} = 1.$$

Точность аппроксимации данных (4) и разброс в определении компонент $q_* = \arg \min \Phi$ будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Стандартное отклонение ошибок в значениях I_n находится по формуле

$$\sigma_* = \sqrt{\frac{\Phi(q_*)}{N-8}},$$

стандартные отклонения компонент вектора q_* равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы $\sigma_*^2 C^{-1}(q_*)$. Ниже стандартные отклонения величин δ , β , ω_i , h_i будем обозначать σ_δ , σ_β , σ_{ω_i} , σ_{h_i} .

4. Поиск начального приближения. Чтобы алгоритм минимизации Левенберга-Марквардта был надёжен, необходимо иметь достаточно точное начальное приближение точки минимума. Последнее находилось методом случайного поиска с обучением [5, 6]. При этом функционал (5) рассматривался на укороченном начальном отрезке данных (4) и считался функцией четырёх переменных. Для сокращения числа переменных использовались следующие соображения [5]. Начальный угол χ_0 (рис. 1) между направлением на Солнце и нормалью к рабочей поверхности СБ в момент t_1 фиксировался и вычислялся по формуле $\chi_0 = \arccos[I(t_0)/I_0]$. Этот угол инвариантен по отношению к произвольным поворотам системы $x_1 x_2 x_3$ вокруг ортов \mathbf{S} и \mathbf{n} . Как указывалось выше, поворот на произвольный угол вокруг \mathbf{S} не влияет на характер зависимости $\eta(t)$. Напомним, что этот поворот соответствует углу γ , $\gamma(t_1) = 0$. Искомое начальное угловое положение КА, описываемое матрицей $A(t_1)$, можно параметризовать единственным углом ψ поворота вокруг \mathbf{n} . Параметризацию зададим в виде

$$A(t_1) = QM, \quad (8)$$

$$Q = \begin{vmatrix} k_1 & -k_2 p_2 & k_2 p_1 \\ 0 & p_1 & p_2 \\ -k_2 & -k_1 p_2 & k_1 p_1 \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ -n_2 b^{-1} & n_1 b^{-1} & 0 \\ -n_1 n_3 b^{-1} & -n_2 n_3 b^{-1} & b \end{vmatrix},$$

$$p_1 = \cos \psi, \quad p_2 = \sin \psi, \quad k_1 = \cos \chi_0, \quad k_2 = \sin \chi_0, \quad b = \sqrt{1 - n_3^2}.$$

Здесь Q – матрица поворота КА вокруг орта \mathbf{n} на угол ψ . Элементы матрицы Q зависят также от начального угла χ_0 между \mathbf{S} и \mathbf{n} . Соотношение (8) позволяет выразить углы δ_0 и β_0 в функции угла ψ :

$$\delta_0 = \arcsin(n_3 \cos \chi_0 + \sqrt{1-n_3^2} \sin \chi_0 \cos \psi),$$

$$\beta_0 = \arctan \left(\frac{n_2 \sqrt{1-n_3^2} \cos \chi_0 - \sin \chi_0 (n_1 \sin \psi + n_2 n_3 \cos \psi)}{n_1 \sqrt{1-n_3^2} \cos \chi_0 + \sin \chi_0 (n_2 \sin \psi - n_1 n_3 \cos \psi)} \right).$$

Для удобства выбора начального значения и последующего контроля величин угловой скорости КА и суммарного кинетического момента двигателей-маховиков, величины ω_{i0} и h_i ($i=1, 2, 3$) заменялись величинами $\omega_0 = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \omega_{30}^2}$, $\alpha_\omega = \arctan(\omega_{20}/\omega_{10})$, $\beta_\omega = \arcsin(\omega_{30}/\omega_0)$, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$, $\alpha_h = \arctan(h_2/h_1)$, $\beta_h = \arcsin(h_3/h_0)$.

Было известно, что КА до возникновения нештатной ситуации находился в орбитальной ориентации, а кинетический момент двигателей-маховиков был близок к нулю. Вращение КА после аварии было обусловлено в основном раскруткой двигателей-маховиков, поэтому угол между векторами кинетического момента корпуса КА и вектором \mathbf{h} был близок к 180° . С учётом этого обстоятельства, при подборе начальных значений принималось: $h = \tilde{k}\omega_0$, $\alpha_h = \alpha_\omega + \pi$, $\beta_h = -\beta_\omega$, $\tilde{k} = 0.02$. Таким образом, в процедуре случайного поиска для функционала (5) принималось упрощённое выражение $\Phi = \Phi(z)$, $z = (\psi, \omega_0, \alpha_\omega, \beta_\omega) \in R^4$. После окончания случайного поиска найденное значение z пересчитывалось в значение q , которое служило начальным приближением для вычислений по методу Левенберга-Марквардта.

5. Результаты определения вращательного движения КА. Определение фактического движения КА относительно центра масс по данным (4) было выполнено на 10 интервалах времени. Основные характеристики этих интервалов приведены в табл. 2. Здесь для каждого интервала указаны: дата и декретное московское время первого измерения t_1 , длина интервала $t_N - t_1$, число N включённых в обработку измерений. Полученные результаты представлены в табл. 3÷5 и на рис. 4÷13. В табл. 3÷5 приведены результаты минимизации функционала (5) на интервалах из таблицы 2. Здесь указаны значения компонент вектора q_* , стандартные отклонения этих компонент и стандартное отклонение σ ошибок данных (4). Стандартные отклонения σ_δ не превышали 3.6° , стандартные отклонения σ_β не превышали 2.4° . Максимальные значения σ_{ω_i} составили для $\sigma_{\omega_1} - 0.023$ град/с, для $\sigma_{\omega_2} - 0.032$ град/с, для $\sigma_{\omega_3} - 0.011$ град/с. Максимальные значения σ_{h_i} составили для $\sigma_{h_1} - 0.00041$ с⁻¹, для $\sigma_{h_2} - 0.00046$ с⁻¹, для $\sigma_{h_3} - 0.00008$ с⁻¹.

Интервал 1 данных получен приблизительно через сутки после развития нештатной ситуации, интервалы 2÷8 охватывают промежутки времени с 17

Таблица 2. Интервалы определения вращательного движения КА.

Интервал	дата, д.м.г	t_1 , ч:мин:с	$t_N - t_1$, ч:мин:с	N	№ рисунка
1	09.06.2008	0:15:07	5:53:35	1376	4
2	17.08.2008	9:48:30	5:59:53	1827	5
3	24.08.2008	5:37:05	5:58:23	2069	6
4	26.08.2008	6:49:53	5:59:54	1830	7
5	27.08.2008	8:42:05	5:59:52	2110	8
6	31.08.2008	2:24:27	5:03:13	1554	9
7	03.09.2008	13:39:12	6:23:31	2094	10
8	09.09.2008	11:22:35	6:06:25	2053	11
9	10.09.2008	0:07:23	11:35:03	589	12
10	10.09.2008	17:12:19	9:35:56	5505	13

Таблица 3. Результаты минимизации.

Интервал	σ	δ	σ_δ	β	σ_β
1	2.974	0.31199	0.03900	1.23018	0.00563
2	3.357	-0.64916	0.05631	1.14186	0.01139
3	3.092	0.57683	0.04707	1.50056	0.02037
4	3.414	-0.50656	0.06364	1.23437	0.01468
5	3.865	0.86076	0.05365	1.34895	0.02906
6	2.825	0.56919	0.02550	1.95823	0.02719
7	3.350	0.54848	0.01322	2.01988	0.01525
8	3.430	0.50214	0.02288	1.73473	0.01300
9	3.348	-1.15075	0.01110	2.98700	0.04117
10	3.854	-0.40923	0.00892	1.06579	0.00429

Таблица 4. Результаты минимизации.

Интервал	ω_{10}	σ_{ω_1}	ω_{20}	σ_{ω_2}	ω_{30}	σ_{ω_3}
1	-0.00560	0.00020	-0.00203	0.00025	0.00851	0.00009
2	-0.00474	0.00038	-0.00458	0.00050	0.01113	0.00002
3	-0.00375	0.00035	-0.00567	0.00046	0.00997	0.00012
4	-0.00295	0.00041	-0.00612	0.00056	0.01094	0.00020
5	-0.00391	0.00038	-0.00575	0.00050	0.01058	0.00011
6	-0.00391	0.00033	-0.00515	0.00044	0.01087	0.00006
7	-0.00519	0.00019	-0.00365	0.00026	0.01133	0.00003
8	-0.00511	0.00022	-0.00399	0.00029	0.01125	0.00002
9	0.00071	0.00000	-0.00022	0.00001	-0.00002	0.00001
10	0.00073	0.00001	-0.00057	0.00003	0.00118	0.00002

Таблица 5. Результаты минимизации.

Интервал	\tilde{h}_1	σ_{h_1}	\tilde{h}_2	σ_{h_2}	\tilde{h}_3	σ_{h_3}
1	0.00594	0.00020	0.00216	0.00022	-0.00324	0.00003
2	0.00457	0.00038	0.00409	0.00041	-0.00402	0.00002
3	0.00359	0.00036	0.00479	0.00040	-0.00391	0.00005
4	0.00308	0.00041	0.00540	0.00046	-0.00392	0.00008
5	0.00364	0.00038	0.00493	0.00043	-0.00398	0.00006
6	0.00372	0.00033	0.00467	0.00037	-0.00404	0.00004
7	0.00521	0.00019	0.00352	0.00021	-0.00403	0.00000
8	0.00500	0.00022	0.00379	0.00024	-0.00401	0.00001
9	-0.00060	0.00000	0.00008	0.00000	-0.00004	0.00000
10	-0.00064	0.00000	0.00038	0.00002	-0.00009	0.00000

августа по 9 сентября – до момента выключения двигателей-маховиков. Интервалы 9, 10 получены во время полёта КА с остановленными двигателями-маховиками. Анализ найденных угловых скоростей КА и суммарного кинетического момента двигателей-маховиков показал следующее. На интервалах движения 1÷8 суммарный кинетический момент системы корпус КА – двигатели-маховики не превышал 2 Нмс, а кинетический момент корпуса КА находился в диапазоне 20÷22 Нмс. На интервалах 9 и 10 суммарный кинетический момент составлял ~1 Нмс, а кинетический момент корпуса КА не превышал величины 2.2 Нмс. При этом на всех интервалах движения КА вектор суммарного кинетического момента двигателей-маховиков занимал произвольное положение в системе $x_1x_2x_3$.

Угловое движение КА представляло собой суперпозицию быстрого вращения корпуса КА вокруг оси, малоподвижной в системе $x_1x_2x_3$ (данная ось близка по направлению к вектору кинетического момента двигателей-маховиков), и медленного вращения этой оси вокруг вектора суммарного кинетического момента КА с маховиками.

Для наглядного представления углового движения КА можно было бы использовать графики углов γ , δ , β . Однако для найденного движения КА такое представление не обладает наглядностью. В связи с этим, поступим следующим образом. Введём обозначения (рис. 2): $\mathbf{L}_{КА}$ – вектор кинетического момента корпуса КА, $\mathbf{L}_{КУДМ}$ – вектор кинетического момента двигателей-маховиков, \mathbf{L}_{Σ} – вектор суммарного кинетического момента КА с маховиками. Для указанных векторов выполняется равенство $\mathbf{L}_{\Sigma} = \mathbf{L}_{КА} + \mathbf{L}_{КУДМ}$. Вектор $\mathbf{L}_{КУДМ}$ неподвижен в системе $x_1x_2x_3$, вектор \mathbf{L}_{Σ} неподвижен в системе $X_1X_2X_3$. Иллюстрировать характер движения КА будем с помощью проекций годографа $\mathbf{L}_{КА}$ на координатные плоскости системы $l_1l_2l_3$ (рис. 3), связанной с вектором суммарного кинетического момента [6]. Эта система определяется следующим образом: ось l_2 совпадает по направлению с \mathbf{L}_{Σ} ; ось l_1 лежит в плоскости l_2X_1 , перпендикулярна \mathbf{L}_{Σ} и образует острый угол с осью X_1 ; ось l_3 дополняет систему координат до правой.

На рисунках 4÷13 представлена реконструкция вращательного движения КА указанным способом. Все рисунки скомпонованы одинаково, они содержат проекции годографа $\mathbf{L}_{КА}$ на плоскости системы координат $l_1l_2l_3$, графики величин $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$, $I(t)$. На графиках угловых скоростей КА применены условные обозначения: круглые маркеры чёрного цвета – ω_1 , круглые маркеры белого цвета – ω_2 , квадратные маркеры – ω_3 . На графиках расчётного тока СБ $I(t)$ маркерами указаны аппроксимируемые данные измерений (4).

Таблица 6. Угловые скорости КА и двигателей-маховиков.

Интервал	ω_1 град/с	ω_2 град/с	ω_3 град/с	$ \omega $ град/с	N_1 об/мин	N_2 об/мин	N_4 об/мин
1	-0.351	-0.008	0.480	0.595	4261	2680	-1748
2	-0.355	-0.164	0.629	0.741	2268	4877	-665
3	-0.321	-0.241	0.563	0.692	1123	5466	-268
4	-0.287	-0.281	0.619	0.738	426	5976	-67
5	-0.331	-0.243	0.598	0.725	1114	5589	-281
6	-0.320	-0.211	0.615	0.725	1289	5461	-223
7	-0.362	-0.105	0.642	0.744	3065	4377	-942
8	-0.364	-0.125	0.636	0.744	2774	4578	-883
9	0.035	-0.025	-0.001	0.043	-554	227	410
10	0.028	-0.045	0.068	0.086	-718	469	407

Таблица 7. Кинетический момент двигателей-маховиков, суммарный кинетический момент и пространственные углы между векторами (рис. 2).

Ин-тервал	$L_{КУДМ1}$	$L_{КУДМ2}$	$L_{КУДМ3}$	$ L_{КУДМ} $	$L_{\Sigma 1}$	$L_{\Sigma 2}$	$L_{\Sigma 3}$	$ L_{\Sigma} $	$L_{КА} \wedge L_{КУДМ}$	$S \wedge L_{\Sigma}$
	В системе $Ox_1x_2x_3$				В системе $OX_1X_2X_3$				град	град
1	0.84	0.30	-0.46	20.90	-0.61	0.79	-0.09	1.76	177.3	127.3
2	0.62	0.56	-0.55	21.58	-0.80	-0.15	-0.58	0.93	177.5	143.3
3	0.50	0.67	-0.55	21.05	-0.64	-0.45	-0.62	1.04	177.3	130.0
4	0.42	0.73	-0.53	21.63	-0.69	0.67	-0.26	0.93	178.4	134.0
5	0.50	0.67	-0.54	21.49	-0.70	-0.70	0.11	0.97	177.4	134.7
6	0.52	0.65	-0.56	21.21	-0.67	-0.74	0.12	1.25	177.0	131.7
7	0.70	0.47	-0.54	21.99	-0.70	-0.40	0.59	1.41	176.6	134.4
8	0.67	0.51	-0.54	21.92	-0.75	-0.37	0.55	1.39	176.5	138.7
9	-0.99	0.13	-0.07	1.79	0.03	0.73	-0.68	0.47	172.0	88.4
10	-0.85	0.51	-0.12	2.22	-0.06	0.09	0.99	1.06	160.6	93.7

На всех рассмотренных интервалах, за исключением двух последних, вращательное движение КА носит одинаковый характер. Отличие состоит лишь в изменении ориентации вектора суммарного кинетического момента двигателей-маховиков в связанных осях КА и как следствие – изменение относительной ориентации векторов $\mathbf{L}_{КА}$ и \mathbf{L}_{Σ} . На последних двух интервалах движение КА более медленное, так как скорости вращения двигателей-маховиков были значительно снижены. В таблицах 6, 7 представлены некоторые величины, рассчитанные на основе полученных при минимизации параметров движения КА. В таблице 6 приведены угловые скорости КА и двигателей-маховиков. Можно отметить, что модуль угловой скорости КА находился в диапазоне $0.6 \div 0.75$ град/с, наибольшую угловую скорость КА имел по оси Ox_3 . В таблице отсутствуют данные по угловой скорости вращения третьего двигателя-маховика, так как этот маховик был остановлен. В таблице 7 приведены модули векторов $\mathbf{L}_{КУДМ}$ и \mathbf{L}_{Σ} , и компоненты соответствующих ортов. В таблице также приведены углы между векторами $\mathbf{L}_{КУДМ}$ и $\mathbf{L}_{КА}$ ($\mathbf{L}_{КУДМ} \wedge \mathbf{L}_{КА}$), и между векторами \mathbf{L}_{Σ} и \mathbf{S} ($\mathbf{L}_{\Sigma} \wedge \mathbf{S}$). Последний угол на всём рассматриваемом интервале времени (около трёх месяцев) медленно менялся в диапазоне от $\sim 130^\circ$ до $\sim 145^\circ$. Это изменение вызвано воздействием на вращающийся КА внешних факторов: световое давление, гравитационные моменты и др.

Не смотря на относительную простоту математической модели и принятых допущений, погрешность определения искомых параметров оказалось достаточно малой, что позволило успешно решить задачу определения угловых скоростей КА и кинетических моментов двигателей-маховиков, а также установить характер изменения этих величин во времени на аварийном участке полёта КА. Успешность решения данной конкретной задачи позволяет говорить о целесообразности применения в дальнейшем такого рода модели в задачах идентификации вращательного движения КА подобного класса.

Данная работа выполнена в рамках проекта РФФИ 08-01-00467.

Литература.

- [1] Модель верхней атмосферы для баллистических расчётов. ГОСТ 22721-77. М., Изд-во стандартов, 1978.
- [2] Меес Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. М., Мир, 1988.
- [3] В.А. Сарычев, В.В. Сазонов, М.Ю. Беляев, Н.И. Ефимов. Повышение точности определения вращательного движения орбитальных станций «Салют-6» и «Салют-7» по данным измерений. Космические исследования, 1991, т.29, с. 375 – 389.
- [4] Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В., Тянь Т.Н. Определение движения орбитальных станций «Салют-6» и «Салют-7» относительно центра масс в режиме медленной закрутки по данным измерений. Космические исследования. 1988, т. 24, N 3, с. 337 – 344.
- [5] А.А. Давыдов, В.В. Сазонов. Определение параметров вращательного движения КА «Монитор-Э» по телеметрическим данным о токе солнечных батарей. Москва. ИПМ им. М.В. Келдыша. Препринт №85 за 2009г.
- [6] Л.А. Растрин. Статистические методы поиска. Москва, Наука, 1968.
- [7] Белецкий В.В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Москва, Наука, 1965.

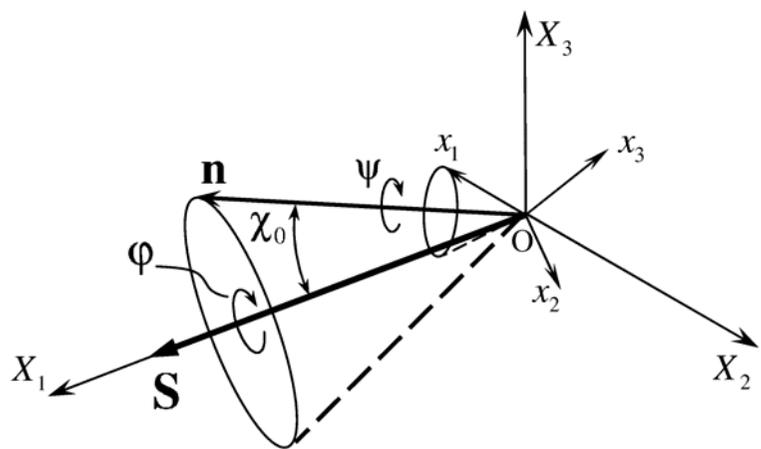


Рис. 1.

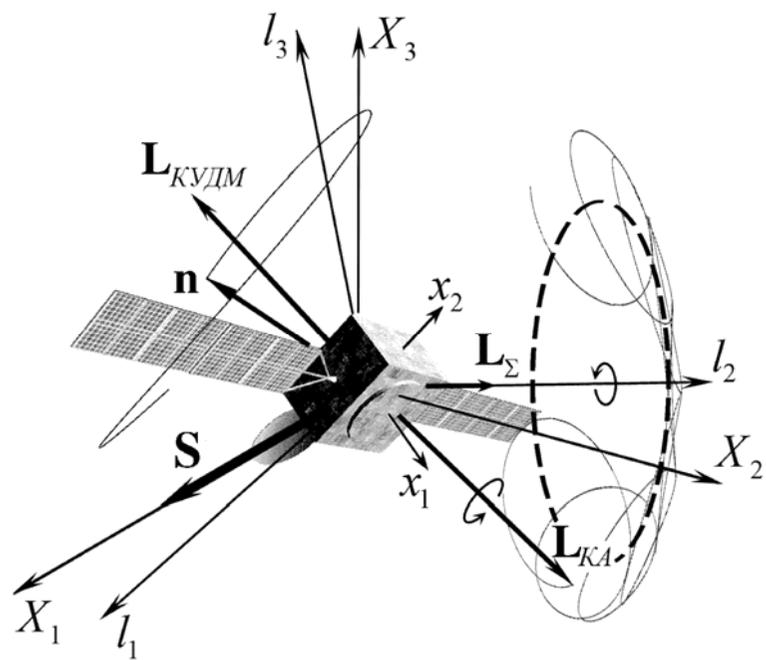


Рис. 2.

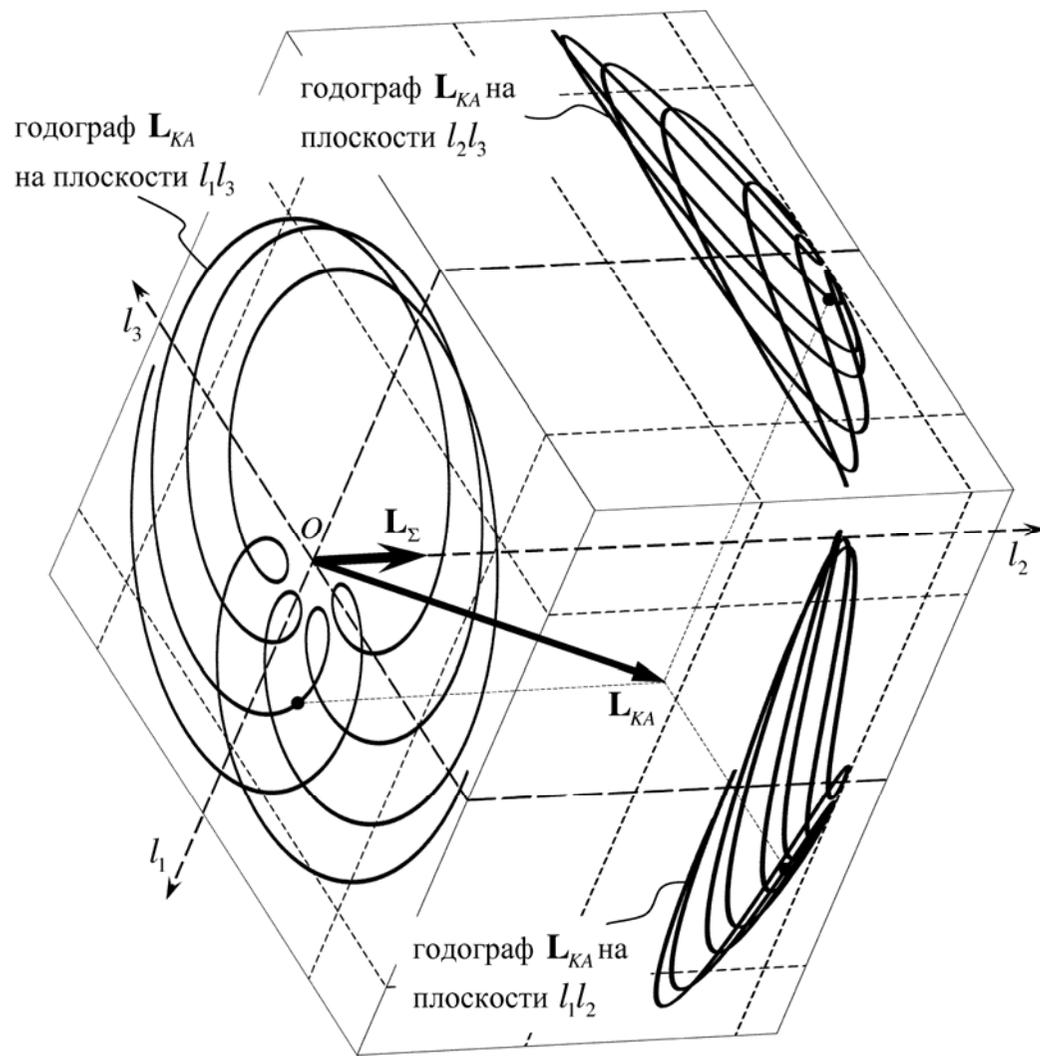
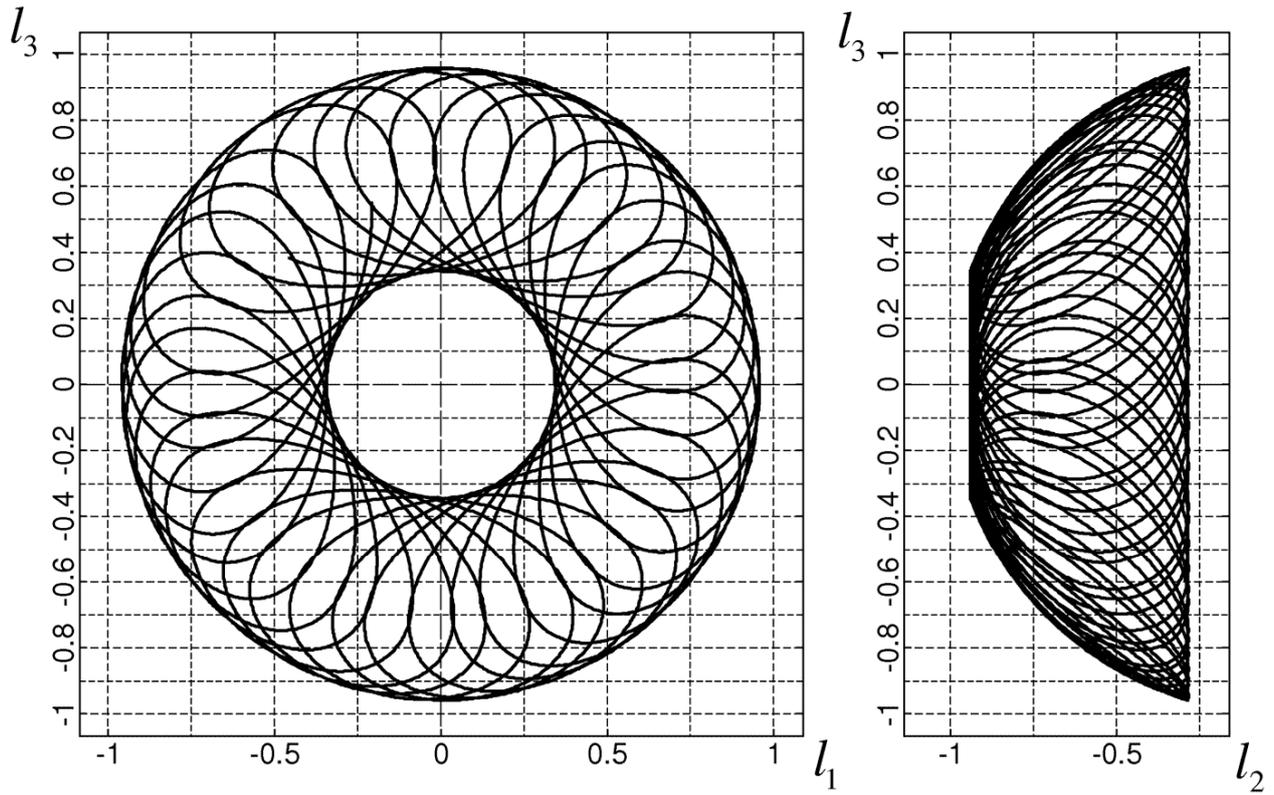
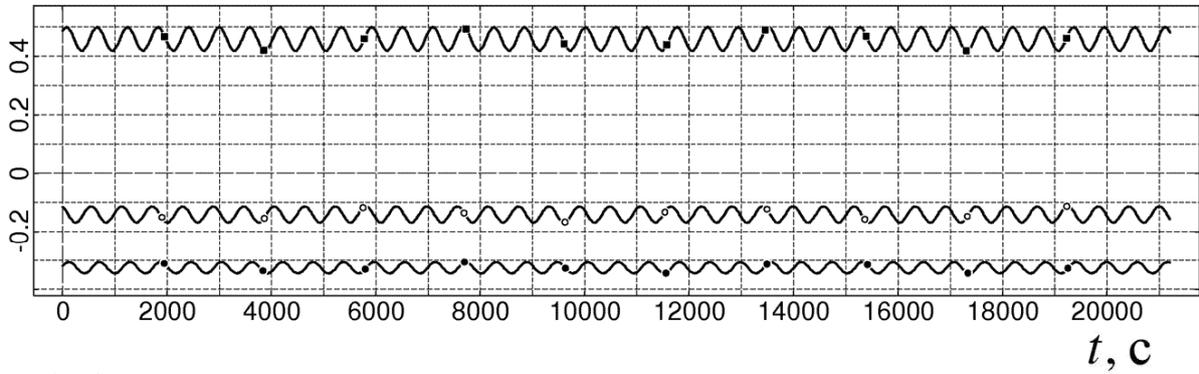


Рис. 3.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

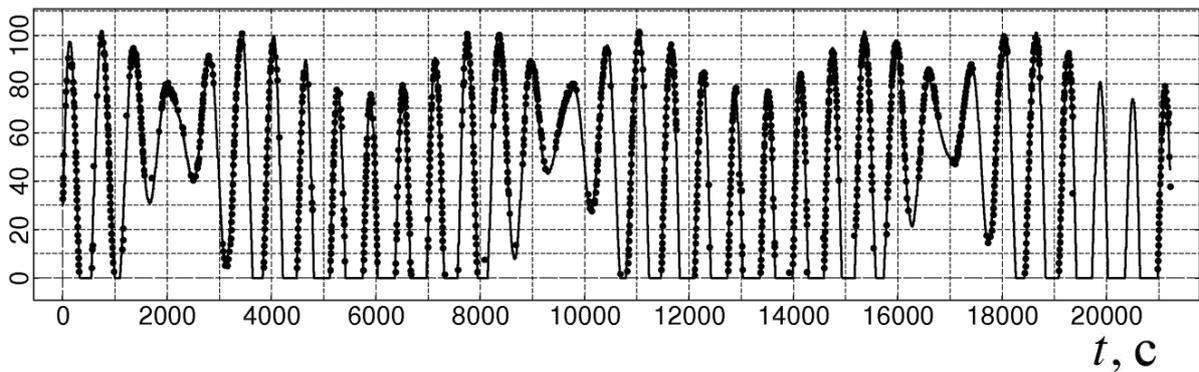
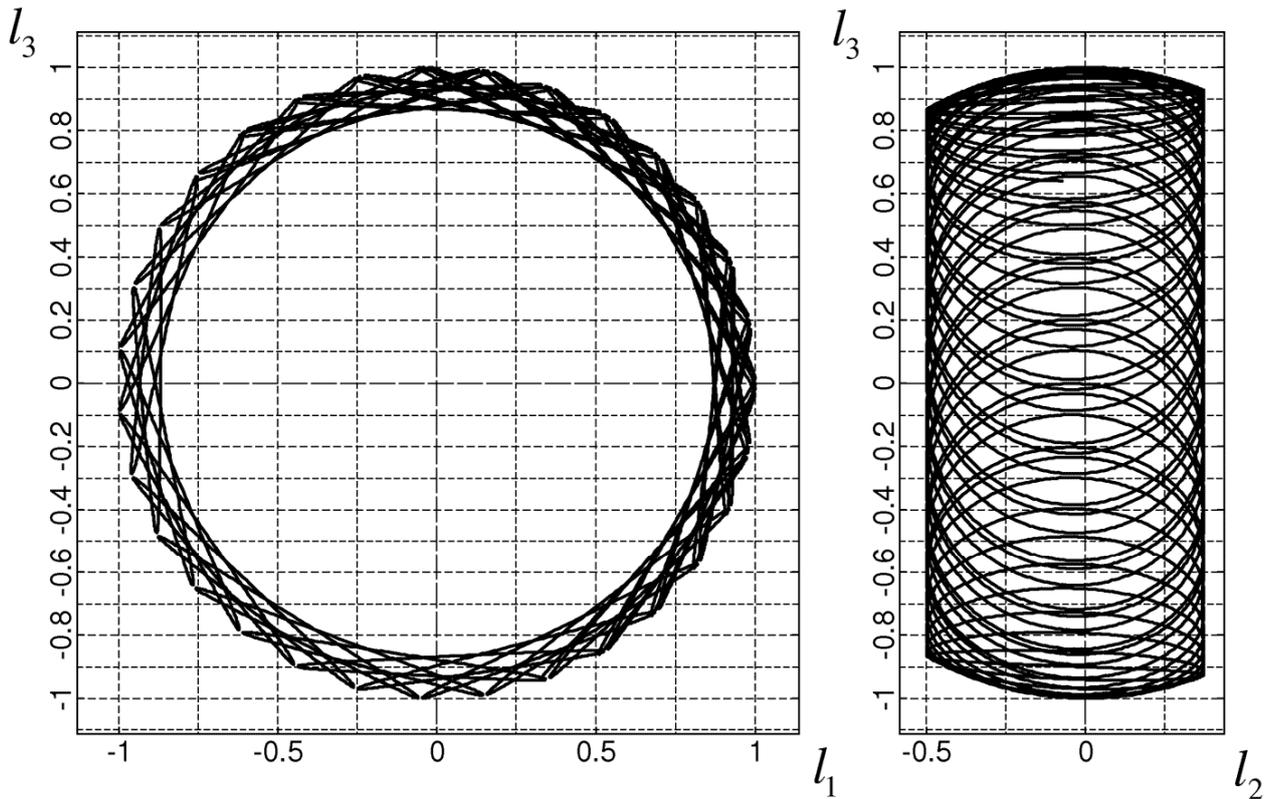
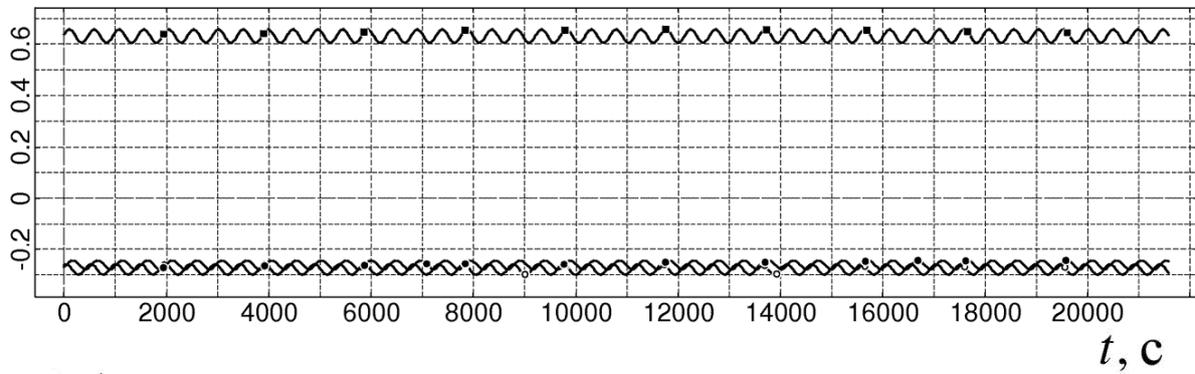


Рис. 4. Интервал 1, момент $t = 0$ соответствует 0:15:07 ДМВ 09.06.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

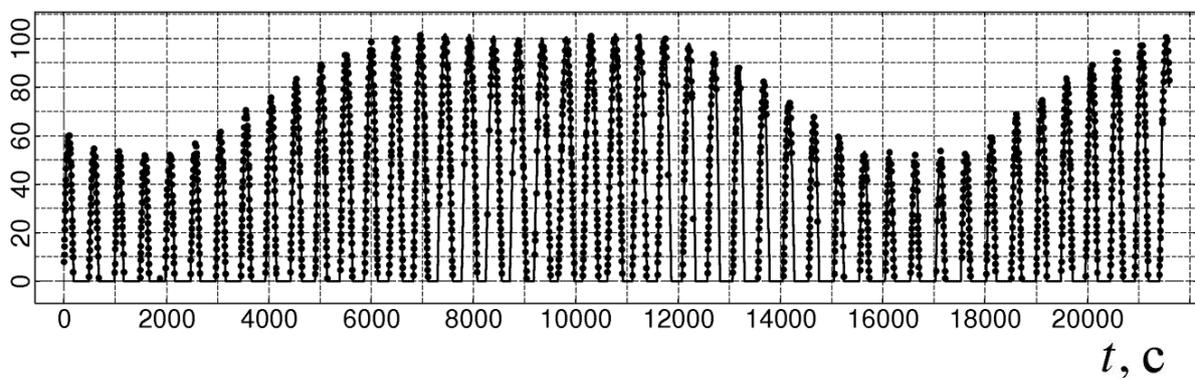
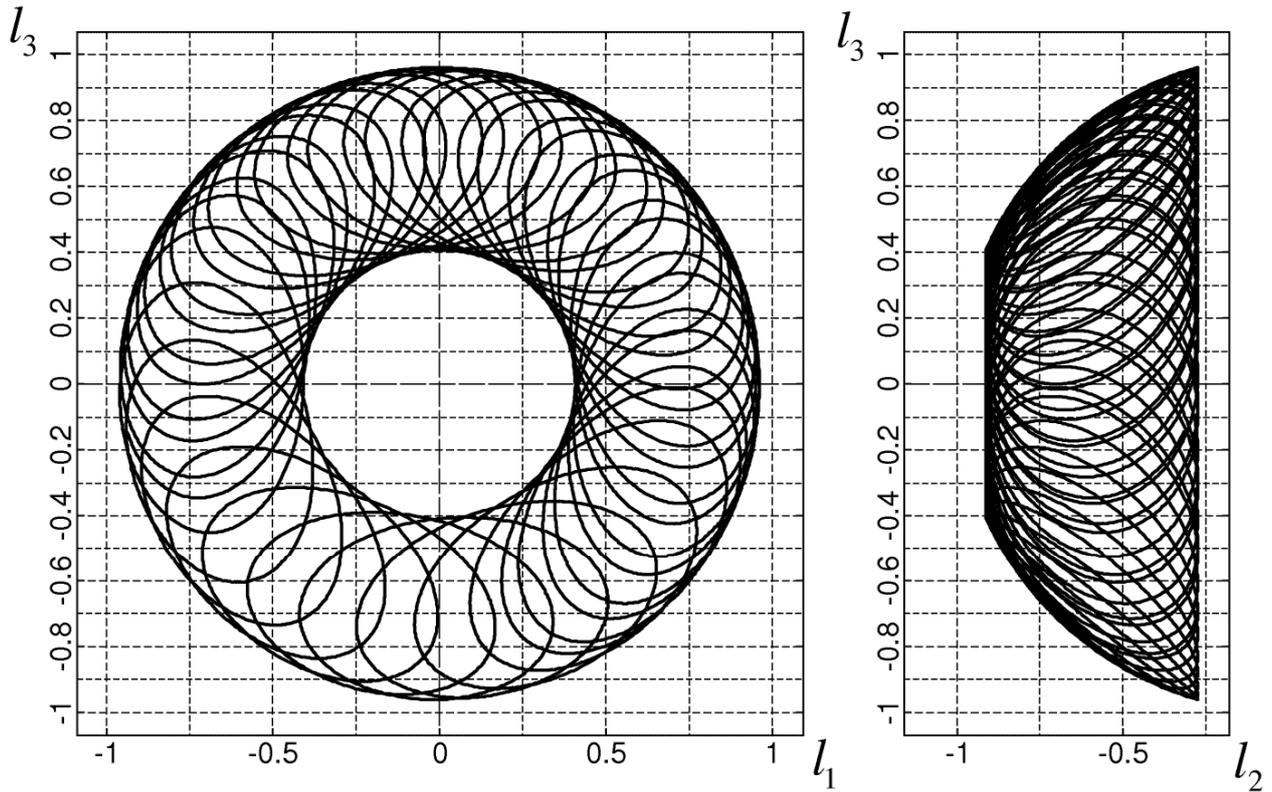
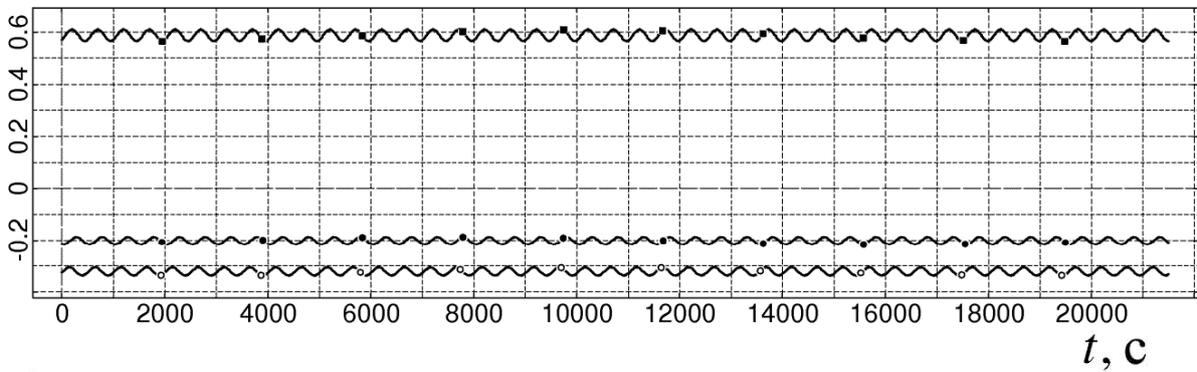


Рис. 5. Интервал 2, момент $t = 0$ соответствует 9:48:30 ДМВ 17.08.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

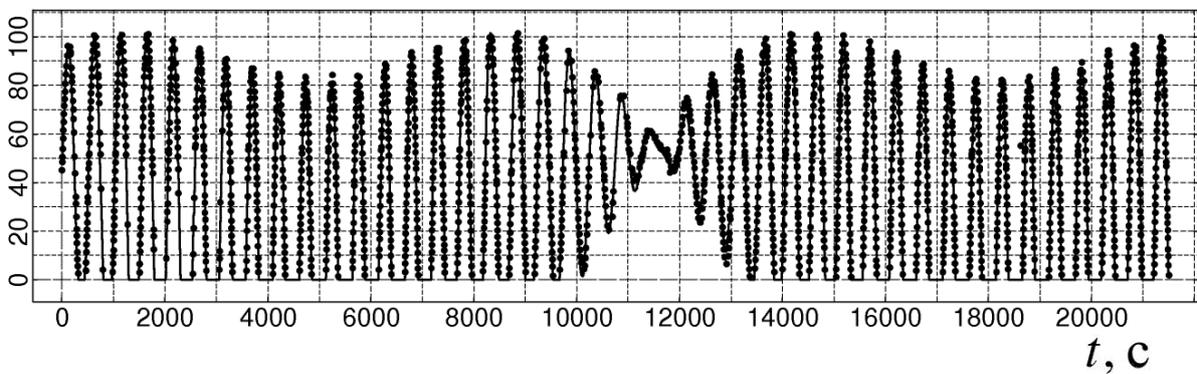
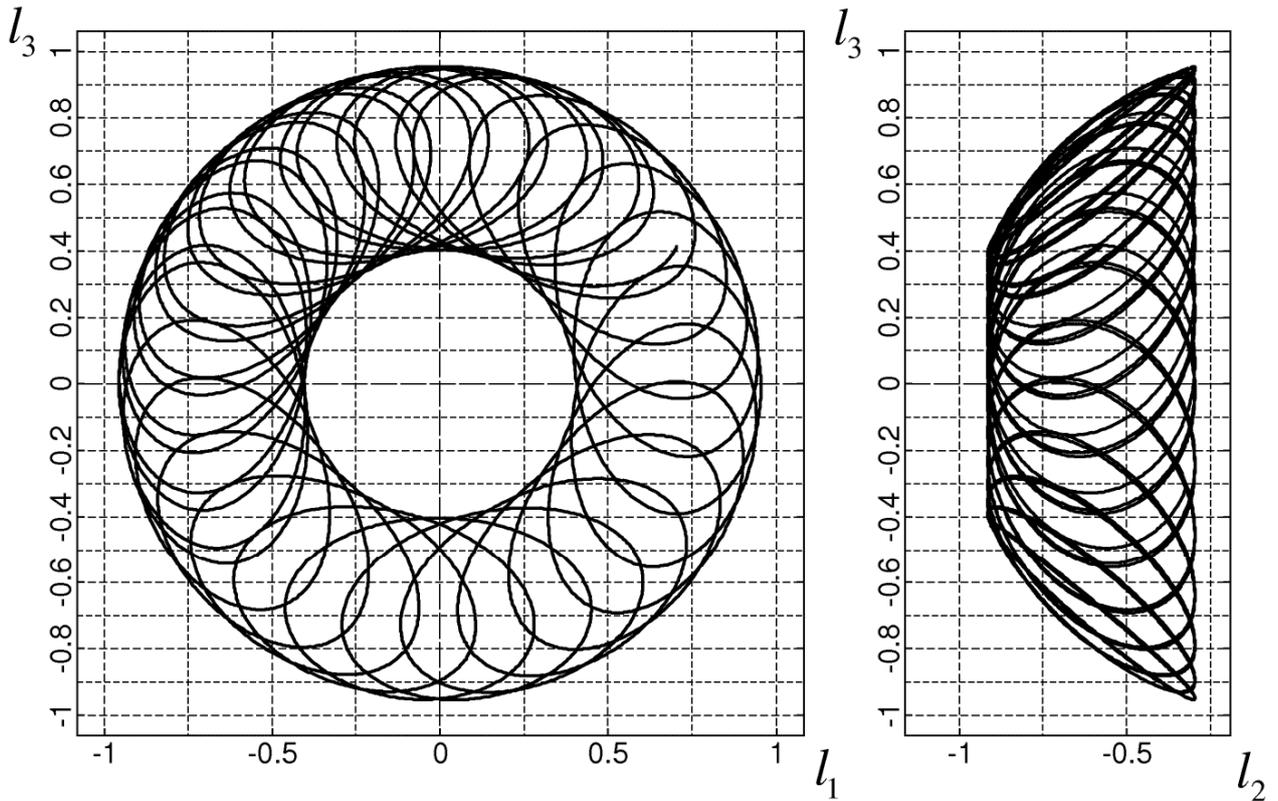
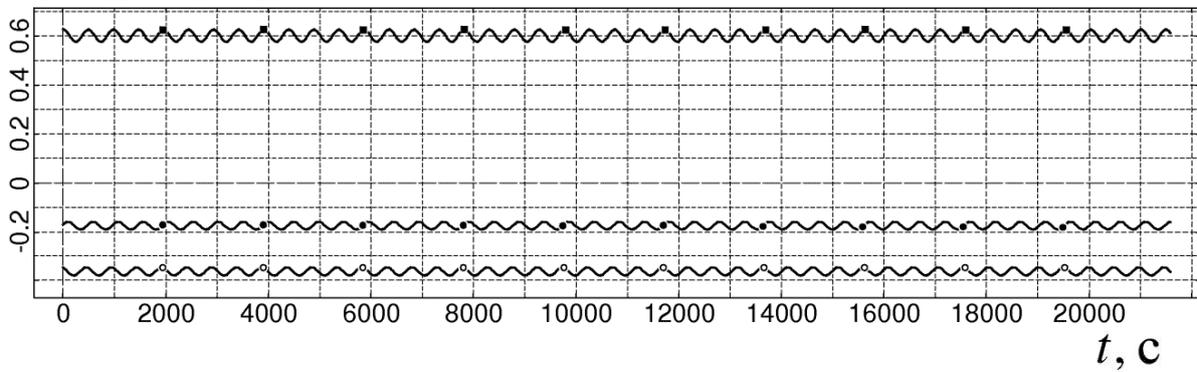


Рис. 6. Интервал 3, момент $t = 0$ соответствует 5:37:05 ДМВ 24.08.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

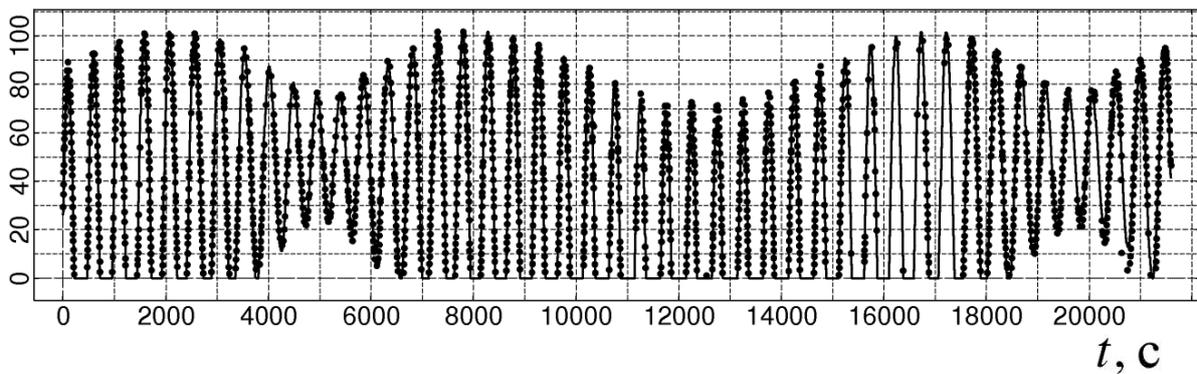
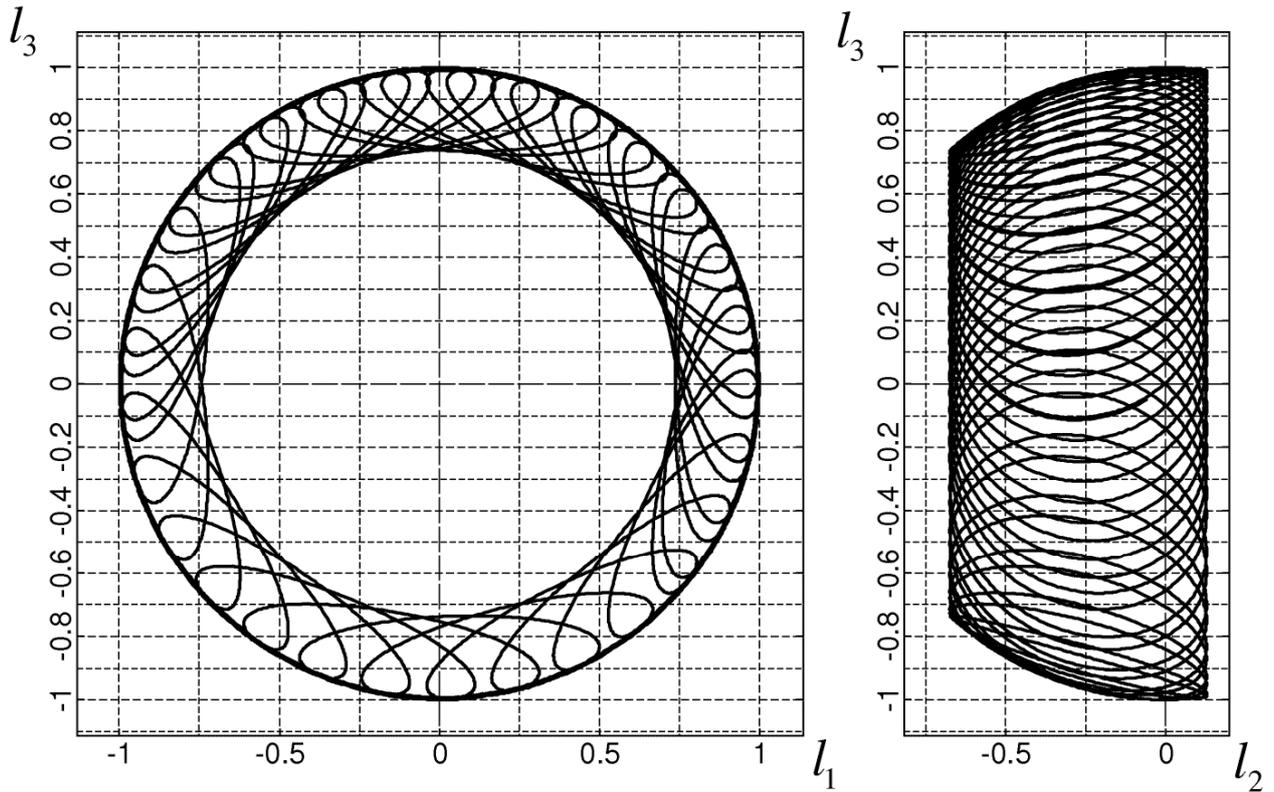
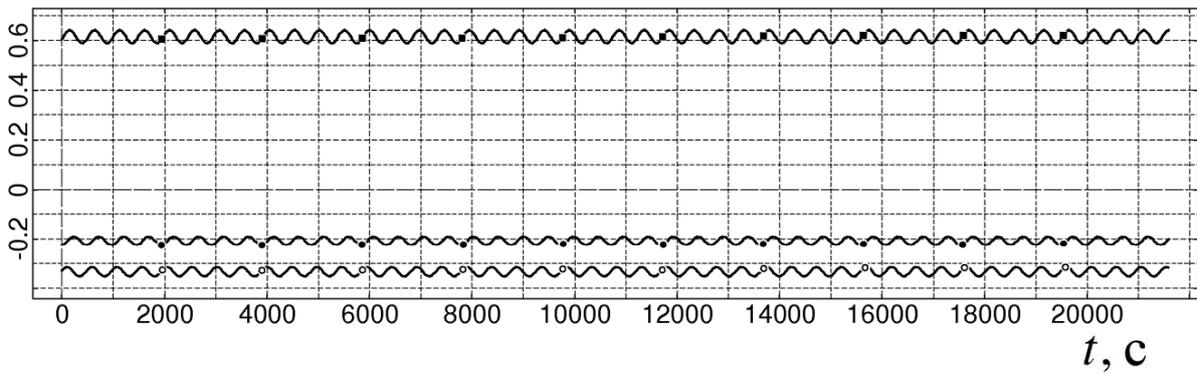


Рис. 7. Интервал 4, момент $t = 0$ соответствует 6:49:53 ДМВ 26.08.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

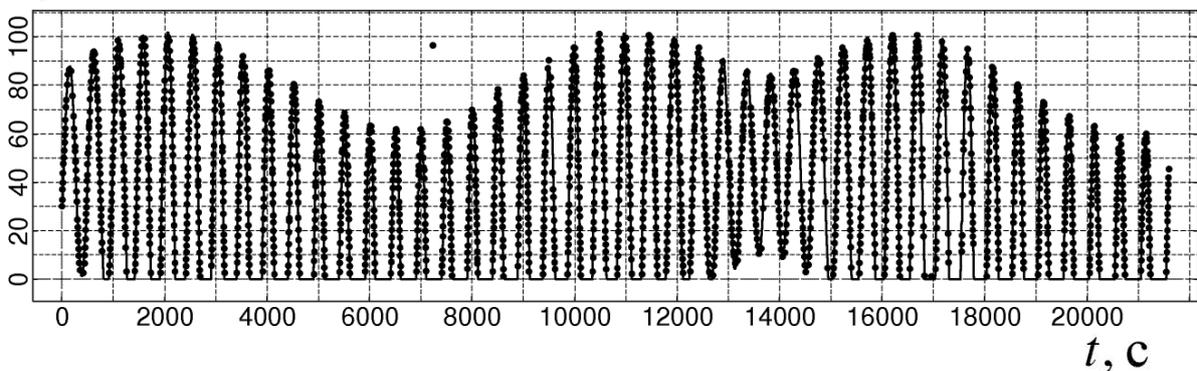
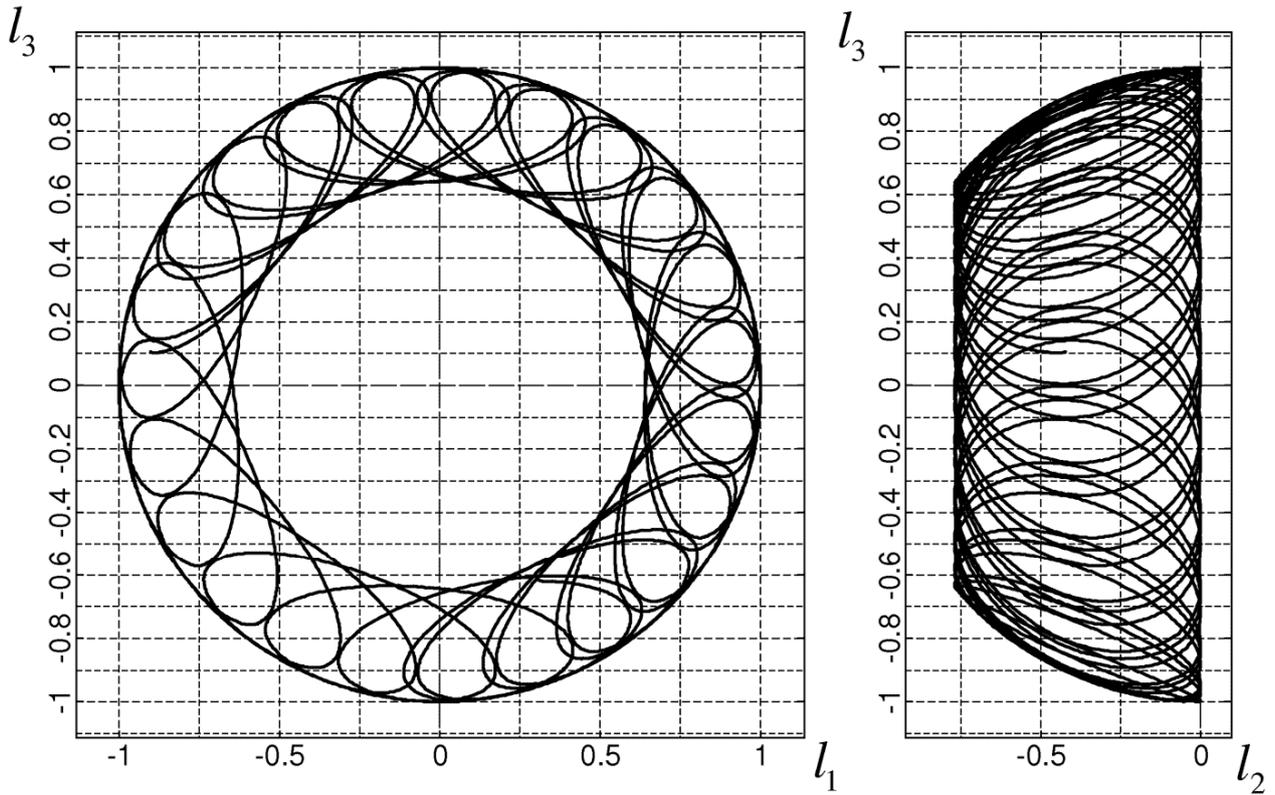
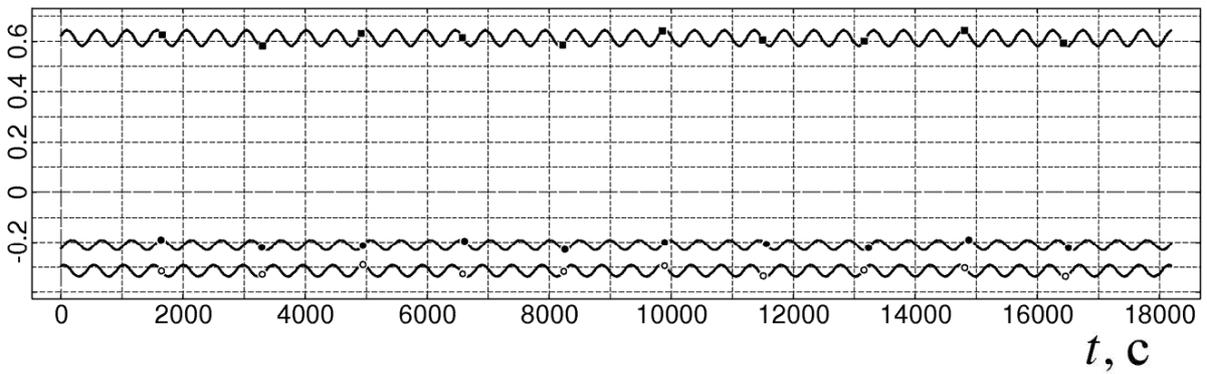


Рис. 8. Интервал 5, момент $t = 0$ соответствует 8:42:05 ДМВ 27.08.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

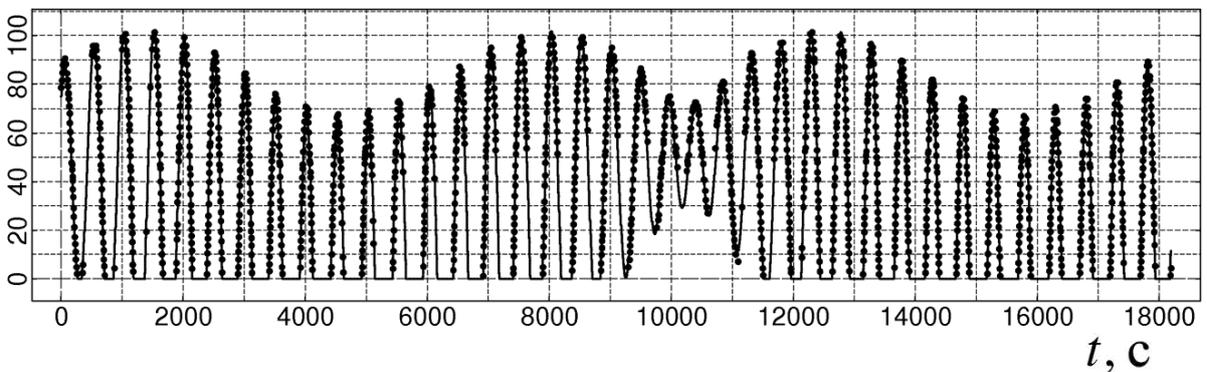
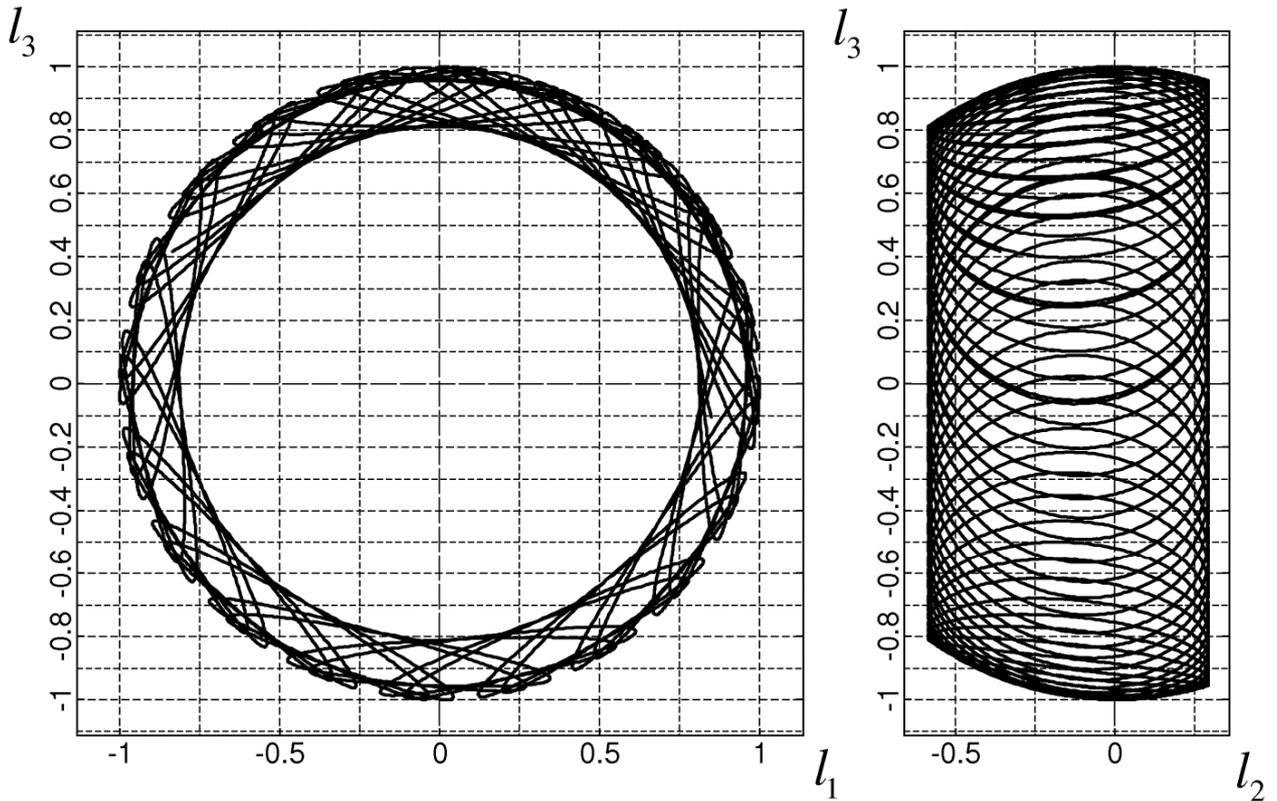
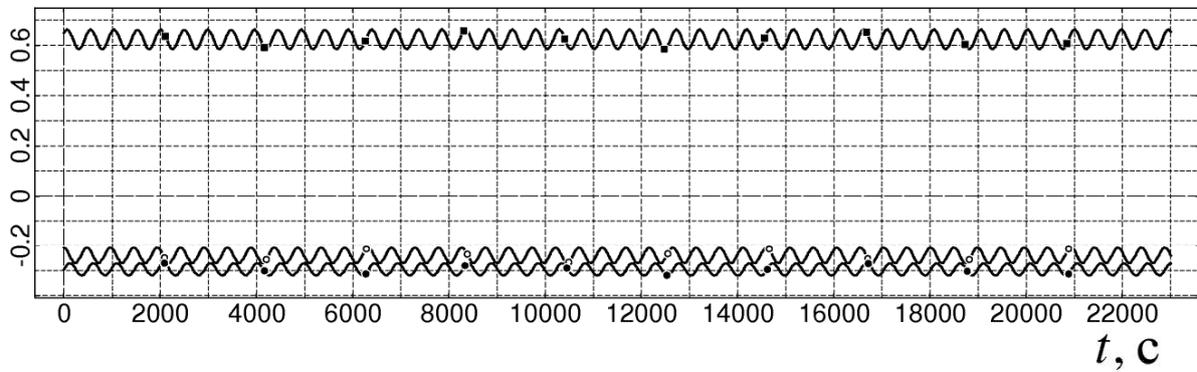


Рис. 9. Интервал 6, момент $t = 0$ соответствует 2:24:27 ДМВ 31.08.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

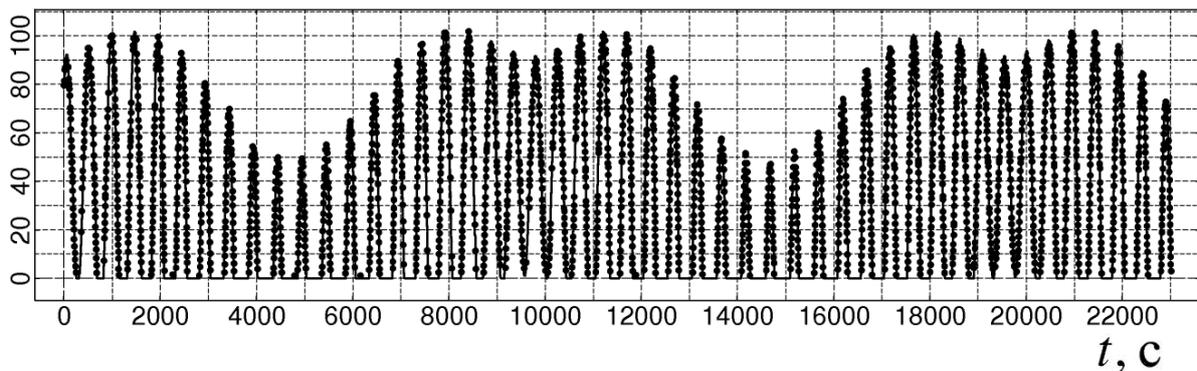
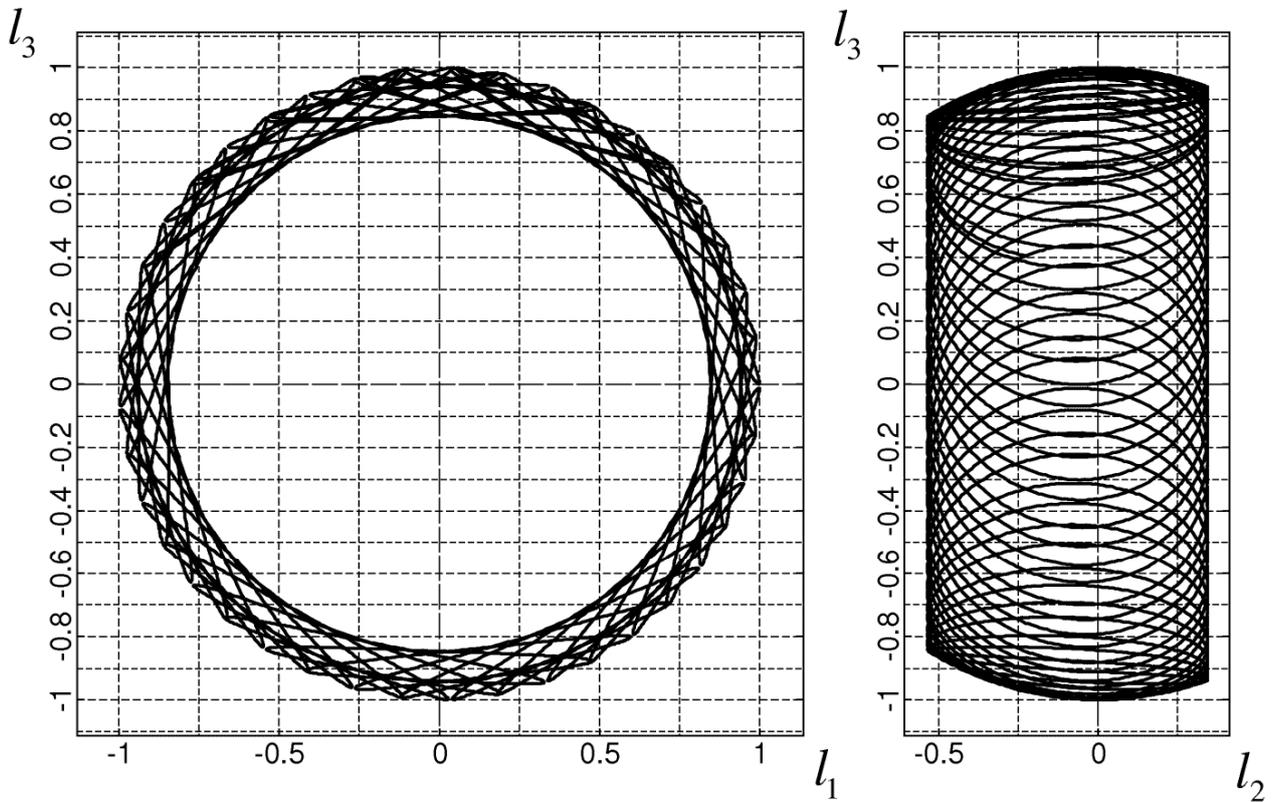
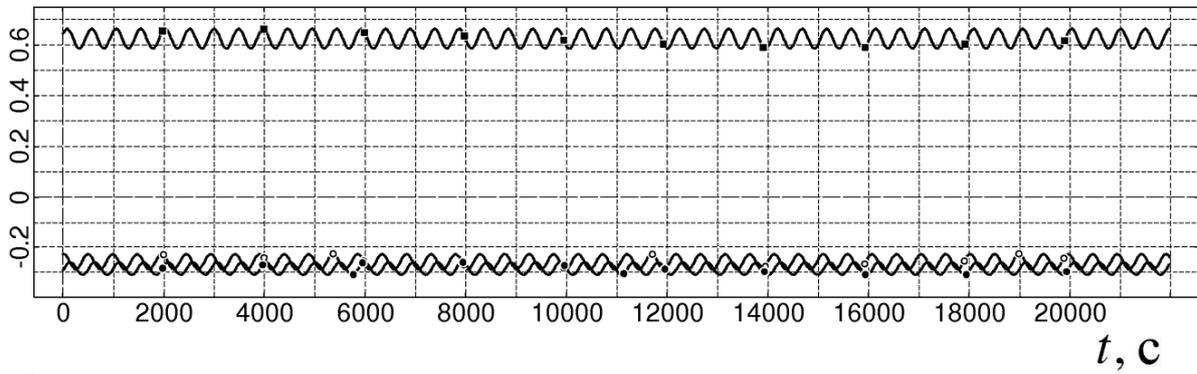


Рис. 10. Интервал 7, момент $t = 0$ соответствует 13:39:12 ДМВ 03.09.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

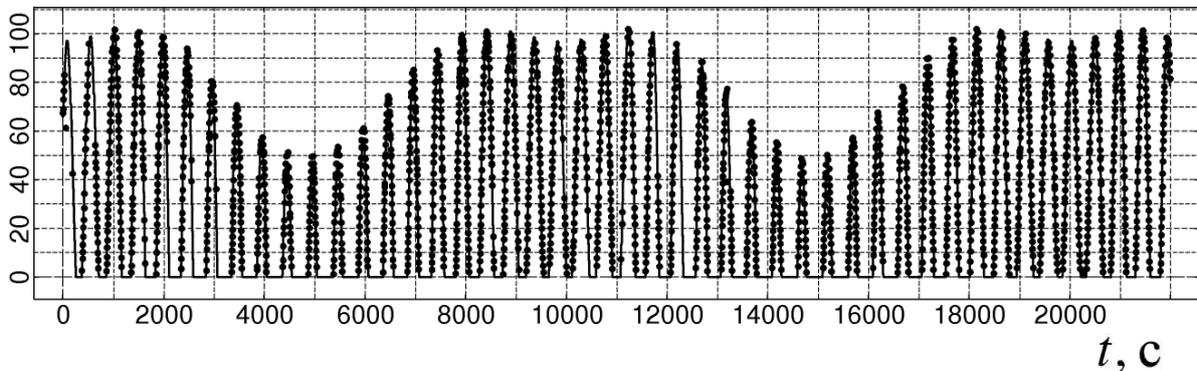
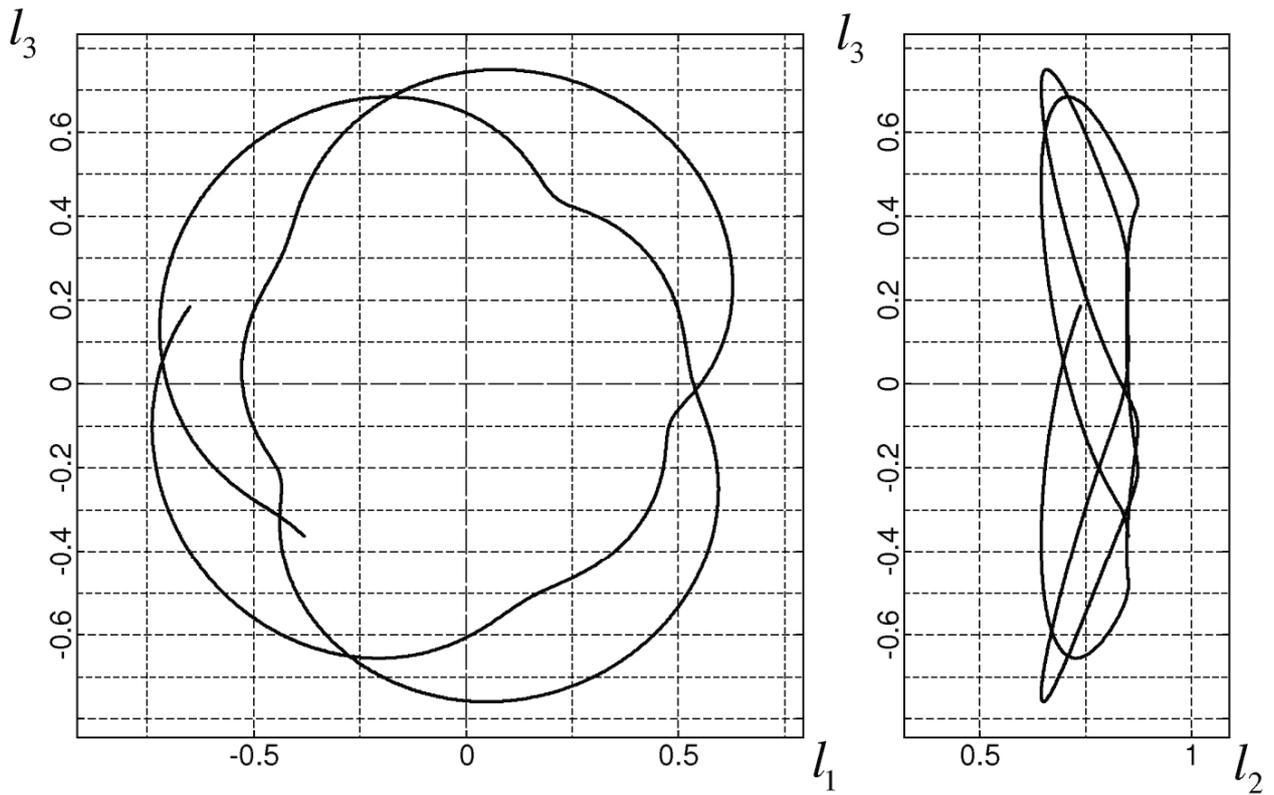
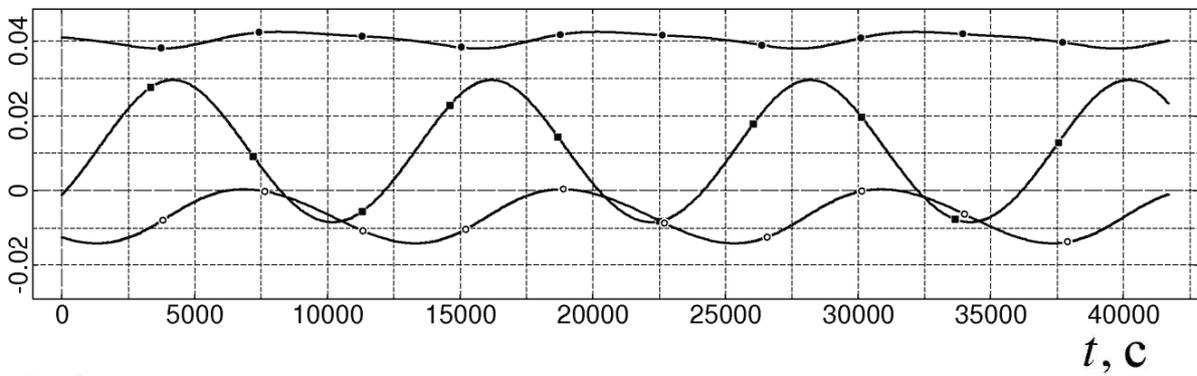


Рис. 11. Интервал 8, момент $t = 0$ соответствует 11:22:35 ДМВ 09.09.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

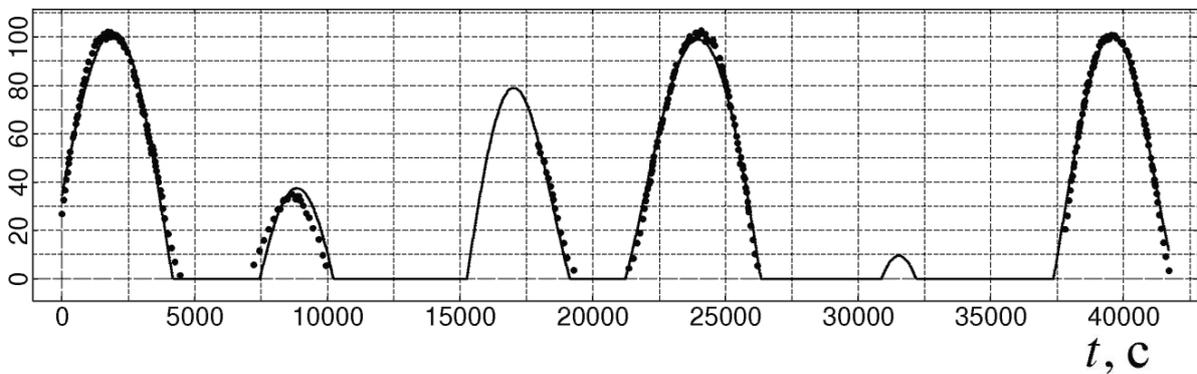
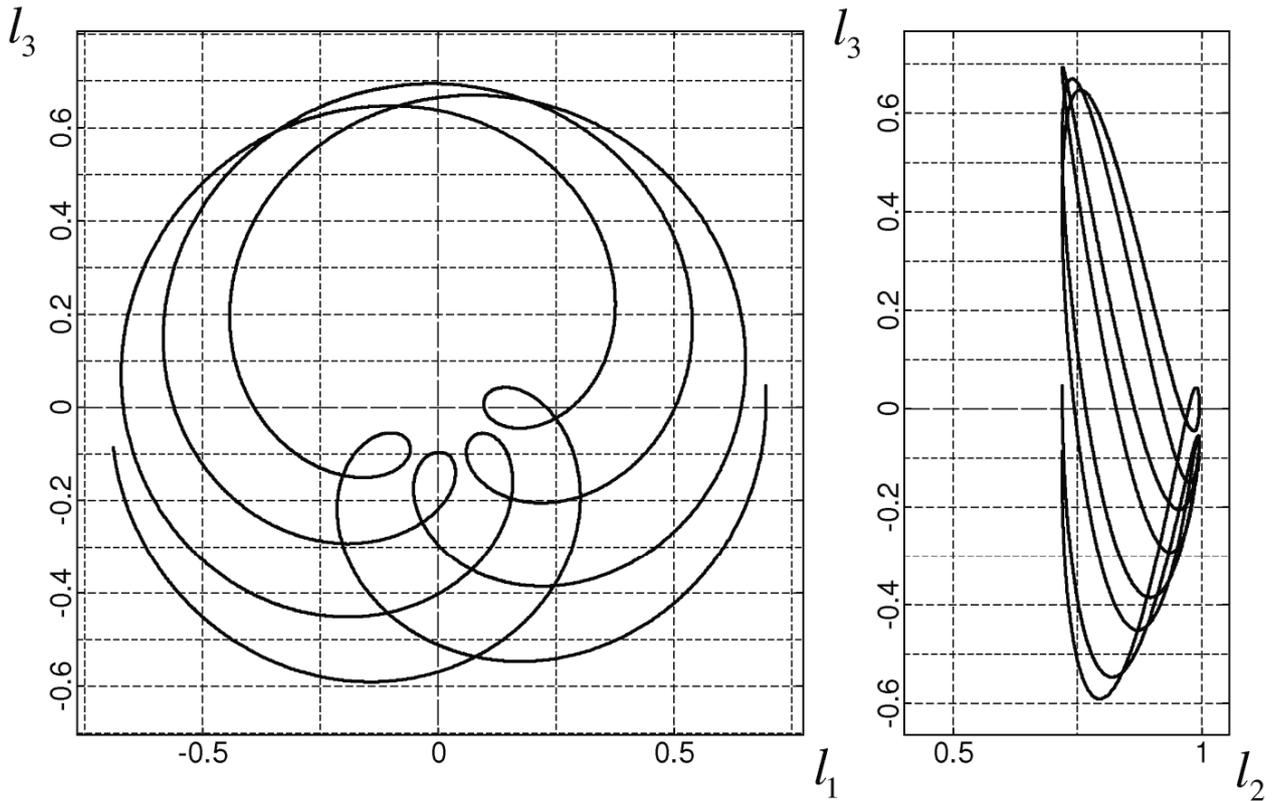
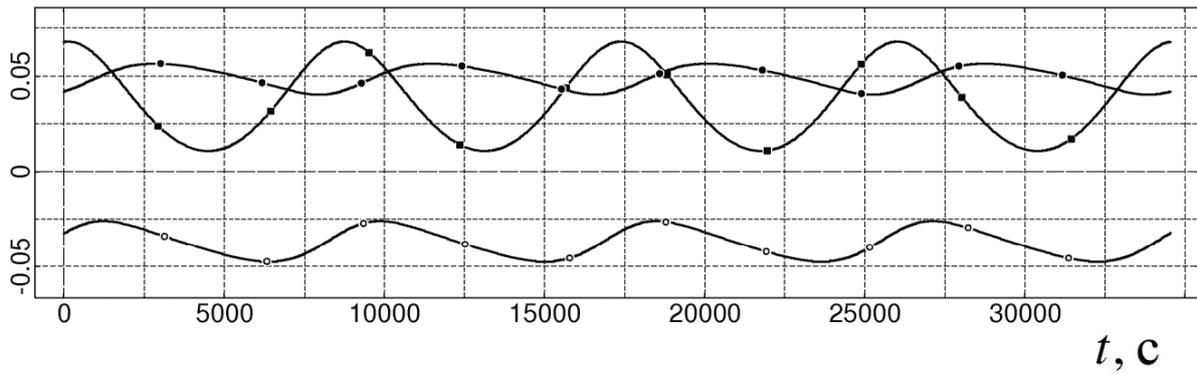


Рис. 12. Интервал 9, момент $t = 0$ соответствует 0:07:23 ДМВ 10.09.2008.



$\omega_1, \omega_2, \omega_3$, град/с



I, A

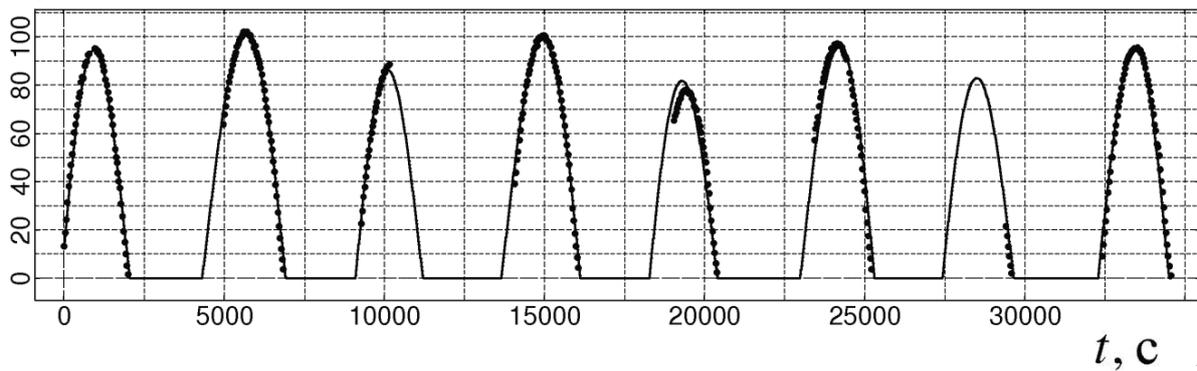


Рис. 13. Интервал 10, момент $t = 0$ соответствует 17:12:19 ДМВ 10.09.2008.