



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 96 за 2008 г.



Варин В.П., Петров А.Г.

**Математическая модель
слуховой улитки человека**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Варин В.П., Петров А.Г.
Математическая модель слуховой улитки человека // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008.
№ 96. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-96>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.П. Варин, А.Г. Петров

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
СЛУХОВОЙ УЛИТКИ ЧЕЛОВЕКА

Москва, 2009 г.

УДК 521.1+531.314

В.П. Варин, А.Г. Петров. Математическая модель слуховой улитки человека. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2009.

Предложена двухкамерная модель слуховой улитки человека. Движение жидкости описывается уравнениями гидродинамики и дополняется уравнением колебания мембраны. Уравнения линейризуются по амплитуде колебаний, а решение их ищется в виде гармоник Фурье с заданной частотой. Получена система линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Численное решение этой системы разностными методами не представляется возможным, ввиду наличия большого параметра, а также близости этой задачи к сингулярной. Предложен новый численный метод без насыщения, который позволил получить решения в широком диапазоне частот с произвольной и контролируемой точностью. Расчеты подтвердили теорию Бекеша. Низкие звуки вызывают прогибание мембраны у верхушки улитки, а звуки высокой частоты – в области основного завитка улитки.

V.P. Varin, A.G. Petrov. A mathematical model of human cochlea. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2009.

We suggest a two-chamber model of human cochlea. The motion of the fluid is described by equations of hydrodynamics, which are supplemented by the equation of oscillations of the membrane. The equations are linearized and their solution is represented as Fourier harmonics with a given frequency. The harmonics satisfy a system of boundary value problems for ordinary differential equations with variable coefficients. Numerical solution of this system with a finite-difference approximation is hardly possible due to a big parameter in the problem and a closeness of the problem to a singular one. We suggest a new numerical method without saturation, which allows to solve the problem in a wide range of frequencies with an arbitrary and controlled precision. Computations confirmed Bekesy's theory. The low sound frequencies cause the deflection of the membrane at the upper part of the cochlea, whereas high sound frequencies cause the deflection of the main volute of the cochlea.

© ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Москва, 2009 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 08-01-00082, 08-01-00251.

E-mails: petrov@ipmnet.ru, varin@keldysh.ru

http: www.keldysh.ru

1. Краткие сведения из анатомии ушной улитки. Ухо человека состоит из трех отделов: наружного, среднего и внутреннего. Звуковые колебания поступают в наружный слуховой проход 1, достигают барабанной перепонки 2 и вызывают ее колебания. С помощью трех косточек: молоточек, наковальня и стремечко, расположенных в среднем ухе 3, колебания поступают на окно преддверия 4 и вызывают толчкообразные смещения перилимфы преддверия в области ушной улитки 5 (фиг. 1а).

Ушная улитка представляет собой костный спиральный канал, имеющий примерно два с половиной оборота и длину около 32 мм (фиг. 1а). Развернутая улитка имеет вид уплощенного конуса с шириной основания 9 мм и высотой 5 мм. В поперечном разрезе (фиг. 1б) области 1 и 2 заполнены перилимфой и называются соответственно лестницей преддверия и барабанной лестницей. Их разделяет улитковый проток 3, заполненный эндолимфой. Дно улиткового протока образует базилярная пластинка (базилярная мембрана), отделяющая его от барабанной лестницы 2. Лестницы 1 и 2 изолированы друг от друга на всем протяжении, лишь в области верхушки улитки сообщаются между собой через отверстие — геликотрему. Колебания перилимфы передаются на эндолимфу и базилярную пластину (мембрану), на которой находится спиральный орган (орган Корти) с чувствительными волосковыми клетками которые трансформируют механические колебания в электрические нервные импульсы. Более подробные сведения из анатомии уха можно почерпнуть из учебника по оториноларингологии [1].

2. Теории Гельмгольца и Бекеша. Для объяснения происходящих во внутреннем ухе процессов рецепции звуков предложены различные теории слуха. Основными из них являются теории Гельмгольца [2] и Бекеша [3]. Теория Гельмгольца допускает, что базилярная пластинка (мембрана) состоит из серии сегментов, каждый из которых реагирует в ответ на воздействие определенной частоты звукового сигнала. Таким образом, происходит вибрация тех участков базилярной пластинки (мембраны) собственные частоты которых соответствуют частотам поступающих звуковых сигналов. По аналогии со струнными инструментами звуки высокой частоты приводят в колебательное движение участок базилярной пластинки (мембраны) с короткими волнами у основания улитки, а звуки низкой частоты вызывают колебания участка мембраны с длинными волокнами у верхушки улитки. Теория Гельмгольца впервые позволила объяснить основные свойства уха — способность определения высоты, громкости и тембра и получила подтверждение в клинике. Вместе с тем современные знания не подтверждают возможность резонирования отдельных «струн» базилярной пластинки (мембраны).

Особый интерес представляет другая теория «бегущей волны» Г. Бекеша.

Прямое изучение механических свойств базилярной пластинки (мембраны) показало, что ей не свойственна высокая механическая избирательность. Звуковые волны различных частот вызывают колебания мембраны на ее участках большой протяженности.

Согласно теории Бекешы звуки определенной высоты вызывают на базилярной пластинке (мембране) «бегущую волну». Положение гребня волны с наибольшим смещением мембраны зависит от частоты звукового сигнала. Наиболее низкие звуки вызывают прогибание мембраны у верхушки улитки, звуки высокой частоты — в области основного завитка улитки. Базилярная пластинка (мембрана), колеблясь, вызывает наибольшую деформацию волосковых клеток спирального органа в точке гребня «бегущей волны».

В теории Бекешы и, последовавших за ней, официально признанных моделей слуховой улитки есть общая черта — в них основную роль играют колебательные моды и физико-химические эффекты, обусловленные упруго-пластическими свойствами мембранного механизма аппарата слухового восприятия. Жидкости (перилимфа и эндолимфа) в слуховой улитке учитываются лишь как «передатчики давления» от овального окна к поверхности мембраны. Явно свойства перилимфы и эндолимфы в уравнения не входят, а влияние жидкостей учитывается косвенно с помощью функций Грина, задающих линейный закон передачи на мембрану звукового давления в овальном окне и давления в соседних точках мембраны [4,5]. В связи с этим представляют интерес такие модели слухового восприятия, в которых бы гидродинамические эффекты в перилимфе учитывались более обоснованно наряду с учетом упругих свойств мембраны. Такая модель и предлагается ниже.

3. Система уравнений. Теоретическое описание гидродинамических эффектов в слуховой улитке будет основано на приближении тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

где ρ — плотность жидкости, x и z — координаты вдоль и поперек тонкого слоя, $v(t, x, z)$, $p(t, x, z)$ и $\rho(t, x, z)$ — продольная скорость, давление и плотность в жидкости соответственно, ρ — плотность жидкости, μ — коэффициент динамической вязкости, B — толщина слоя, $q(t, x)$ — объемный расход жидкости через сечение x . Принимается, что характерная длина слоя существенно превосходит его толщину.

Слагаемое $\mu \partial^2 v / \partial x^2$ в тонком слое существенно меньше $\mu \partial^2 v / \partial z^2$. Однако для коротких волн оно играет роль демпфера и его мы учтем приближенно,

заменяв v на среднюю по сечению скорость $\bar{v} = q(t, x)/B$. Таким образом, система уравнений заменяется следующей

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{B} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

4. Модель двухслойного течения в ушной улитке. В развернутом виде костный спиральный канал улитки упрощенно изображен на фиг. 1в. Верхний отдел канала АВ — лестница преддверия и нижний отдел канала $A'B'$ — барабанная лестница заполнены перилимфой. Они разделяются между собой базилярной мембраной длины l и сообщаются через геликотрему, которая моделируется как пролив VEB' длины l_2 и постоянной толщины b .

Базилярная мембрана неоднородна по длине, ее модуль Юнга $E(x)$ зависит от продольной координаты. Величина $E(x)$ от окна преддверия $x = 0$ до верхушки улитки $x = l$ уменьшается по различным источникам на 3 - 4 порядка [6]. Мы примем экспоненциальный закон убывания $E(x) = E_0 \times 10^{-4x/l}$. Базилярная мембрана крепится к боковым костным границам с переменным натяжением $\sigma_y(x)$, для которого примем также экспоненциальный закон $\sigma_y(x) = \sigma_y^0 \times 10^{-4x/l}$. Поперечное натяжение $\sigma_y(x)$ мембраны через коэффициент Пуассона ν создает продольное натяжение $\sigma(x)$. Пользуясь уравнениями линейной теории упругости [7], при постоянном коэффициенте ν можно получить следующее соотношение $\nu\sigma_y(x) = (1 - \nu)\sigma(x)$. Таким образом, для продольного натяжения мембраны получаем тоже экспоненциальный закон убывания $\sigma(x) = \sigma_0 \times 10^{-4x/l}$. Дополнительно предположим, что коэффициент Пуассона близок к единице и поэтому поперечное натяжение σ_y пренебрежимо мало по сравнению с продольным σ .

Перелимфа моделируется как вязкая жидкость плотности ρ с коэффициентом динамической вязкости μ . Базилярная мембрана деформируется под действием разницы давлений p_1 перилимфы в верхнем отделе канала и p_2 — в нижнем. Предполагается, что она не сопротивляется изгибу. Мембрана заполнена эндолимфой представляющей собой неньютоновскую жидкость с большой вязкостью. Разница давлений $p_1 - p_2$ вызывает прогиб мембраны h по перпендикуляру к плоскости мембраны. Малый прогиб мембраны h вызывает малые второго порядка растяжения ее в плоскости мембраны. В линейном приближении малыми второго порядка будем пренебрегать и потому будем считать, что натяжение мембраны не зависит от h .

С помощью рассуждений аналогичных в [8], с. 31-34, закон Ньютона для

мембраны с переменным натяжением приведется к виду

$$m(x) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = p_2 - p_1 + \sigma(x) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - k \frac{\partial h}{\partial t},$$

где $m(x)$ — масса эндолимфы на единицу длины, h — отклонение пластины в поперечном направлении, k — коэффициент трения за счет движения вязкой эндолимфы внутри базиллярной мембраны. Правая часть уравнения является суммой сил, действующих на мембрану: силы давления перилимф в нижнем и верхнем отделах канала, сила натяжения и сила трения, пропорциональная скорости ее движения. При $m(x) = 0$, $k = 0$ из этого уравнения вытекает известное в гидродинамике условие Лапласа на границе двух жидкостей, разделенных пленкой с поверхностным натяжением. Для плоской задачи условие Лапласа имеет вид $p_1 - p_2 = \sigma(x)/R$, где R — радиус кривизны, для малого прогиба $1/R = \partial^2 h / \partial x^2$.

Таким образом, получаем следующее уравнение для поперечных колебаний мембраны

$$p_1 - p_2 = \sigma(x) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - m(x) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - k \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4.1)$$

В верхнем и нижнем отделах канала AB и $A'B'$ примем систему уравнений (3.1), из которой следует

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} &= -\frac{\partial p_i}{\partial x} + \frac{\mu}{b_i} \frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} \\ \frac{\partial b_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= b(x) - h(t, x), \quad b_2 = b(x) + h(t, x), \\ x &\in (0, l), \end{aligned}$$

где индексом 1 помечены характеристики течения в верхнем отделе канала AB , а индексом 2 — в нижнем (фиг. 1 в).

Предполагаем, что невозмущенная толщина слоев b_1 и b_2 одинакова и равна $b(x)$. В линейном по переменным h, v, p приближении можно заменить в первом уравнении $b_i = b(x)$.

Характеристики течения $v(t, z), q(t), p(t, x)$ через пролив BEB' постоянного сечения $b_1 = b(l)$ определяются также из уравнений (3.1)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad x \in (l, l + l_2). \quad (4.3)$$

Граничные условия. Будем предполагать все функции непрерывными в точках B и B' . Скорость удовлетворяет условиям прилипания на границах, а на входе $x = 0$ периодический сигнал с частотой ω

$$q(t, 0) = q_0 e^{i\omega t}. \quad (4.4)$$

Концы мембраны закреплены, откуда получаем

$$h(t, 0) = 0, \quad h(t, l) = 0. \quad (4.5)$$

Решение. Решение системы (4.1)-(4.5) строится следующим образом. Из уравнений неразрывности (4.2) следует, что $\partial q_1/\partial x = -\partial q_2/\partial x$. Это указывает на то, что решение уравнений можно искать в виде $v_1 = -v_2 = v$, $p_1 = -p_2 = p$, $q_1 = -q_2 = q$. Для функций v , p , q получаем уравнения

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{b} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \\ \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (4.1) получаем уравнение

$$2p(t, x) = \sigma(x) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - m(x) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - k \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (4.7)$$

Ищем решение уравнений (4.6), (4.7) в виде

$$v = \tilde{v}(x, z)e^{i\omega t}, \quad h = \tilde{h}(x)e^{i\omega t}, \quad q = \tilde{q}(x)e^{i\omega t}, \quad p = \tilde{p}(x)e^{i\omega t}.$$

Для функций $\tilde{v}(x, z)$, $\tilde{q}(x)$, $\tilde{p}(x)$ получаем уравнения

$$\rho i \omega \tilde{v} - \mu \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} = f(x), \quad f(x) = -\frac{d\tilde{p}}{dx} + \frac{\mu}{b} \frac{d^2 \tilde{q}}{dx^2}. \quad (4.8)$$

Его решение, удовлетворяющее условиям прилипания $v(t, x, 0) = v(t, x, b) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \frac{f(x)i}{\rho \omega \operatorname{sh}(\lambda b)} [-\operatorname{sh}(\lambda b) + \operatorname{sh}(\lambda z) + \operatorname{sh}(\lambda(b-z))] \\ \tilde{q} &= \frac{f(x)i}{\rho \omega \lambda \operatorname{sh}(\lambda b)} [-\lambda b \operatorname{sh}(\lambda b) + 2 \operatorname{ch}(\lambda b) - 2], \quad \lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}} i. \end{aligned}$$

Принимая во внимание асимптотику $\operatorname{ch} \lambda b \sim \operatorname{sh} \lambda b \sim \frac{1}{2}e^{\lambda b}$ при $\omega \rightarrow \infty$ получим

$$\tilde{q} = \frac{f(x)i}{\rho \omega} (-\lambda b + 2).$$

Подставляя сюда выражение (4.8) для функции $f(x)$, получим уравнение

$$\rho \omega \lambda \tilde{q} + (\lambda b - 2)i \left(-\frac{d\tilde{p}}{dx} + \frac{\mu}{b} \frac{d^2 \tilde{q}}{dx^2} \right) = 0. \quad (4.9)$$

К нему нужно присоединить 2 уравнения, вытекающие из уравнений (4.6) и (4.7)

$$i\omega\tilde{h} - \frac{d\tilde{q}}{dx} = 0, \quad \sigma(x)\frac{d^2\tilde{h}}{dx^2} + (\omega^2 m(x) - ik\omega)\tilde{h} = 2\tilde{p}, \quad (4.10)$$

Таким образом, для функций $\tilde{h}(x)$, $\tilde{q}(x)$, $\tilde{p}(x)$ получили систему трех уравнений (4.9), (4.10). Перейдем к определению краевых условий.

Два условия вытекают из (4.4) и (4.6)

$$\tilde{q}(0) = q_0, \quad \tilde{h}(0) = \tilde{h}(l) = 0, \quad (4.11)$$

Последнее условие получим из условий непрерывности давления в точках B и B' (рис. 3). Решаем уравнение (4.3). Для \tilde{v} из него получим уравнение такое же как и (4.8), в котором $f(x) = -d\tilde{p}/dx$. Решение будет иметь вид (4.9) с соответствующим изменением функции $f(x)$

$$\rho\omega\lambda\tilde{q} + (\lambda b - 2)i(-d\tilde{p}/dx) = 0.$$

Поскольку в слое постоянного сечения расход не зависит от x то $\tilde{q} = const$. Отсюда производную давления находим через разность давлений в точках B и B' и условия непрерывности в них

$$\frac{d\tilde{p}}{dx} = \frac{-2\tilde{p}(l)}{l_2}.$$

Подставляя значение производной в предыдущее уравнение получаем граничное условие в точке $x = l$

$$\rho\omega\lambda\tilde{q}(l) + (\lambda b_1 - 2)i\left(\frac{2\tilde{p}(l)}{l_2}\right) = 0,$$

где $b_1 = b(l)$.

Сформулируем окончательную краевую задачу для функций $\tilde{h}(x)$, $\tilde{q}(x)$, $\tilde{p}(x)$. Нужно найти решение системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho\omega\lambda\tilde{q} + (\lambda b - 2)i\left(-\frac{d\tilde{p}}{dx} + \frac{\mu}{b}\frac{d^2\tilde{q}}{dx^2}\right) &= 0, \\ i\omega\tilde{h} - \frac{d\tilde{q}}{dx} &= 0, \quad \sigma(x)\frac{d^2\tilde{h}}{dx^2} + (\omega^2 m(x) - ik\omega)\tilde{h} = 2\tilde{p}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

удовлетворяющую следующим краевым условиям

$$\begin{aligned} \tilde{q}(0) = q_0, \quad \tilde{h}(0) = \tilde{h}(l) = 0, \\ \rho\omega\lambda\tilde{q}(l) + (\lambda b_1 - 2)i\left(\frac{2\tilde{p}(l)}{l_2}\right) = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

5. Уравнения в безразмерных переменных и результаты расчетов.

Безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= lX, \quad \tilde{h}(x) = b_0 H(X), \quad \tilde{q}(x) = i\omega l b_0 Q(X), \\ \tilde{P}(x) &= \sigma_0 b_0 P(X)/l^2, \quad \omega = \omega_0 \Omega, \quad \omega_0 = \sqrt{\sigma_0 b_0 / \rho} / l^2, \quad \sigma(x) = \sigma_0 \Sigma(X), \\ m(x) &= \rho b_0 M(X), \quad b(x) = b_0 B(X), \quad b_0 = b(0), \quad b_1 = b(l), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\rho \sigma_0 b_0}}, \quad k_0 = \frac{k \omega_0 l^2}{\sigma_0},$$

где μ_0 и k_0 – безразмерные коэффициенты вязкости жидкости и трения в пластине.

При подстановках (5.1) уравнения (4.12) принимают вид

$$\begin{aligned} \Sigma(X) \frac{d^2 H(X)}{dX^2} + \left(\frac{b_0^2}{l^2} M(X) \Omega^2 - i\Omega k_0 \right) H(X) &= 2P(X), \\ \frac{dQ(X)}{dX} &= H(X), \\ \frac{dP(X)}{dX} &= \Omega^2 \sqrt{i\Omega} \left(\sqrt{i\Omega} B(X) - 2 \frac{l}{b_0} \sqrt{\mu_0} \right)^{-1} Q(X) + i\mu_0 \frac{\Omega}{B(X)} \frac{d^2 Q(X)}{dX^2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

а краевые условия (4.13) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} H(0) = H(1) = 0, \quad Q(0) = 1, \\ \Omega^2 \sqrt{\Omega i} Q(1) + 2 \left(\frac{b_1}{b_0} \sqrt{\Omega i} - 2 \frac{l}{b_0} \sqrt{\mu_0} \right) \frac{l}{l_2} P(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В ниже приведенных расчетах принимаются следующие значения параметров задачи: $\rho_0 \sim 1 \text{ г/см}^3$ – плотность жидкой среды, $b_0 \sim 0.2 \text{ см}$, $b_1 \sim 0.1 \text{ см}$ – высота жидких слоев, $\mu \sim 0.01 \text{ г/(см/сек)}$, $k = 10^3 \text{ г см/сек}$, $m \sim \rho b_0$, $\sigma(x)$ меняется в пределах от $\sigma_0 = 10^7 \text{ Дн/см}$ до $\sigma_1 = 10^3 \text{ дн/см}$, $l = 3 \text{ см}$, $l_2 = 4 \text{ см}$. (В технической системе единиц сила $1 \text{ Дн} = 10^{-3} \text{ Г}$, поэтому натяжение изменяется от значения 10 Кг/см до 1 Г/см). Такое большое изменение натяжения мембраны подтверждается сведениями об изменении на 4 порядка ее коэффициента упругости [7].

Функция $\Sigma(X)$ монотонно убывает и меняется на три-четыре порядка: $\Sigma(0) = 1$ и $\Sigma(1) \sim 10^{-4}$. Функции $B(X)$ и $M(X)$ меняются незначительно. Функция $B(X)$ монотонно убывает, так что $B(0) = 1$, $B(1) = 1/2$.

Безразмерная частота $\Omega = \omega/\omega_0$ выражается через характерную частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sigma_0 b_0}{\rho_0 l^4}} \approx 157 \text{ радиан/сек}$$

Безразмерная частота Ω является единственным параметром краевой задачи (при выбранных и фиксированных значениях коэффициентов). Она меняется в очень большом диапазоне. Частотам $\omega = 2\pi \times 25$ Гц и $\omega = 2\pi \times 10000$ Гц соответствуют значения $\Omega = 1$ и $\Omega = 400$. Безразмерный параметр $b_0/b_1 = 1/2$ не меняется, а остальные параметры b_0/l , l/l_2 , μ_0 , k_0 и функции $\Sigma(X)$ и $B(X)$, $M(X)$ определяют геометрические и физические свойства улитки. Они являются управляющими параметрами и функциями и от них зависит качество восприятия звука.

Используя численный метод без насыщения, описанный далее, были проведены расчеты при выше приведенных значениях параметров. Им соответствуют следующие безразмерные параметры

$$b_0/l = 0.067, \quad l/l_2 = 0.75, \quad \mu_0 = 7 \times 10^{-6}, \quad k_0 = 0.14.$$

Безразмерные функции задавались так

$$\Sigma(X) = 10^{-4}, \quad B(X) = 1/(1 + X), \quad M(X) = 1.$$

На рис. 2 приведены результаты расчетов для десяти функций $|H(X)|$, соответствующих безразмерным частотам $\Omega = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots, 9$. Размерная частота в Герцах меняется в диапазоне от 25 Гц до 1280 Гц. Эти функции являются огибающими бегущих волн Бекеша. Как видно из графиков с увеличением частоты точка максимума функции $|H(X)|$ смещается к точке $X = 0$ (окно предверия).

На рис. 3 показаны различные фазы бегущих волн для $\Omega : 1; 8; 64$ и 512 , что соответствует значениям частот 25, 200, 1600 и 1280 Гц. Эти результаты согласуются с теорией Бекеша: наиболее низкие звуки вызывают прогибание мембраны у верхушки улитки, звуки высокой частоты — в области основного завитка улитки.

Управляющими параметрами можно добиться, чтобы функция была максимально локализована в окрестности точки максимума, что будет соответствовать лучшему восприятию частоты звука.

Прежде чем приступить к описанию численного метода решения системы краевых задач (5.2)–(5.3), отметим некоторые обстоятельства, которые препятствуют ее решению обычными численными методами.

Во-первых, в задаче присутствует большой параметр Ω , который может привести к сильной неустойчивости решений при численном интегрировании системы (5.2)–(5.3) на отрезке $X \in [0, 1]$. Во-вторых, согласно физической сущности задачи, решения будут сильно осциллировать, причем с разными масштабами длины волны на отрезке $X \in [0, 1]$ для одного и того же решения. Иными словами, задача является жесткой. Наконец, в силу того, что

функция $\Sigma(X)$ меняется на три-четыре порядка и убывает к очень малой величине $\Sigma(1)$, задача (5.2)–(5.3) является очень близкой к сингулярной.

По нашим оценкам численное решение системы краевых задач (5.2)–(5.3) современными методами (т.е. реализованными в вычислительных пакетах программ) не представляется возможным.

Мы предлагаем принципиально новый метод численного решения этой и других подобных задач, который основан на идеях К.И. Бабенко и обладает (в принципе) неограниченной и контролируемой точностью.

6. Численные методы без насыщения.

Рассмотрим произвольную линейную краевую задачу

$$L(x, y(x)) = R(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (6.1)$$

с произвольными краевыми условиями, где $L(x, y(x))$ – это линейный дифференциальный оператор, а функция $R(x)$ – это правая часть. Заметим, что задача Коши для уравнения (6.1) также может рассматриваться как краевая задача. Мы предполагаем, что краевые условия непротиворечивы, а также считаем все коэффициенты оператора L и функцию $R(x)$ аналитическими функциями в некотором эллипсе с фокусами в ± 1 .

Дадим сперва краткий обзор существующих численных методов решения задачи (6.1).

Численные методы решения краевой задачи (6.1) могут быть условно разбиты на две группы. К первой группе относятся численные методы, использующие конечные разности для аппроксимации производных функции на отрезке (например, метод прогонки), а также методы, основанные на численном интегрировании ОДУ (например, метод пристрелки). Оба этих подхода могут быть интерпретированы как некоторая конечномерная аппроксимация краевой задачи (6.1): $Ly = R$. При этом дифференциальный оператор аппроксимируется ленточной матрицей L (обычно очень большого порядка), а y и R здесь векторы. Краевые условия учитываются в верхних и нижних строках матрицы L .

Все численные методы первой группы обладают одним существенным недостатком. Они дают очень мало информации об аналитических свойствах решения. Например, метод Рунге-Кутты четвертого порядка имеет локальную оценку погрешности $O(h^5)$, где h – это шаг интегрирования. Если решение $y(x)$ задачи (6.1) является полиномом четвертого порядка, то данный метод восстанавливает решение точно. Однако этот метод не различает полиномы большего порядка независимо от величины шага. Это свойство численных методов называется *насыщением* [9].

Ко второй группе относятся численные методы, использующие разложение решения $y(x)$ краевой задачи (6.1) по некоторым системам базовых функ-

ций. Эти системы функций могут иметь (а могут и не иметь) отношение к свойствам дифференциального оператора $L(x, y(x))$. К этой группе относится метод Галеркина.

Методы второй группы приводят к заполненным матрицам относительно небольшого порядка. Термин насыщение здесь не применим, так как метод Галеркина обеспечивает (как правило) только сходимость в среднем.

Однако существуют методы второй группы, обладающие равномерной сходимостью. Один из наиболее важных примеров – это разложение периодического решения краевой задачи (6.1) с периодическими краевыми условиями по полиномам Фурье.

Как известно, скорость убывания коэффициентов ряда Фурье периодической функции $y(x)$ тем больше, чем более гладкой эта функция является. В частности, аналитическая в полосе $x \in (-\infty, \infty) \times (-i\varepsilon, i\varepsilon)$ функция имеет экспоненциальную скорость убывания коэффициентов ее ряда Фурье. Это свойство дает возможность оценить аналитические свойства решения $y(x)$ по результатам численного эксперимента.

Таким образом, мы имеем пример численного метода, в котором присутствует обратная связь с исходной задачей. Эта обратная связь реализуется в глобальной оценке погрешности, включающей в себя порядок гладкости решения. Для краевых задач для уравнения Лапласа в областях с границей в виде замкнутого контура этот принцип применялся в работе [10].

Численные методы, обладающие этим свойством, называются методами без насыщения [9]. Они обладают (в принципе) неограниченной и контролируемой точностью. Однако, доказать существование численного метода без насыщения для краевой задачи (6.1) в общей постановке не представляется возможным.

Тем не менее, имеются веские основания полагать, что методы без насыщения существуют для широкого класса краевых задач (6.1).

Дифференциальный оператор $L(x, y(x))$ вместе с краевыми условиями определяет замкнутый оператор \mathcal{L} в некотором функциональном Банаховом пространстве \mathcal{F} . Обратный оператор $\mathcal{K} = \mathcal{L}^{-1}$ является компактным оператором в пространстве \mathcal{F} . Оператор \mathcal{K} может быть записан в интегральной форме с помощью функции Грина. Компактный оператор может быть представлен как сумма оператора конечного ранга и оператора со сколь угодно малой нормой. Иными словами, компактный оператор может быть аппроксимирован конечномерным с произвольной точностью.

Таким образом, численный метод, реализующий конечномерную аппроксимацию компактного оператора \mathcal{K} , может быть численным методом без насыщения, если он обладает необходимой оценкой погрешности аппроксима-

ции.

Вместо того, чтобы пытаться аппроксимировать оператор \mathcal{K} , что вряд ли возможно в общей постановке, мы предлагаем аппроксимировать некоторые элементарные операторы, которые затем используются как компоненты конечномерной аппроксимации оператора $L(x, y(x))$. После того, как метод построен и задача решена численно, можно убедиться, что метод действительно без насыщения, пользуясь обратной связью, о которой говорилось ранее.

Итак, для задач с периодическими краевыми условиями численный метод без насыщения основан на аппроксимации периодических функций отрезками ряда Фурье, что соответствует оптимальному (в данном случае равномерному) распределению узлов интерполяции.

Построение численного метода без насыщения в общем случае также тесно связано с оптимальной аппроксимацией функций полиномами [9].

7. Аппроксимация функций полиномами Чебышева.

Проблема оптимальной аппроксимации функций полиномами на отрезке тесно связана с выбором оптимального распределения узлов интерполяции. Эта последняя проблема решена в общем случае для периодических функций, для которых оптимальным является равномерное распределение узлов [9, 11].

Пусть Π_n является оператором проектирования пространства тригонометрических полиномов $P_n(x)$ порядка n в пространство аналитических периодических функций. Норма оператора Π_n называется константой Лебега. Она не зависит от интервала, на котором аппроксимируется функция, а зависит только от распределения узлов интерполяции. Равномерное распределение узлов минимизирует константу Лебега [9, 11].

В общем случае, когда свойства решения $y(x)$ краевой задачи (6.1) неизвестны, наилучшим способом аппроксимации решения $y(x)$ является его приближение с помощью полиномов Чебышева

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^m a_k T_k(x), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (7.1)$$

где m – это порядок аппроксимации.

Разумеется, это утверждение нуждается в обосновании.

Во-первых, оптимальное распределение узлов интерполяции для произвольной аналитической функции на интервале $[-1, 1]$ неизвестно. Однако известно, что чебышевские узлы весьма близки к оптимальному распределению и, кроме того, они асимптотически оптимальны [9,11,12]. Следовательно, константа Лебега будет близка к своему минимальному значению, что влечет (почти) минимальную размерность конечномерной аппроксимации оператора $L(x, y(x))$ при заданной погрешности аппроксимации.

Во-вторых, полиномы Чебышева отличаются от всех других систем ортогональных полиномов тем, что их корни выражаются в явном виде. Эти корни и являются узлами интерполяции. Для других систем полиномов корни пришлось бы вычислять приближенно.

Если функция является аналитической в некотором эллипсе с фокусами в точках ± 1 , то она разлагается в ряд по полиномам Чебышева. Коэффициенты этого ряда убывают экспоненциально [11]. В случае, если функция имеет конечное число производных, скорость убывания коэффициентов ее ряда Чебышева пропорциональна числу производных, аналогично коэффициентам рядов Фурье для периодических функций. Это обстоятельство позволяет установить обратную связь численного метода с задачей, что следует из равномерной сходимости рядов Чебышева на отрезке $[-1, 1]$ и минимального отклонения полиномов Чебышева от нуля [12].

Заметим, что методы Галеркина, вообще говоря, этим свойством не обладают, ввиду сходимости в среднем.

Наконец, нет необходимости работать с отрезками рядов Чебышева. Вместо этого следует оперировать таблицами значений функций в узлах Чебышева. Коэффициенты рядов Чебышева могут быть получены при необходимости с помощью быстрого преобразования Фурье-Чебышева, причем эта операция устойчива и не приводит к возрастанию погрешности вычислений [12].

Поскольку концы интервала ± 1 не являются чебышевскими узлами, это дает возможность решать краевые задачи близкие к сингулярным, а также, как будет показано, учитывать произвольные краевые условия.

8. Учет краевых условий.

В случае, если полиномы Чебышева выбраны для аппроксимации решения краевой задачи, возникает проблема корректного учета краевых условий задачи. До недавнего времени существовало два подхода к этой проблеме.

Первый подход состоит в прямом использовании разложений (7.1) для представления решения краевой задачи, а также для коэффициентов дифференциального оператора $L(x, y(x))$. При дифференцировании и умножении этих рядов возникают рекуррентные соотношения на неизвестные коэффициенты разложения решения $y(x)$. Эта бесконечная система уравнений обрывается до определенного порядка. Краевые условия дают дополнительные соотношения на коэффициенты, которые делают систему замкнутой. Этот подход развит в книге [12].

Хотя подобный способ численного решения задачи приводит к методу без насыщения, он весьма трудоемок и не всегда применим, что связано с ограниченным набором функций, имеющих простые разложения (7.1). Кроме того,

если изменить некоторые коэффициенты оператора $L(x, y(x))$, то всю работу придется делать заново.

Другой подход к проблеме учета краевых условий состоит в преобразовании задачи (6.1) к интегральному виду, например, с помощью функции Грина. В интегральной форме краевые условия уже учтены, поэтому можно использовать аппроксимацию решения $y(x)$ с помощью полиномов Лагранжа с узлами Чебышева

$$y(x) = \sum_{i=1}^n y(x_i) p_{ni}(x), \quad x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.1)$$

где x_i – это узлы Чебышева, а

$$p_{ni}(x) = \frac{T_n(x)}{(x - x_i)T'_n(x_i)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.2)$$

суть чебышевские фундаментальные полиномы лагранжевой интерполяции.

Подставив полином (8.1) в интегральное уравнение, получим линейную систему уравнений для неизвестных $y(x_1), \dots, y(x_n)$ – значений решения в узлах. Значения функции $y(x)$ в других точках интервала $[-1, 1]$ может быть получено по формуле (8.1) с большой точностью, а точность вычислений может быть проконтролирована с помощью оценки коэффициентов ряда Чебышева функции $y(x)$.

Таким образом, имеем типичный пример метода без насыщения, когда таблица, кодирующая решение, сама уже содержит информацию о достигнутой точности вычислений.

К сожалению, этот подход применим только к задачам, имеющим явное интегральное представление, что возможно далеко не всегда.

Итак, полиномы Чебышева дают возможность построить весьма эффективный численный метод решения краевой задачи (6.1), однако их применение само по себе является проблемой.

В некоторых последних работах К.И. Бабенко был предложен способ устранить эту последнюю проблему. Суть подхода К.И. Бабенко состоит в аппроксимации некоторых элементарных дифференциальных операторов (с учетом краевых условий) таким образом, как если бы аппроксимировались интегральные операторы, полученные обращением дифференциальных. Поясним это на примере, который, несмотря на его элементарность, окажется весьма практичным.

Рассмотрим краевую задачу $f'(x) = g(x)$, $-1 \leq x \leq 1$, $f(-1) = 0$. Это, очевидно, задача Коши. Если использовать интерполяцию Лагранжа (8.1) для неизвестной функции $f(x)$ и правой части $g(x)$, то мы получим конечномерную линейную задачу $Af = g$, где f и g суть векторы, а матрица

A аппроксимирует дифференциальный оператор. Однако аппроксимация не учитывает граничных условий, и матрица A будет вырожденной, т.е. задача не решена.

Перепишем задачу Коши в интегральной форме

$$f(x) = \int_{-1}^1 G(x, y)g(y)dy \quad (8.3)$$

с помощью функции Грина

$$G(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \leq x \\ 0, & \text{if } y > x. \end{cases}$$

Если использовать интерполяцию Лагранжа (8.1) для уравнения (8.3), где краевые условия учтены, то мы получим конечномерную линейную задачу $f = Bg$, т.е. задача решена. Матрица B невырождена, так как функция g находится однозначно из интегрального уравнения (8.3).

Вернемся к задаче Коши и будем использовать интерполяцию Лагранжа (8.1), но с другими фундаментальными многочленами интерполяции

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)q_{ni}(x), \quad q_{ni}(x) = \frac{1+x}{1+x_i} p_{ni}(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.4)$$

Фундаментальные многочлены $q_{ni}(x)$, и, следовательно, функция $f(x)$ в формуле (8.4) удовлетворяют краевым условиям. Для функции g используем прежнюю интерполяцию. Мы получим конечномерную линейную задачу $Cf = g$, но теперь матрица C невырождена. На самом деле, справедливо

Утверждение 8.1. $C = B^{-1}$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathcal{P}_n$, где \mathcal{P}_n – это n -мерное линейное пространство полиномов степени не выше $n - 1$. Тогда $f \in \mathcal{P}_{n+1}$ дается формулой (8.3), которая записывается как $f = Bg$ для значений полиномов в узлах Чебышева. Обратно, полином $f \in \mathcal{P}_{n+1}$ восстанавливается единственным образом по значениям в узлах $f(x_1), \dots, f(x_n)$, в частности, по формуле (8.4). Он удовлетворяет граничному условию $f(-1) = 0$ и уравнению (8.3). Следовательно, $f' = g$, что записывается как $Cf = g$ для значений полиномов в узлах. Доказательство закончено.

Таким образом, вместо того, чтобы переписывать краевую задачу в интегральной форме и затем использовать интерполяцию Лагранжа (8.1), можно аппроксимировать исходный дифференциальный оператор с помощью интерполяции Эрмита (8.4), а затем обратить матрицу. Напомним, что интерполяция Эрмита – это интерполяция Лагранжа с учетом значений функции и/или ее производных в некоторых дополнительных узлах.

Заметим, что даже в этом элементарном примере вычислить матрицу C значительно проще, чем матрицу B . Эта последняя вычисляется в виде рядов, в то время как матрица C представима в конечном виде:

$$C_{i,j} = \frac{(-1)^{i-j}(1+x_i)\sqrt{\frac{1-x_j^2}{1-x_i^2}}}{(x_i-x_j)(1+x_j)}, \quad i \neq j, \quad C_{i,i} = \frac{2-x_i}{2(1-x_i^2)}. \quad (8.5)$$

В завершение этого примера отметим, что матрица C^{-1} дает квадратурную формулу Гаусса, т.е. квадратуру, которая точна на полиномах степени не выше $n-1$.

9. Аппроксимация элементарных дифференциальных операторов.

Аппроксимация оператора дифференцирования с нулевым граничным условием в предыдущей секции – это один из примеров применения принципа аппроксимирования дифференциальных операторов вместо интегральных. Этот же прием можно использовать и для других операторов вида

$$\frac{d^m f}{dx^m} = g \quad (9.1)$$

с m нулевыми граничными условиями на функцию f и ее производные. Эти операторы, которые мы назовем элементарными, очевидно, обратимы и для них утверждение 8.1 переносится без изменений. Необходимо только предъявить фундаментальные полиномы интерполяции, которые реализуют нужную аппроксимацию.

Утверждение 9.1. Фундаментальные полиномы интерполяции для дифференциального оператора в правой части формулы (9.1) могут быть записаны в виде

$$q_{ni}(x) = \frac{r_{mi}(x)}{r_{mi}(x_i)} p_{ni}(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.2)$$

где полиномы $p_{ni}(x)$ определены в формуле (8.2), а $r_{mi}(x)$ – это некоторые полиномы степени m выбранные так, что фундаментальные полиномы $q_{ni}(x)$ удовлетворяют m краевым условиям. Каждый полином $r_{mi}(x)$ определен с точностью до ненулевого множителя.

Доказательство. Вычисляя значения полинома $q_{ni}(x)$ и его производных, которые входят в краевые условия, в точках ± 1 , получим m линейных уравнений на m коэффициентов полинома $r_{mi}(x)$ (считая его свободный член равным единице). Все эти линейные уравнения однозначно разрешимы, так

как полином Эрмита $m + n - 1$ -й степени, обращающийся в ноль в узлах Чебышева, кроме узла x_i , где он равен единице, и удовлетворяющий m произвольным нулевым краевым условиям, определен однозначно. Доказательство закончено.

Матрица D оператора (9.1) вычисляется по формуле

$$D_{k,i} = \frac{d^m q_{ni}}{dx^m}(x_k), \quad k, i = 1, \dots, n. \quad (9.3)$$

Например, рассмотрим оператор дифференцирования второго порядка с нулевыми краевыми условиями

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = g. \quad (9.4)$$

Нетрудно проверить, что его фундаментальные полиномы интерполяции имеют вид

$$q_{ni}(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x_i^2} p_{ni}(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть S – это его матрица, вычисленная по формуле (9.3). Легко заметить, что матрица S^2 дает чебышевскую аппроксимацию краевой задачи

$$\frac{d^4 f}{dx^4} = g \quad (9.5)$$

с краевыми условиями $f(-1) = f(1) = f''(-1) = f''(1) = 0$.

Предыдущий пример показывает, что нет необходимости вычислять каждую матрицу элементарного оператора индивидуально. Матрицы можно комбинировать для того, чтобы смоделировать недостающие краевые условия.

Запишем теперь краевую задачу (6.1) в виде

$$\sum_{k=0}^m a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = R(x), \quad x \in [-1, 1] \quad (9.6)$$

и аппроксимируем каждый элементарный оператор $d^k y/dx^k$ в формуле (9.6) своей чебышевской матрицей (9.3), беря столько краевых условий из m имеющихся, сколько необходимо. Очевидно, только дифференциальный оператор старшего порядка аппроксимируется однозначно. Для остальных операторов имеется определенный произвол в выборе краевых условий. Коэффициенты $a_k(x)$ аппроксимируются, очевидно, диагональными матрицами.

В результате мы получаем линейную алгебраическую задачу, которая аппроксимирует краевую задачу (6.1). Эта конечномерная аппроксимация будет асимптотически близка к наилучшей из возможных в равномерной метрике,

согласно изложенному выше. Однако наиболее важное преимущество этого метода по сравнению с конечно-разностными состоит в контролируемости погрешности вычислений по результатам самих вычислений.

Мы проиллюстрируем изложенные идеи на примере задачи (5.2)–(5.3) с фиксированными коэффициентами, т.е. когда есть возможность сравнить численный результат с аналитическим.

10. Численный пример применения метода без насыщения.

У нас уже имеются все необходимые матрицы, необходимые для конечно-мерной аппроксимации задачи (5.2)–(5.3). Для первого уравнения (5.2) используется матрица S , аппроксимирующая оператор (9.4). Для двух других уравнений (5.2) используется матрица C (см. формулу (8.5)), но для этого в уравнениях (5.2)–(5.3) необходимо сделать замену

$$P(X) = \tilde{P}(X) + P_0, \quad Q(X) = \tilde{Q}(X) + 1,$$

согласно определению матрицы оператора дифференцирования с нулевым начальным условием. Неизвестная величина P_0 найдется из краевого условия (5.3).

Таким образом, линейная краевая задача сведена к алгебраической. Из второго уравнения (5.2) выразим вектора $\tilde{Q}(X)$ и $d^2\tilde{Q}(X)/dX^2$ через вектор H значений этой функции в чебышевских узлах. Из третьего уравнения (5.2) найдем вектор $\tilde{P}(X)$. Подставив эти вектора в первое уравнение (5.2), получим уравнение для вектора H . Решив это уравнение, получим вектор H , зависящий от неизвестной константы P_0 , которая находится из линейного уравнения (5.3).

Для тестирования алгоритма мы выбрали реалистичные значения констант, входящих в краевую задачу, за исключением того, что коэффициенты дифференциальных операторов заморожены, т.е. функции $\Sigma(X) = 0.1$, $B(X) = 1$ и $M(X) = 1.5$ не зависят от X . Остальные величины имеют следующие значения: $l = 3$, $l_2 = 4$, $b_0 = 0.1$, $b_1 = 0.1$, $\rho = 1$, $\mu = 1$, $\sigma_0 = 10^7$, $k = 0.5$, и значение параметра $\Omega = 32$. При этих значениях коэффициентов краевая задача (5.2)–(5.3) решается в явном виде. Однако явная формула для функции H получается столь громоздкой, что здесь нет возможности ее привести. Мы можем выслать ее в электронном виде.

Для первого тестового примера мы выбрали размерность интерполяции $n = 60$ и обычную величину разрядной сетки, примерно равную 15 десятичным разрядам. На фиг. 4 изображены графики вещественной и мнимой части вычисленной функции H . Ломаные линии на фиг. 4 соединяют значения функций в чебышевских узлах, а их огибающие – это восполненные с помощью полиномов (8.1) значения функций. Абсолютное значение функции H приведено на фиг. 5.

Абсолютная погрешность, вычисленная с помощью явного решения, не превосходит величины 0.23×10^{-10} на всем интервале. Покажем, как эту оценку погрешности можно получить не прибегая к явному решению (которое неизвестно для реальной задачи). Для этого вычислим коэффициенты Фурье-Чебышева a_k в формуле (7.1) для функции $H(X)$. На фиг. 6 приведен график абсолютных значений коэффициентов $|a_k|$ в логарифмической шкале. Из фиг. 6 следует, что, во-первых, функция $H(X)$ аналитическая, так как ее коэффициенты Фурье-Чебышева убывают экспоненциально; во-вторых, начиная примерно с величины 10^{-12} коэффициенты Фурье-Чебышева перестают убывать и совершают хаотические колебания вокруг этой величины. Это и есть оценка достигнутой точности, неулучшаемой за счет увеличения размерности интерполяции при данной величине разрядной сетки. Мы имеем также оценку оптимальной размерности интерполяции, т.е. $n \approx 30$ дает такую же точность, как и $n = 60$.

Для подтверждения вышесказанного повторим все расчеты с увеличенной вдвое разрядной сеткой, т.е. с 30 десятичными разрядами. При этом абсолютная погрешность, вычисленная с помощью явного решения, не превосходит величины 0.1×10^{-25} на всем интервале. Как и ранее, эта информация содержится в графике абсолютных значений коэффициентов $|a_k|$, приведенный на фиг. 7. Из фиг. 7 также следует, что $n \approx 35$ дает такую же точность, как и $n = 60$ для данной разрядной сетки.

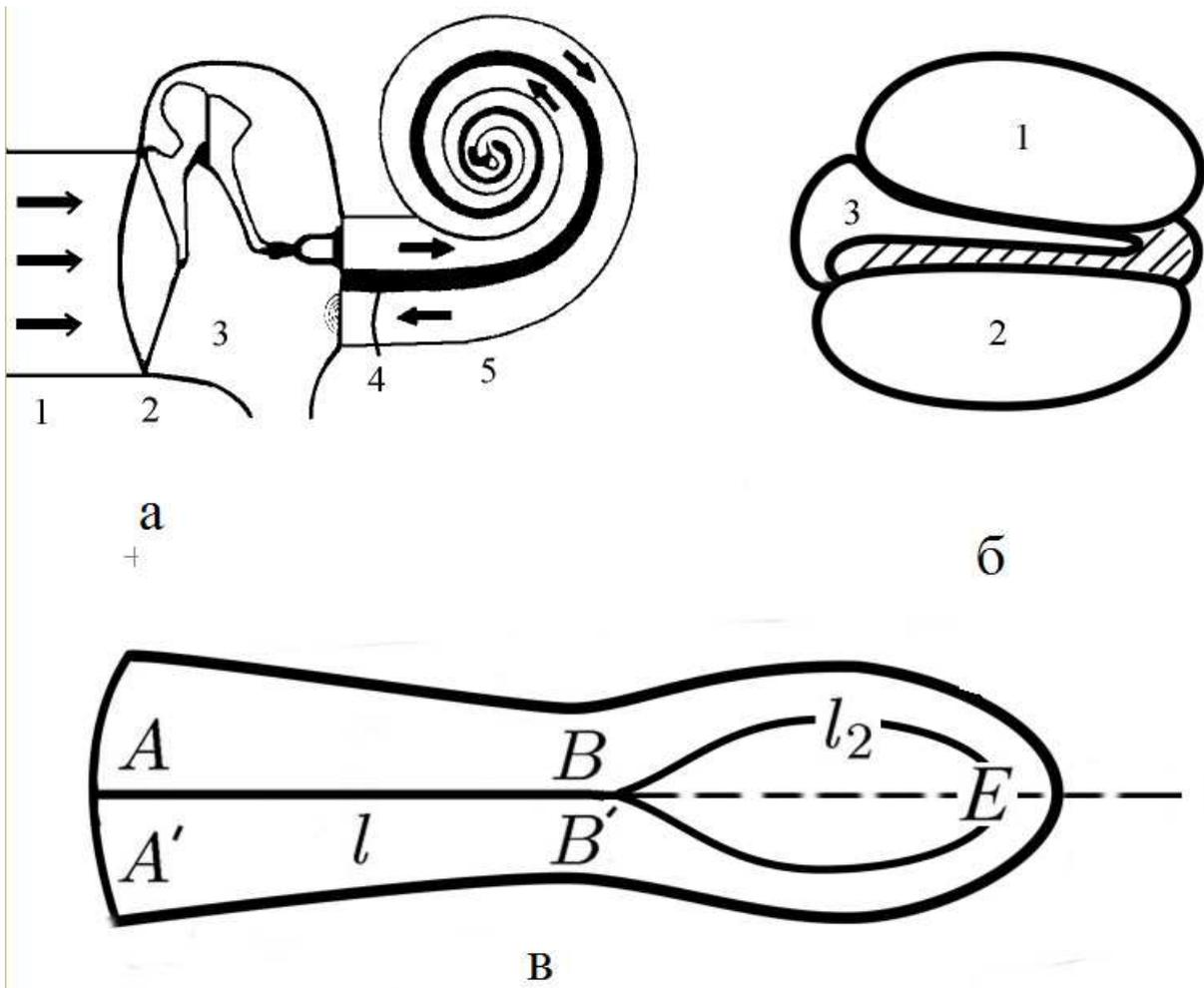
Таким образом, управляя величиной разрядной сетки и размерностью интерполяции n , можно получить решение с любой заданной точностью, причем эта точность контролируема. Наряду с этим, мы имеем также информацию об аналитических свойствах решения.

Другие примеры использования методов без насыщения для решения краевых задач имеются в работах [10, 13].

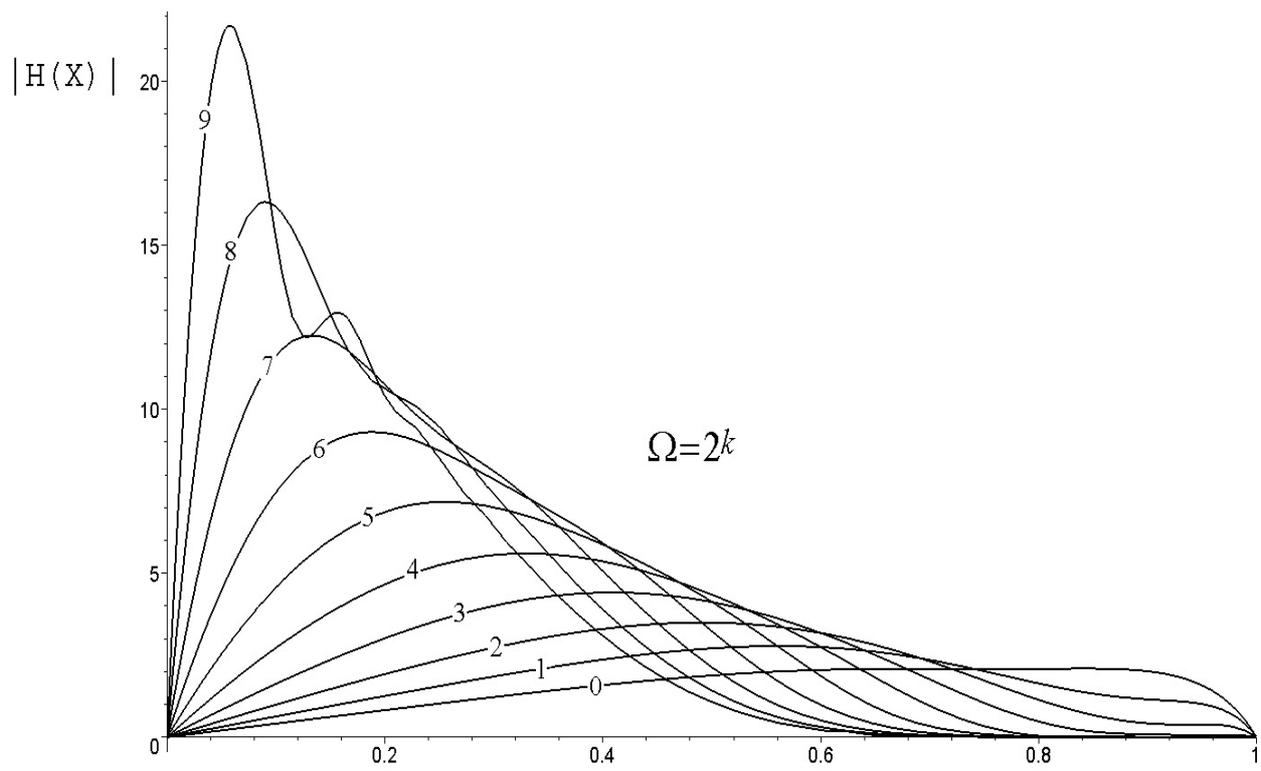
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00082, 08-01-00251).

Литература

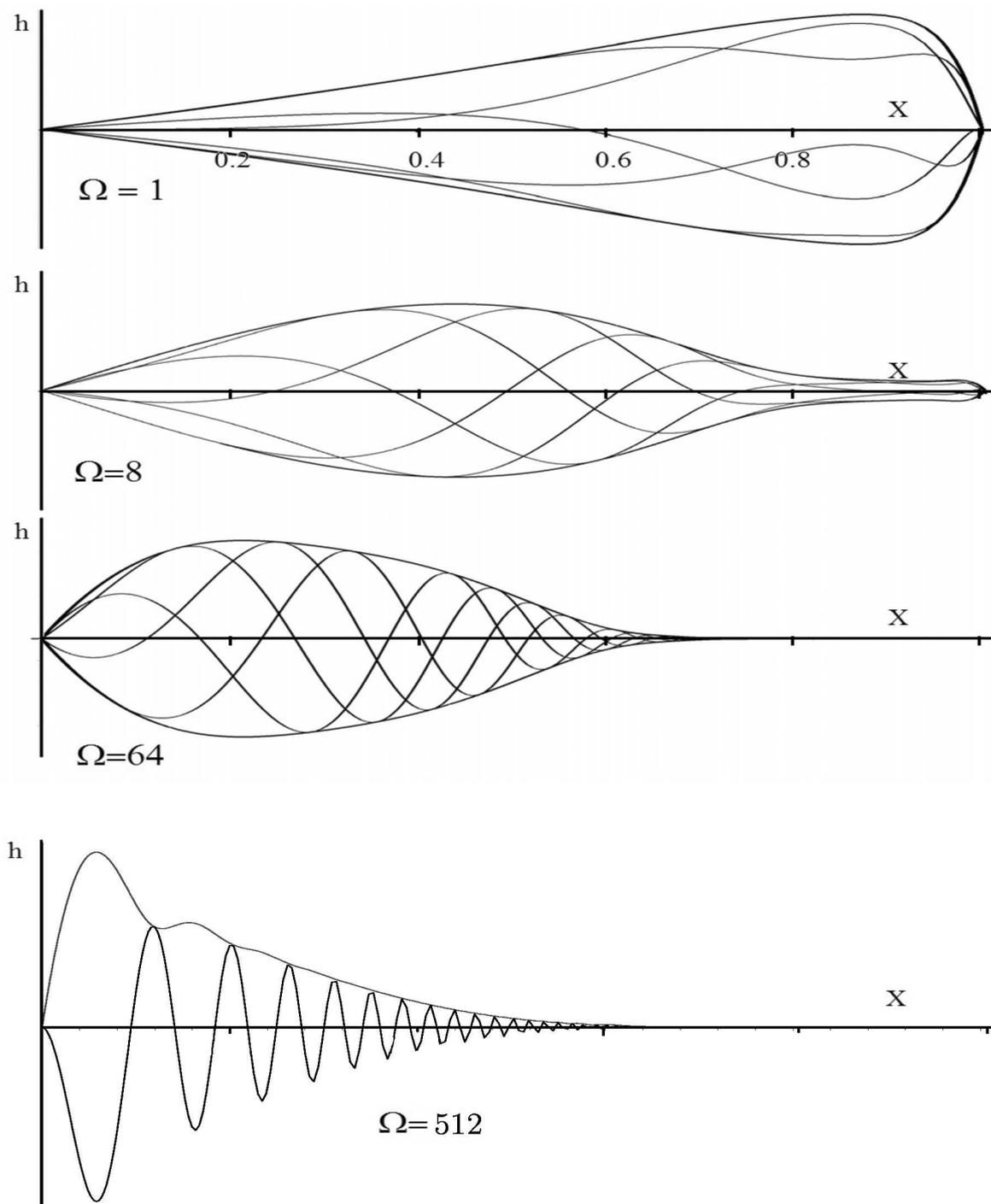
1. *В.Т.Пальчун, М.М.Магомедов, Л.А.Лучихин.* Оториноларингология: Учебник. М.: Медицина, 2002. - 576с.
2. *Helmholtz, H.L.F.* On the sensations of tone. Dover, New York, 1954. Original German Edition appeared in 1863.
3. *Bekey, G.* Experiments in Hearing. New York e.a., Mc.Grow-Hill Book Company, 1960, 745p.
4. *Mammato, F. Nobili, R.* Biophysics of the cochlea: linear approximation. //J. Acoust. Soc. Am. 1993, Jun., v.93, No.6, pp. 3320-3332.
5. *Xin, J., Qi, Y. and Deng, L.* Time Domain Computation of a Nonlinear Nonlocal Cochlear Model with Applications to Multitone Interactions in Hearing. //Communications in Mathematical Sciences. 2003, Vol. 1, No. 2, pp. 211-227.
6. *Лайтхилл Дж.* Поток энергии улитки в уха// Современная гидродинамика. Успехи и проблемы: Пер. с англ. под редакцией Дж. Бэтчелора и Г. Моффата. – М.: Мир, 1984.
7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1, 2. Изд. 5-е. – М.: Наука, 1995.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука 1972. 735 с.
9. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. Ижевск: РХД, 2002, 848 с.
10. *Петров, А.Г.* Квадратурные формулы для периодических функций и их применение в методе граничных элементов // ЖВМ и МФ. Т. 48. N 8. с. 1344-1361.
11. *de Boor, C.* Polynomial Interpolation // In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Helsinki, 1980, **2**, p. 917-922.
12. *Пашковский С.* Вычислительное применение многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983, 348 с.
13. *Varin V.P.* Methods without saturation for boundary value problems // Preprint N 1, Keldysh Institute of Applied Math., Moscow, 2008, p. 14.



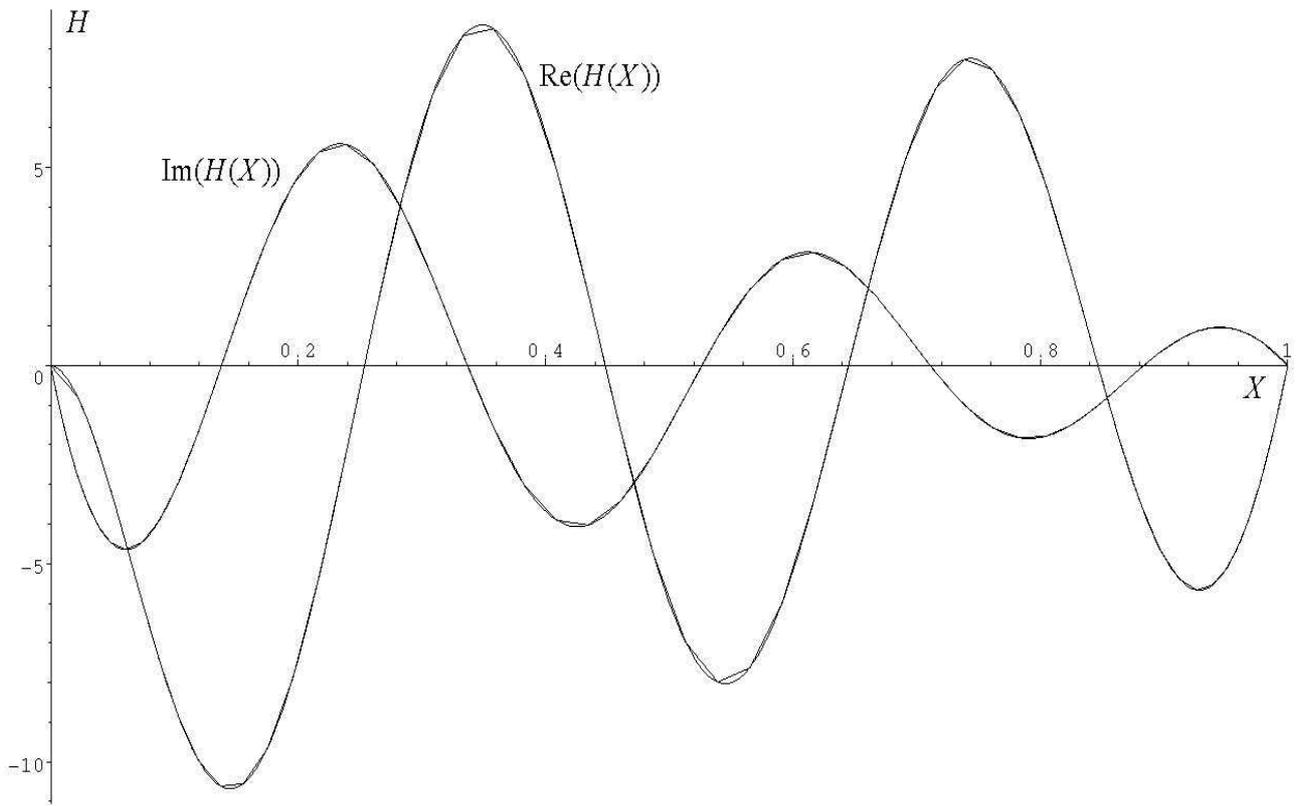
Фиг. 1. а – схема передачи звукового сигнала; б – улитка в разрезе; в – развернутая схема спирального канала улитки.



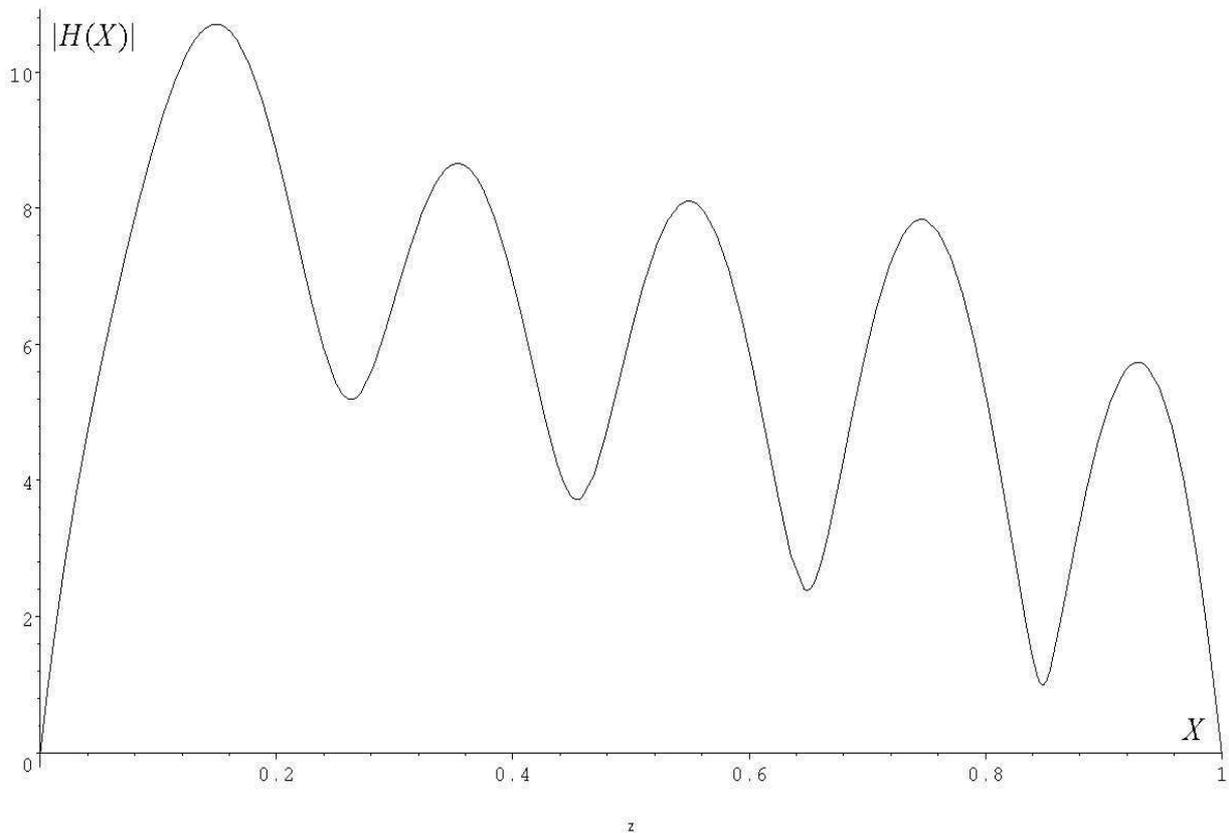
Фиг. 2. Огибающие бегущих волн при $\Omega = 2^k$, $k = 0, 1, \dots, 9$.



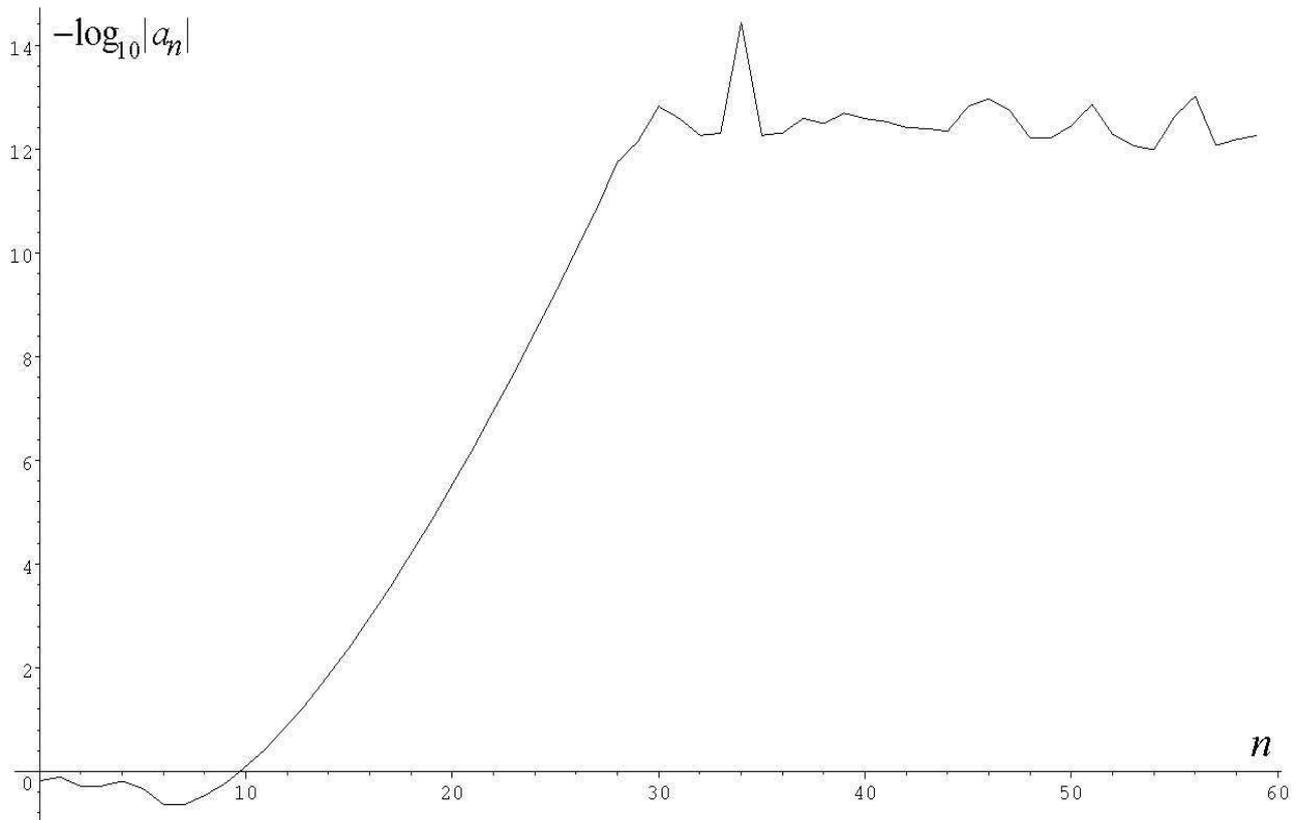
Фиг. 3. Фазы бегущих волн и их огибающие при частотах $\Omega = 1, 8, 64, 512$



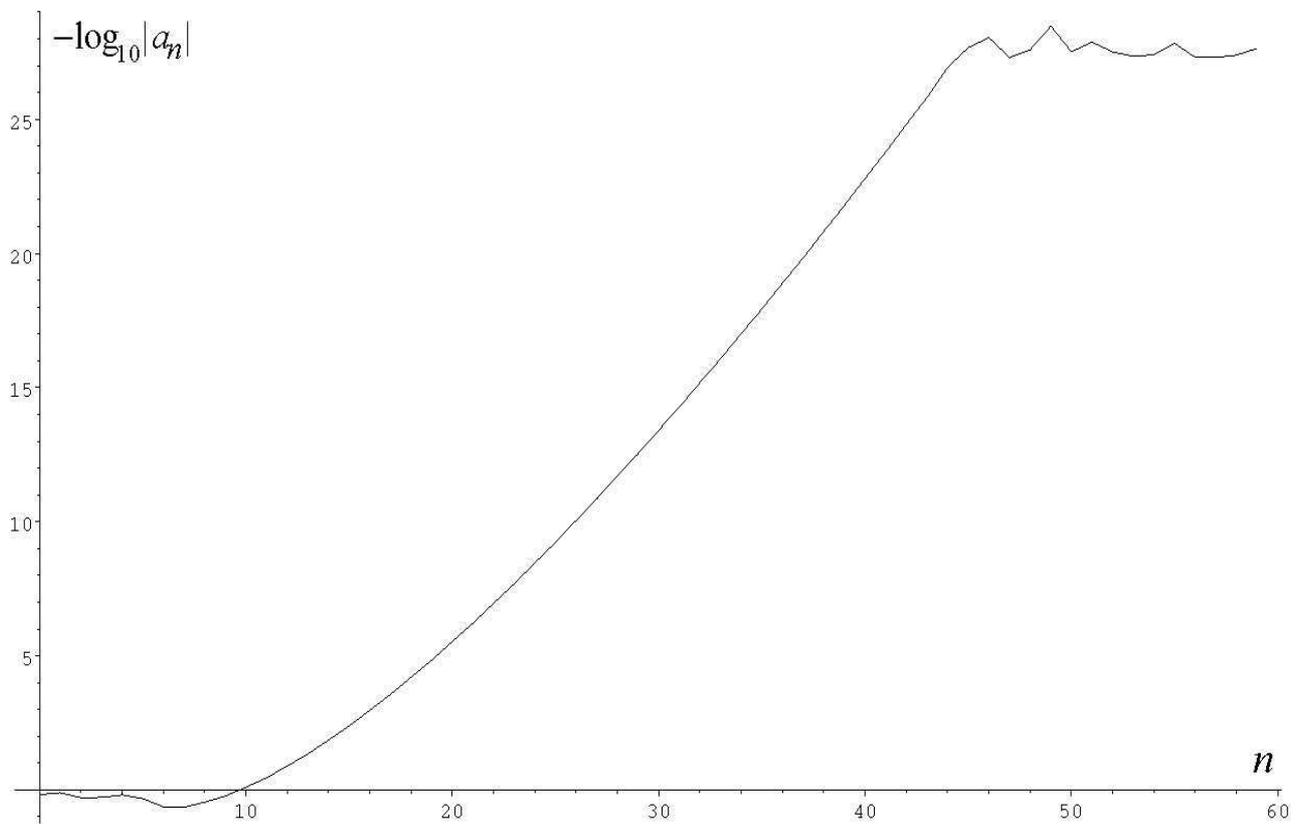
Фиг.4. Вещественная и мнимая части функции $H(X)$.



Фиг.5. Абсолютное значение функции $H(X)$.



Фиг.6. Коэффициенты Чебышева функции $H(X)$; 15 десятичных разрядов.



Фиг.7. Коэффициенты Чебышева функции $H(X)$; 30 десятичных разрядов.