ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 87 за 2008 г.

Парусников В.И.

Цепные дроби до ближайшего четного

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

В.И. Парусников

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

ДО БЛИЖАЙШЕГО ЧЕТНОГО

Москва, 2008 г.

УДК 511.36

В.И. Парусников. Цепные дроби до ближайшего четного. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2008.

Известно множество типов одномерных цепных дробей, из которых наиболее широко распространены два. Это классические правильные цепные дроби и цепные дроби до ближайшего целого. В основе обоих типов цепных дробей лежит алгоритм Евклида.

Здесь предложен и исследуется новый тип цепных дробей, также основанный на алгоритме Евклида. Это цепные дроби до ближайшего четного. Показано, что цепные дроби этого типа обладают большинством важнейших свойств классических цепных дробей.

V.I. Parusnikov. Continued fractions by the nearest even number. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2008.

There exist many types (algorithms) of one-dimensional continued fractions. Two of them are most widespread algorithms, namely, the classical regular continued fractions and the continued fractions to the nearest integer ones. They both are based on the Euclid's algorithm.

Here we propose and invesitigate a new fundamental type of continued fractions: the continued fractions to the nearest even number. We demonstrate that continued fractions of this type posesse the majority of important properties of classical continued fractions.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 06-01-00085, 08-01-00082).

E-mail: parus@keldysh.ru

Сайт: www.keldysh.ru

§ 1. Введение

Если изучается какой либо тип цепных дробей, то его качество оценивается по тому, выполнены ли для него ряд свойств, присущих классическим алгоритмам [1].

1) Аппроксимация: подходящие дроби должны сходиться к приближаемому (разлагаемому) числу.

2) Обрыв цепной дроби для рациональных чисел.

3) Единственность цепной дроби: одному числу должна отвечать если не одна, то хотя бы конечное число цепных дробей (подобно десятичному представлению чисел с бесконечным числом девяток на конце).

4) Теорема Эйлера - Лагранжа. Квадратичные иррациональности и только они раскладываются в периодические цепные дроби. Т.е. подходящие дроби должны улавливать периодическую структуру множества целых точек $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ вблизи луча $q = \beta p$ с тангенсом наклона, равным приближаемому числу β (вершины и ребра многоугольников Клейна, наилучшие приближения и т.п.).

Отсюда же следует, что для всех чисел $\beta \in \mathbb{R}$ увеличить скорость сходимости, даваемую классическими цепными дробями, нельзя. Ускорение возможно не более, чем в фиксированное конечное число раз. Например, цепные дроби до ближайшего целого сходятся примерно в полтора раза быстрее, чем классические цепные дроби. Причем обобщения цепных дробей, дающие лучшее приближение, до сих пор известны не были и считалось, что их и не существует.

В настояще работе предлагается новый фундаментальный тип цепных дробей ч цепные дроби до ближайшего четного. Впервые, по-видимому, они были упомянуты в нашей работе [2]. Не смотря на простоту обобщения, цепные дроби данного типа до сих пор не исследовались. Вероятная причина этого состоит в том, что просчет самых элементарных примеров показывал, что по скорости сходимости они чудовищно проигрывают классическим цепным дробям. Однако, оказалось, что свойства 1) ч 4) для данных цепных дробей выполнены.

Более того, «ускоренный» вариант алгоритма цепных дробей до ближайшего четного (готовится к печати) сходится быстрее, чем цепные дроби до ближайшего целого. По численным экспериментам, ускорение составляет примерно 4 процента.

§ 2. Обозначения

Договоримся, через $-A$ обозначать множество, симметричное множеству A относительно начала координат: $x \in -A \Leftrightarrow -x \in A$. Промежутки (отрезки, интервалы (открытые), полуинтервалы) вещественной оси $\mathbb{R}$ будут обозначаться парой чисел, заключенных в ориентированные квадратные скобки, разделенных точкой с запятой: $\mathrm{I} = [-1; 1\,]$ ч отрезок, $]-1; 1\,[$ ч интервал.

$\mathbb{R}$ ч вещественные, $\mathbb{R}_+$ ч положительные, $\mathbb{Z}$ ч целые, $\mathbb{Z}_{even}$ ч четные, $\mathbb{Z}_{odd}$ ч нечетные, $\mathbb{N}$ ч натуральные числа и т.д. Помещенный рядом с символом множества штрих означает, что из этого множества исключена точка ноль ($\mathbb{Z}'_{even}$ ч четные не равные нулю числа), а два штриха ч что из множества исключены еще и точки плюс и минус единица:

$$\mathrm{I}'' = \,]-1\,;\ 0\,[\,\bigcup\,]\,0\,;\ 1\,[,\quad \mathbb{Z}'' = \mathbb{Z} \setminus (\{-1\}\bigcup\{0\}\bigcup\{1\}).$$

Будут встречаться вещественные двумерные векторы и проективные векторы, которые всегда будут столбцами, но из «типографских» соображений мы будем их записывать в виде транспонированных вектор-строк, отмечая операцию транспонирования векторов и матриц верхним левым индексом «T»: ${}^{\mathrm{T}}(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, {}^{\mathrm{T}}(a_1 : a_2) \in \mathbb{RP}$.

§ 3. Расстояние до ближайшего четного

Для $x \in \mathbb{R}$ введем сначала новую функцию, для которой введем свой символ ч объемные фигурные перечеркнутые посередине скобки $\llbracket\ .\ \rrbracket$. Назовем *ближайшим четным* к x четное число $\llbracket x \rrbracket$, ближайшее к x в евклидовой метрике; причем в случае, если x нечетно и таких чисел два, «ближайшим четным» будем считать само нечетное число:

$$\llbracket x \rrbracket = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \\ k, & |x-k| < 1,\ k \in \mathbb{Z}_{even},\ \text{если } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ближайшее четное через ближайшее целое $[\![\ .\ ]\!]$ записывается так:

$$\llbracket x \rrbracket = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \\ 2\ [\![\dfrac{x}{2}]\!], & \text{если } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Расстоянием до ближайшего четного назовем функцию $x - \llbracket x \rrbracket$, тоже введя для нее свой символ ч объемные перечеркнутые фигурные скобки $\{\!\{\ .\ \}\!\}$:

$$\{\!\{ x \}\!\} = x - \llbracket x \rrbracket = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{Z}, \\ 2\ \{\!\{\dfrac{x}{2}\}\!\}, & \text{если } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Функции $\llbracket x \rrbracket$, $\lBrace x \rBrace$ нечетны и являются проекторами:

$$\llbracket x \rrbracket = -\llbracket -x \rrbracket, \ \lBrace x \rBrace = -\lBrace -x \rBrace, \quad \llbracket \llbracket x \rrbracket \rrbracket = \llbracket x \rrbracket, \ \lBrace \lBrace x \rBrace \rBrace = \lBrace x \rBrace. \tag{1}$$

Они непрерывны везде, кроме нечетных чисел, где у них разрывы первого рода. В точках разрыва значения равны полусумме значений справа и слева от него. Введенные функции более симметричны, чем знаменитые функции ч целая часть [.], ближайшее целое $[\![x]\!]$ и связанные с ними функции дробная часть { . } и расстояние до ближайшего целого $\{\!|x|\!\}$.

§ 4. Алгоритм разложения в цепную дробь до ближайшего четного

Цепной дробью называют формальное выражение вида

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{\ddots \quad + \cfrac{a_n}{b_n + \cfrac{a_{n+1}}{\ddots}}}}, \tag{2}$$

где *элементы цепной дроби* a_n, b_n лежат в некотором кольце (или поле) F. Если задана цепная дробь (2), обычно интересуются поведением (сходимостью, например) ее *подходящих дробей*

$$p_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{\ddots \quad + \cfrac{a_n}{b_n}}}} \tag{3}$$

в поле отношений кольца F или в его расширении.

Мы будем держаться ближе к другому подходу.

Определение 1. *Цепная дробь (2) это запись последовательности* $\{\mathcal{B}_n\}, n \in \mathbb{N}$, *«простых» невырожденных* ($a_n \neq 0$) *дробно-линейных преобразований*

$$\alpha_n = \mathcal{B}_n(\alpha_{n+1}) = \frac{a_n}{b_n + \alpha_{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{n+1} = \mathcal{B}_n^{-1}(\alpha_n) = \frac{a_n}{\alpha_n} - b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

некоторого поля $\bar{\mathrm{F}}$, содержащего F.

Преобразования (4) находятся по исходному объекту $\alpha_1 \in \bar{\mathrm{F}}$ последовательно ($n = 1, 2, \ldots$) в процессе применения *шагов* некоторого алгоритма, состоящего из элементарных *этапов.* По ходу определяются величины a_n, b_n. Как процесс, так и алгоритм называются разложением в цепную дробь. Где будут лежать *элементы* цепной дроби a_n, b_n (a_n ч *числители*, b_n

ч *знаменатели*), зависит от алгоритма и от поля $\bar{\mathrm{F}}$. Подходящей дробью с номером n будет результат применения композиции дробно-линейных преобразований $\mathcal{B}_n(\alpha_{n+1}) = \mathcal{B}_1(\ldots(\mathcal{B}_{n-1}(\mathcal{B}_n(\alpha_{n+1})))\ldots)$ к конкретному элементу ч нулю 0 кольца F.

В перспективе нам придется расширить определение 1 и отказаться от конкретной формы (4) возникающих на шаге дробно-линейных преобразований, сохранив при этом их элементарность. Этому будет посвящена отдельная работа.

Опишем *алгоритм разложения чисел в цепные дроби до ближайшего четного.* Элементы этих цепных дробей окажутся четными числами, поэтому их верно называть также *четными цепными дробями.*

Пусть задано некоторое число $\beta = \beta_0 \in \mathbb{R}$. У всех шагов, кроме начального шага алгоритма, будет два этапа. У шага с номером 0 есть только «второй» этап: β_0 представляется в виде суммы ближайшего четного b_0 и *остатка* α_1:

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \{\!\{\beta_0\}\!\} \in \mathrm{I}'', \quad b_0 = [\![\beta_0]\!] \in \mathbb{Z}, \\ \beta_0 = b_0 + \alpha_1. \end{gathered} \tag{5}$$

Очередной, n-й шаг алгоритма делается только, если число $\alpha_n \neq 0$. В противном случае говорят об *обрыве алгоритма* (и цепной дроби) *на n-м шаге.*

Типовой *шаг алгоритма* с номером n (n-й, $n > 0$) состоит в получении $(n+1)$-*го остатка* $\alpha_{n+1} \in \mathrm{I}''$ *цепной дроби* по n-му остатку $\alpha_n \in \mathrm{I}''$. На <u>первом этапе</u> шага от α_n *переходят к взятому с противоположным знаком обратному*:

$$\beta_n := \frac{-1}{\alpha_n}, \ \beta_n \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{I}''. \tag{6}$$

При этом

$$\alpha_n = \frac{-1}{\beta_n}. \tag{7}$$

Числа β_n также иногда будем называть *хвостами цепной дроби.*

Замечание 1. Внешнее отличие предложенного алгоритма от основных классических алгоритмов это смена знака у обращаемого числа. В результате задающие переход от остатка α_n к α_{n+1} дробно-линейные функции монотонно возрастают на вещественной прямой. Их композиции $\alpha_1 = \mathcal{P}_n(\alpha_{n+1})$ и обратные к ним $\mathcal{P}_n^{-1}$ тоже будут монотонно возрастающими функциями. В аналогичной форме цепные дроби рассматривал Стилтьес [3].

На <u>втором этапе</u> шага $n \in \mathbb{N}$ определяются очередной остаток α_{n+1} и *неполное частное (знаменатель цепной дроби)* b_n:

$$\alpha_{n+1} := \{\!\{\beta_n\}\!\}, \ \alpha_{n+1} \in \mathrm{I}'', \quad b_n := [\![\beta_n]\!], \ b_n \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

и

$$\beta_n = b_n + \alpha_{n+1}. \tag{9}$$

Если остаток α_{n+1} не равен нулю, то число b_n ң четное, не равное нулю. Если же $\alpha_{n+1} = 0$ и алгоритма на данном шаге $n = n_0$ оборвался, последнее неполное частное b_n может быть любым целым числом, лежащим вне отрезка $[-1\ ;\ 1]$, т.е. $b_{n_0} \in \mathbb{Z}''$:

$$\begin{array}{ll} b_n \ \in \ \mathbb{Z}'_{even}, & \text{если } n < n_0, \\ b_{n_0} \in \ \mathbb{Z}'' = \mathbb{Z} \setminus (\{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\}), & \text{если } 0 < n_0 < \infty, \\ b_{n_0} \in \ \mathbb{Z}, & \text{если } n_0 = 0. \end{array}$$

Сведенные воедино формулы (7) и (9) означают, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \frac{-1}{b_n + \alpha_{n+1}}, \quad b_n = [\![\frac{-1}{\alpha_n}]\!], \tag{10}$$

или, наоборот (см. (8), (6)),

$$\alpha_{n+1} = \frac{-1}{\alpha_n} - b_n = \{\!\{ \frac{-1}{\alpha_n} \}\!\}. \tag{11}$$

Введем подмножества $\Delta_{0,k}$ множества I'', для чисел из которого знаменатель на шаге алгоритма равен $-k \in \mathbb{Z}$ (с минусом!):

$$\begin{gathered} \Delta_{0,k} = \{\alpha :\ [\![\frac{-1}{\alpha}]\!] = -k\} = \{\alpha :\ [\![\frac{1}{\alpha}]\!] = k\}, \\ \alpha_n \in \Delta_{0,k} \quad \Leftrightarrow \quad b_n(\alpha_n) = -k \quad (k \in \mathbb{Z}, |k| > 1). \end{gathered} \tag{12}$$

Четным, не равным нулю, значениям b_n соответствуют открытые интервалы, а нечетным ң изолированные точки:

$$\Delta_{0,k} = \begin{cases}]-\dfrac{1}{k-1}\ ; -\dfrac{1}{k+1}[\ , & \text{если } -k \in \mathbb{N}_{even}, \\ ]\ \dfrac{1}{k+1}\ ;\ \dfrac{1}{k-1}\ [\ , & \text{если } +k \in \mathbb{N}_{even}, \\ [\ \dfrac{1}{k}\ ;\ \dfrac{1}{k}\ ]\ , & \text{если } k \in \mathbb{Z}''_{odd}. \end{cases}$$

Знак k в индексе множества $\Delta_{0,k}$ указывает на положительной или отрицательной полуоси лежит это множество: при $k > 0$, $\Delta_{0,k} = -\Delta_{0,-k} \subset \mathbb{R}_+$.

Введем обозначения $V_0, V_{\pm 2}$ для трех множеств равной меры (2/3), значения знаменателя на которых по модулю больше двух или равны ∓ 2

соответственно:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}'' &= V_{-2} \cup V_0 \cup V_{+2},\\
V_{-2} &= \left]-1\,;-\frac{1}{3}\right[\, = \ \Delta_{0,-2} = \ \{\alpha \in \mathrm{I}'' :\ [\![\frac{-1}{\alpha}]\!] = +2\},\\
V_0 &= \left[-\frac{1}{3}\,;\ 0\right[\ \cup\ \left]0\,;\ \frac{1}{3}\right] = \bigcup_{|k|\ge 3} \Delta_{0,k} = \{\alpha \in \mathrm{I}'' :\ |[\![\frac{-1}{\alpha}]\!]| \ge 3\},\\
V_{+2} &= \left]\ \frac{1}{3}\,;\ \ 1\ \right[\, = \ \Delta_{0,+2} = \ \{\alpha \in \mathrm{I}'' :\ [\![\frac{-1}{\alpha}]\!] = -2\}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Последовательность шагов (11) алгоритма, записанная «лесенкой», задает формальный объект ч *цепную дробь*. Для указания соответствия цепной дроби *разложенному в нее* числу β_0 будет использоваться значок « $\to$ ».

Цепная дробь может *оборваться на шаге* $n = n_0$, т.е. быть *конечной*:

$$
\beta_0 \to b_0 + \cfrac{-1}{b_1 + \cfrac{-1}{b_2 + \cfrac{-1}{\ddots\ + \cfrac{-1}{b_{n_0}}}}},\qquad
\begin{array}{l}
b_0 \in \mathbb{Z},\ \text{если } n_0 = 0,\\[2ex]
\left.\begin{array}{l} b_0 \in \mathbb{Z}_{even},\\ b_1, \dots, b_{n_0-1} \in \mathbb{Z}'_{even},\\ b_{n_0} \in \mathbb{Z}'', \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{если}\\ n_0 > 0.\end{array}
\end{array}
\tag{14}
$$

Если все остатки α_n отличны от нуля, цепная дробь *бесконечна*:

$$
\beta_0 \to b_0 + \cfrac{-1}{b_1 + \cfrac{-1}{b_2 + \cfrac{-1}{\ddots\ \cfrac{}{b_n + \cfrac{-1}{\ddots}}}}},\qquad
\begin{array}{l} b_0 \in \mathbb{Z}_{even},\\ b_n \in \mathbb{Z}'_{even}, n \in \mathbb{N}. \end{array}
\tag{15}
$$

Применим шаг алгоритма к некоторому рациональному числу $\alpha_n = \dfrac{r_n}{s_n} \in \mathrm{I}'', r_n, s_n \in \mathbb{Z}$, где числа r_n, s_n ч взаимно просты и $|r_n| < |s_n|$. На первом этапе получим $\beta_n = -\dfrac{s_n}{r_n}$. После выделения знаменателя $b_{n+1} \in \mathbb{Z}$ остаток это несократимая дробь

$$
\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} = -\frac{s_n}{r_n} - b_{n+1} = \frac{-s_n - b_{n+1} r_n}{r_n}
\tag{16}
$$

имеющая числителем число $r_{n+1} = -s_n - b_{n+1} r_n$, модуль которого меньше модуля знаменателя $s_{n+1} = r_n$. Мы видим, что абсолютные значения знаменателей остатков разложения рационального числа $\beta_0 = b_0 + \dfrac{r_0}{s_0}, |r_n| <$

$|s_n|$, образуют убывающую последовательность. Т.е. за конечное число шагов $n_0 \leq s_0 - 1$ разложение в четную цепную дробь оборвется. Пример числа $\beta_0 = \dfrac{n}{n+1}$, для которого $\dfrac{r_k}{s_k} = \dfrac{n-k-1}{n-k}$, показывает, что указанная оценка числа шагов точна.

По аналогии с классами четных и нечетных целых чисел разделим рациональные числа на два класса $\mathbb{Q}_{even}, \mathbb{Q}_{odd}$. Несократимую дробь $p/q \in \mathbb{Q}$ отнесем к соответствующему множеству в зависимости от того, четна или нечетна их сумма $p+q$ (или разность $p-q$, которая имеет ту же четность). Отнесем число 0 к четным рациональным числам. Заметим теперь, что для нечетных множителей $c = 2d+1 \in \mathbb{Z}_{odd}$ четность сумм $p+q$ и $c(p+q) = 2d(p+q)+p+q$ одинакова. Поэтому в определении классов $\mathbb{Q}_{even}, \mathbb{Q}_{odd}$ требование не сократимости дроби можно ослабить, заменив условием не сократимости на два. Окончательно дадим определение

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{even} = \quad & \{\alpha = p/q : \ p, q \in \mathbb{Z}, p+q+1 \in \mathbb{Z}_{even}\}, \\ \mathbb{Q}_{odd} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_{even} = \quad & \{\alpha = p/q : \ p, q \in \mathbb{Z}_{odd}\}. \end{aligned}$$

Видно, что $\mathbb{Q}_{even} = -\mathbb{Q}_{even} \supset \mathbb{Z}_{even}, \mathbb{Q}_{odd} = -\mathbb{Q}_{odd} \supset \mathbb{Z}_{odd}$. Однако эти множества не в полной мере наследуют свойства множеств четных и нечетных чисел. Только сумма двух нечетных будет четным рациональным числоам, а, например, для пар чисел $a = 1/2, b = 1/3$ или $a = 1/2, b = 1/2$ суммы чисел $a \in \mathbb{Q}_A$ и $b \in \mathbb{Q}_B$ не лежат в классе $\mathbb{Q}_{A+B}$.

На шаге разложения в четную цепную дробь по формуле (16) дроби $\dfrac{r_n}{s_n}$ и $\dfrac{r_{n+1}}{s_{n+1}}$ лежат в одном и том же множестве Q_{even} или $\mathbb{Q}_{odd}$. Действительно, в силу четности b_{n+1}, сумма всех их числителей и знаменателей четна: $r_n + s_n - s_n - b_{n+1} r_n + r_n = 2r_n - b_{n+1} r_n \in \mathbb{Z}_{even}$. Таким образом, четность исходного рационального числа совпадает с четностью рационального числа ч последнего остатка $b_{n_0} = b_{n_0}/1$.

Зафиксируем установленный факты.

Теорема 1. *Произвольное вещественное число β раскладывается в четную цепную дробь. Иррациональные числа раскладываются в бесконечные цепные дроби вида (15), а рациональные числа ч в обрывающиеся и имеющие вид (14). Последнее неполное частное b_{n_0} обрывающейся на шаге n_0 цепной дроби четно для $\beta \in \mathbb{Q}_{even}$ и нечетно для $\beta \in \mathbb{Q}_{odd}$.*

Из свойства (1) ясно, что все элементы четных цепных дробей отличающихся знаками чисел β и $-\beta$ также отличаются только знаками: $b_n(-\beta) = -b_n(\beta)$.

По цепной дроби для тех индексов n, для которых определены знаменатели b_n, можно вычислить, сворачивая их снизу вверх, n*-е подходящие* *дроби*:

$$p_n = b_0 + \cfrac{-1}{b_1 + \cfrac{-1}{\ddots \, b_{n-1} + \cfrac{-1}{b_n}}}.$$

То, что на промежуточном или заключительном этапах вычислений не придется делить на 0, будет доказано ниже, при изучении вопросов сходимости (см. (32)). Пока же можно уйти от этой сложности, допустив в качестве подходящих дробей проективные векторы.

Поэтому с учетом сделанного замечания получаем, что возникающие в процессе сворачивания подходящие дроби $b_n, b_{n-1} + \dfrac{-1}{b_n}, \ldots, p_n$ будут четными или нечетными рациональными числами, в зависимости от четности последнего элемента b_n. Итак, p_n нечетно только для цепной дроби, оборвавшейся на данном шаге с номером n, для которой при этом $b_n \in \mathbb{Z}_{odd}$. Во всех остальных случаях подходящие дроби будут четными рациональными числами, т.е. у них либо числитель четный, а знаменатель нет, либо, наоборот, числитель нечетный, а знаменатель четный.

Будем говорить, что *цепная дробь сходится, если сходится последовательность ее подходящих дробей.* Вопросам сходимости посвящен отдельный параграф. Там будет доказано, что число β почти всегда имеет одно представление (для $\beta \in \mathbb{Q}_{odd}$ ч два) в виде сходящейся к нему четной цепной дроби.

Две цепные дроби вида (2) (не обязательно четные цепные дроби) называют *эквивалентными*, если их подходящие дроби с одинаковыми номерами равны. Четная цепная дробь (15) эквивалентна так называемой *правильной* цепной дроби, имеющей вид (3), где все числители a_n равны единице. Для записи последней помимо классической существует другая общепринятая форма:

$$\beta_0 \to b_0 + \cfrac{1}{-b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots \, (-1)^n b_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \qquad (17)$$

$$\beta_0 \to [\, b_0 \,; -b_1, b_2, -b_3, \ldots, (-1)^n b_n, \ldots].$$

На самом деле, имеет место не просто равенство n-х подходящих дробей, а, с точностью до знака $(-1)^n$, совпадение и их числителей, и их знаменателей. Компактную запись мы будем употреблять для задания эквивалентной четной цепной дроби. Например,

$$\begin{aligned} &\alpha_n \to [\,0\,;-b_{n+1},+b_{n+2},-b_{n+3},\ldots], \\ &\beta_n \to [\,b_n\,;-b_{n+1},+b_{n+2},\ldots], \quad n\in\mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{18}$$

Элементы $(-1)^n b_n, n\in\mathbb{N}$ эквивалентной правильной цепной дроби так же, как и b_n, будут четными не равными нулю числами. Поэтому четные цепные дроби эквивалентны правильным цепным дробям (17) с четными отличными от нуля элементами.

Бесконечную цепную дробь (15) и обрывающуюся цепную дробь (14) будем называть *цепными дробями до ближайшего четного* или четными цепными дробями, причем здесь *à priori* не предполагается, что цепная дробь алгоритмически получена по некоторому числу.

Говоря в дальнейшем о каком-либо объекте, связанным с некоторым этажом n цепной дроби, будем подразумевать, что объект при этом n определен, т.е. либо рассматриваемая цепная дробь бесконечна, либо она обрывается на шаге n_0, но позже: $n\le n_0$ или $n<n_0$.

§ 5. Общие факты теории цепных дробей

Пусть m ч натуральное число. Для кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ через $\mathbb{Z}^{m+1}$ обозначим $(m+1)$-мерную целочисленную решетку ($\mathbb{Z}$-модуль) ч множество упорядоченных наборов $\mathbb{Z}^{m+1}=\{\vec{\mathbf{x}}={}^{\mathrm{т}}(x_1,\ldots,x_{m+1}),\ x_1,\ldots,x_{m+1}\in\mathbb{Z}\}$. Элементы $\mathbb{Z}^{m+1}$ будут помечаться сверху стрелкой. Их можно складывать и умножать на элементы кольца $\mathbb{Z}$. m-мерным проективным пространством $\mathbb{ZP}^m$ над кольцом $\mathbb{Z}$ назовем множество классов эквивалентности пространства $\mathbb{Z}^{m+1}$ без нуля ($\vec{\mathbf{0}}={}^{\mathrm{т}}(0,\ldots,0),\ \mathbb{Z}'^{m+1}=\mathbb{Z}^{m+1}\setminus\vec{\mathbf{0}}$) по отношению пропорциональности с множителями ч ненулевыми элементами кольца $\mathbb{Z}$:

$$\begin{gathered} \vec{\mathbf{x}}={}^{\mathrm{т}}(x_1,\ldots,x_{m+1})\sim\vec{\mathbf{y}}={}^{\mathrm{т}}(y_1,\ldots,y_{m+1}) \\ \Updownarrow \\ \vec{\mathbf{x}},\vec{\mathbf{y}}\in\mathbb{Z}^{m+1}\setminus\vec{\mathbf{0}},\ \exists\, y_0,x_0\in\mathbb{Z}':\ y_0\vec{\mathbf{x}}=x_0\vec{\mathbf{y}}. \end{gathered}$$

Элементы $\mathbb{ZP}^m$ будем задавать указанием какого-либо представителя класса эквивалентности, т.е. набора $m+1$ целых чисел, не всех равных нулю, разделенных двоеточиями и помечать сверху чертой: $\bar{\mathbf{x}}={}^{\mathrm{т}}(x_1:\ldots:x_{m+1})\in\mathbb{ZP}^m$. Если какой-то из объектов $\bar{\mathbf{x}}\in\mathbb{ZP}^m$ или $\vec{\mathbf{y}}\in\mathbb{Z}'^{m+1}$ задан, мы будем без пояснений употреблять далее ту же букву для обозначения родственного объекта $\vec{\mathbf{x}}\in\mathbb{Z}'^{m+1}$ или $\bar{\mathbf{y}}\in\mathbb{ZP}^m$. Для обозначения компонент векторов и проективных векторов также будет использоваться дополнительный нижний индекс, помещаемый первым (все векторы у нас ч вектор-столбцы), перед, возможно, существовавшими у исходного объекта индексами: например, для $\bar{\mathbf{x}}_\ell \in \mathbb{ZP}^m$ будет подразумеваться, что $\bar{\mathbf{x}}_\ell = {}^{\mathsf{T}}(x_{1,\ell} : \ldots : x_{m+1,\ell})$. Для записи векторов и проективных векторов будет использоваться полужирный шрифт.

В настоящей работе введенный формализм будет использоваться, как правило, при $m = 1$. Проективное пространство будет полем отношений $\mathbb{ZP} = \mathbb{ZP}^1$ кольца, т.е. полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Отождествим числа $x \in \mathbb{R}$ с проективными векторами ${}^{\mathsf{T}}(x : 1) \in \mathbb{RP}$. Сопоставим невырожденной матрице 2×2 линейное преобразование вещественного проективного пространства $\mathbb{RP}$ или, эквивалентно, дробно-линейное преобразование $y(x)$ расширенной прямой $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. В проективном пространстве с конечными ($\neq \infty$) элементами $\bar{\mathbf{x}} = (x : 1), \bar{\mathbf{y}} = (y : 1)$ положим:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \to \quad y = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}.$$

Отображение не взаимно однозначное: отличающимся скалярным множителем матрицам (в частности, отличающимся знаком) отвечает одно и то же дробно-линейное преобразование. Все матрицы, что нам встретятся, будут из $SL)2, \mathbb{Z})$.

Введем единичную и нулевую матрицы E и 0 и унимодулярные матрицы J, $\tilde{B}_n$ и B_n, отвечающие инверсии с заменой знака $y(x) = -1/x$, сложениям $y(x) = x + b_n$ и их композициям $y(x) = -1/(x + b_n)$ (7), отвечающим дробно-линейным преобразованиям $\alpha_n = \mathcal{B}_n(\alpha_{n+1})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 + E = 0, \quad J^{-1} = -J = {}^{\mathsf{T}}J, \quad \det J = 1;$$

$$\tilde{B}_n = \begin{pmatrix} 1 & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det \tilde{B}_n = 1,$$

$$B_n = J\tilde{B}_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b_n \end{pmatrix}, \quad \det B_n = 1, \; n \in \mathbb{Z}_+. \tag{19}$$

Композиции $\beta_0 = \mathcal{P}_n(\alpha_{n+1})$ дробно-линейных преобразований отвечает преобразование с матрицей P_n, равной произведению J^{-1} и матриц B_k с последовательными индексами:

$$P_n = \tilde{B}_0 B_1 \ldots B_n = J^{-1} B_0 B_1 \ldots B_n = P_{n-1} B_n, \; \det P_n = 1 \; (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{20}$$

Удобно также ввести матрицу $P_{-1} = J^{-1} = -J$.

Теперь можно выписать формулы для остатков цепной дроби и подходящих дробей:

$$\bar{\beta}_0 = P_n \bar{\alpha}_{n+1}, \quad \vec{\mathbf{p}}_n = P_n \vec{\mathbf{0}} = P_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Из рекуррентной формулы (20) и вида (19) матриц B_n следует, что правые столбцы $\vec{\mathbf{p}}_{n-1} = {}^{\mathrm{T}}(p_{1,n-1}, p_{2,n-1})$ матриц P_{n-1} совпадают с левыми столбцами матриц P_n:

$$P_n = \begin{pmatrix} p_{1,n-1} & p_{1,n} \\ p_{2,n-1} & p_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{p}}_{n-1} & \vec{\mathbf{p}}_n \end{pmatrix}, \tag{22}$$

и что справедлива рекуррентная формула

$$\vec{\mathbf{p}}_n = b_n \vec{\mathbf{p}}_{n-1} - \vec{\mathbf{p}}_{n-2}, \ n \in \mathbb{Z}_+, \ P_{-1} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{p}}_{-2} & \vec{\mathbf{p}}_{-1} \end{pmatrix} = -J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Учитывая выражения (21), (22), для подходящих дробей получаем

$$\vec{\mathbf{p}}_n = \begin{pmatrix} p_{1,n} \\ p_{2,n} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{p}}_n = \frac{p_{1,n}}{p_{2,n}}.$$

Формулу (23) обычно пишут в виде двух одинаковых формул для компонент векторов $\vec{\mathbf{p}}_n$ ч *числителей* $p_{1,n}$ и *знаменателей* $p_{2,n}$ *подходящих дробей*:

$$\begin{array}{llll} p_{1,-2} = \ \ 0, & p_{1,-1} = 1, & p_{1,n} = b_n p_{1,n-1} - p_{1,n-2}, & \\ p_{2,-2} = -1, & p_{2,-1} = 0, & p_{2,n} = b_n p_{2,n-1} - p_{2,n-2}, & \end{array} \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{24}$$

Из условий (24) видно, что при всех $n \in \mathbb{Z}_+$ числители $p_{1,n}$ и знаменатели $p_{2,n}$ ч целые числа.

Свойство (23) позволяет включить столбцы всех матриц $P_n, n \geq -1$, в одну бесконечную матрицу - полуполосу P ширины 2:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} {\scriptstyle -2} & {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle n-1} & {\scriptstyle n} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & b_0 & b_1 b_0 - 1 & \dots & p_{1,n-1} & p_{1,n} & \dots \\ -1 & 0 & 1 & b_1 & \dots & p_{2,n-1} & p_{2,n} & \dots \end{pmatrix} \end{array}.$$

Числителями подходящих дробей будут элементы первой строки P, а знаменателями ч второй.

§ 6. Разложение единицы

Целое число раскладываются в цепную дробь до ближайшего четного, обрывающуюся на 0-м шаге.

Взяв начальное число α_1 так, чтобы $|\alpha_1| < 1/3$, получим $|\beta_1| > 3$ и $|b_1| \geq 4$. Если далее $|\alpha_2| < 1/3$, то и $|b_2| \geq 4$. Мы видим, что числа α_1 из множества канторовского типа разлагаются в цепную дробь с большими по модулю знаменателями b_n. Такие цепные дроби хорошо сходятся. Например, для $\sqrt{5} - 2 = [\ 0\ ; 4, 4, \dots]$ или $3 - \sqrt{10} = [\ 0\ ; -6, -6, \dots]$ со сходимостью все в порядке.

Попробуем разложить в цепную дробь число α_1, почти равное, но меньшее единицы: $\alpha_1 = 1 - \epsilon_1,\ \epsilon_1 > 0$. На первом шаге получим

$$\alpha_1 = \frac{-1}{-2+\alpha_2}, \quad b_1 = -2, \quad \alpha_2 = 1 - \epsilon_2, \quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon_1}{1-\epsilon_1}. \tag{25}$$

Число ϵ_2 тоже будет малым положительным числом. Продолжая разложение, для какого-то числа n_1 начальных индексов $n \leq n_1$ получим $\alpha_n = 1 - \epsilon_n, \epsilon_n > 0, b_n = -2$. С уменьшением ϵ_1 число шагов n_1 растет. Рассмотрим теперь две периодические с периодом 1 четные цепные дроби с элементами $b_n = -2$ и $b_n = 2, n \in \mathbb{N}$:

$$[\ 0\ ; +2, -2, +2, -2, \ldots, 2(-1)^{n+1}, \ldots], \tag{26}$$

$$[\ 0\ ; -2, +2, -2, +2, \ldots, 2(-1)^{n}\ , \ldots]. \tag{27}$$

Введем вспомогательную нильпотентную матрицу N

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^k = 0,\ k \geq 2.$$

Определим матрицы $J_n, n \in \mathbb{Z}$, отвечающие дробно-линейным преобразованиям (10), проиндексировав их модулем знаменателя b (сравн. (12)):

$$J_{-n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & n \end{pmatrix},\ J_{+n} = -^{\mathrm{т}}J_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = 0$ получим $J_0 = J$, а при $n = \mp 2$ ч

$$J_{-2} = E + N, \quad J_{+2} = -E -^{\mathrm{т}}N.$$

Вычислим n-е степени матриц J_{-2}, J_{+2}, разложив их по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned} J_{-2}^{\,n} &= E + nN = \begin{pmatrix} 1-n & -n \\ n & n+1 \end{pmatrix}, \\ J_{+2}^{\,n} &= (-^{\mathrm{т}}J_{-2})^{\ n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

Отметим, что формулы (28) верны для любых целых степеней ч как для положительных, так и для отрицательных, т.е. как для прямых дробно-линейных отображений $\alpha = \mathcal{J}_{\sigma,n}(\alpha_{n+1})$ так и для обратных отображений $\alpha_{n+1} = \mathcal{J}^{-1}_{\sigma,n}(\alpha)$ $(\sigma = \pm 1)$. Итак, отображения $\mathcal{J}_{\sigma,n}(\alpha)$ задаются формулами

$$\mathcal{J}_{-1,n}(\alpha) = -\frac{(n-1)\alpha + n}{n\alpha + n + 1}, \quad \mathcal{J}_{+1,n}(\alpha) = \frac{(n-1)\alpha - n}{n\alpha - (n+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{29}$$

или, с учетом того, что $\sigma\alpha = |\alpha|$, одной общей формулой

$$\mathcal{J}_{\sigma,n}(\alpha) = \frac{\sigma(n-1)\alpha - n}{n\alpha - \sigma(n+1)} = \sigma\left(1 - \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{|\alpha| - 1}}\right), \quad \sigma = \pm 1,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Формула (30) позволяет вычислять подходящие дроби к цепным дробям (27) и (26). Они суть

$$J_{-2}^{\,n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n \\ n+1 \end{pmatrix}, \quad J_{+2}^{\,n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^n\begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Подходящие дроби сходятся к ∓ 1, но сходятся чрезвычайно медленно ч совершенно не так, как сходятся подходящие дроби к классическим цепным дробям. Такая же медленная сходимость наблюдается и для подходящих дробей разложений чисел, близких к нечетным рациональным числам. Вероятно, именно это «плохое» свойство цепных дробей до ближайшего четного послужило причиной того, что данный тип цепных дробей до сих пор не был исследован.

§ 7. Сходимость четных цепных дробей

Рассмотрим произвольную бесконечную цепную дробь вида (15). По индукции легко устанавливаются следующее свойство.

Теорема 2. Модули знаменателей n-х подходящих дробей не равны нулю и строго монотонно возрастают:

$$0 \neq |p_{2,n}| > |p_{2,n-1}|, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{32}$$

Действительно, $1 = |p_{2,0}| > |p_{2,-1}| = 0$, и при $n = 0$ левая часть неравенства доказана. Далее на шаге индукции имеем

$$|p_{2,n}| \geq |b_n||p_{2,n-1}| - |p_{2,n-2}| = (|b_n| - 1)|p_{2,n-1}| + |p_{2,n-1}| - |p_{2,n-2}|, \tag{33}$$

и с учетом того, что $|b_n| - 1 \geq 1$, получаем нужную оценку (32). ∎

Общую оценку почти всегда для бесконечно многих индексов n можно усилить. Усиление невозможно только для периодических четных цепных дробей, элементы которых после некоторого номера ℓ либо равны 2, как у цепной дроби (26), либо равны -2, как у цепной дроби (27). Класс таких четных цепных дробей назовем $\mathrm{Per}[\pm 2]$ (от «periodical»):

$$\beta = [b_0; -b_1, .., (-1)^k b_k, ..] \in \mathrm{Per}[\pm 2] \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k\ b_k \in \mathbb{Z}_{even}, \\ \exists \ell \in \mathbb{Z}_+, \theta = \pm 1 : \forall n \geq \ell\ b_n = 2\theta. \end{cases} \tag{34}$$

Бесконечная цепная дробь (15) может не содержаться в классе $\mathrm{Per}[\pm 2]$ по одной из двух, либо по обеим причинам. Либо у нее есть бесконечное число элементов b_n, не равных плюс ч минус двойке, либо все ее элементы начиная с некоторого по модулю равны двойке, но среди них есть бесконечно много как положительных, так и отрицательных:

$$\begin{array}{lrl} A) & \forall\ \ell \in \mathbb{N}\ \exists\ n \geq \ell : & |b_n| \geq 4, \\ B)\ \ \forall\ \ell\ |b_\ell| = 2, & \forall\ \ell \in \mathbb{N}\ \exists\ n \geq \ell : & b_{n+1} = -b_n. \end{array}$$

Проследим за знаками знаменателей цепной дроби. Из формулы (24) и роста модулей знаменателей $p_{2,n}$ следует, что знаки последовательных знаменателей $p_{2,n}, p_{2,n-1}$ совпадают, если $b_n > 0$, и противоположны, если $b_n < 0$. Так как $p_{2,0} = 1$, знак $p_{2,n}$ равен произведению знаков знаменателей b_k.

Из базового общего свойства подходящих дробей

$$p_{n-1} - p_n = \frac{\det P_n}{p_{2,n-1} p_{2,n}} = \frac{1}{p_{2,n-1} p_{2,n}}, \tag{35}$$

получаем, что

$$\mathrm{sign}\ (p_{n-1} - p_n) = \mathrm{sign}\ \frac{1}{p_{2,n-1} p_{2,n}} = \mathrm{sign}\ b_n$$

и справедливо следующее свойство

$$\begin{array}{ll} p_0 & = b_0, \\ p_{n-1} < p_n & \Leftrightarrow \quad b_n < 0 \quad (n \in \mathbb{N}). \end{array}$$

Таким образом, верна

Теорема 3. Подходящая дробь $p_n, n \in \mathbb{N}$, четной цепной дроби меньше предыдущей, если элемент b_n положителен, и больше, если он отрицателен. Знак ее знаменателя равен

$$\mathrm{sign}\ p_{2,n} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{sign}\ b_k. \tag{36}$$

Теорема 4. Для бесконечной цепной дроби не из $\mathrm{Per}[\pm 2]$ для бесконечного числа n верно:

$$A)\ \text{если}\ |b_n| \geq 4,\ \text{ то}\ |p_{2,n}| \geq 3|p_{2,n-1}| + 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{37}$$

$$B)\ \text{если}\ b_n = -b_{n-1} = 2\theta,\ \theta = \pm 1,\ \text{ то}\ |p_{2,n}| \geq 2|p_{2,n-1}| + 1 \quad (n \in \mathbb{N}'). \tag{38}$$

Доказательство. В случае A, с учетом уже доказанного, оценку (33) продолжим так

$$|p_{2,n}| \geq 3|p_{2,n-1}| + |p_{2,n-1}| - |p_{2,n-2}| \geq 3|p_{2,n-1}| + 1.$$

В случае B в рекуррентном соотношении (24)

$$\frac{p_{2,n}}{p_{2,n-1}} = 2\theta + (-\frac{p_{2,n-2}}{p_{2,n-1}}),$$

слагаемые в правой части одного знака:

$$-\frac{p_{2,n-2}}{p_{2,n-1}} = -\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-2} \operatorname{sign} b_k}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} \operatorname{sign} b_k} = -\operatorname{sign} b_{n-1} = \operatorname{sign} b_n = \theta,$$

и поэтому $|p_{2,n}| = 2|p_{2,n-1}| + |p_{2,n-2}| \geq 2|p_{2,n-1}| + 1$. ∎

Применив несколько раз неравенство (35), получаем, что

$$|p_{2,n+k}| \geq |p_{2,n}| + k, \quad |p_{2,n}| \geq n+1, \quad n, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{39}$$

откуда

$$|p_n - p_{n+1}| = \frac{1}{|p_{2,n}p_{2,n+1}|} \leq \frac{1}{|p_{2,n}|(|p_{2,n}|+1)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Поэтому ряд $p_n + \sum\limits_{k=0}^{\infty}(p_{k+1} - p_k)$, частные суммы которого суть подходящие дроби p_n, сходится абсолютно к некоторому числу $\tilde{\beta}_0 \in \mathbb{R}$. Заметим, что из (35), (39) вытекает оценка

$$|p_n - \tilde{\beta}_0| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |p_{k+1} - p_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(|p_{2,n}|+k)(|p_{2,n}|+k+1)} = \frac{1}{|p_{2,n}|}.$$

То есть

$$|p_n - \tilde{\beta}_0| \leq \frac{1}{|p_{2,n}|} \leq \frac{1}{n+1}. \tag{40}$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Четная цепная дробь сходится, причем*

$$|p_n - \tilde{\beta}_0| \leq \frac{1}{|p_{2,n}|} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Пометим расположенной над символом волной пределы подходящих дробей $p_k(\alpha_n), p_k(\beta_n)$ к четным цепным дробям, являющимся остатками α_n и β_n цепной дроби (15):

$$\tilde{\alpha}_n = \lim_{k\to\infty} [\ 0\ ; -b_{n+1}, \ldots, (-1)^k b_{n+k}\ ],$$
$$\tilde{\beta}_n = \lim_{k\to\infty} [\ b_n\ ; -b_{n+1}, \ldots, (-1)^k b_{n+k}\ ], \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для k-х подходящих дробей $p_k(\alpha_n)$ к $\tilde{\alpha}_n$ верны формулы

$$p_k(\alpha_n) = \frac{-1}{p_{k-1}(\beta_n)},\ p_{k-1}(\beta_n) = b_n + p_{k-1}(\alpha_{n+1}),\ p_k(\alpha_n) = \frac{-1}{b_n + p_{k-1}(\alpha_{n+1})}.$$

Переходя в них к пределам по $k \to \infty$, получаем, что предельные значения, относящиеся к формальной четной дроби, связаны между собой такими же дробно-линейными соотношениями, как если бы они получались в процессе разложения какого-то числа в цепную дробь:

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{-1}{\tilde{\beta}_n}, \qquad \tilde{\beta}_n = b_n + \tilde{\alpha}_{n+1}, \qquad \tilde{\alpha}_n = \frac{-1}{b_n + \tilde{\alpha}_{n+1}}.$$

И вообще, со значениями четных цепных дробей можно оперировать при помощи невырожденных дробно-линейных преобразований, убирая или достраивая с помощью не равных нулю четных чисел верхние этажи цепной дроби.

Для цепных дробей вне класса Per[±2] оценку (40) можно улучшить: если не все элементы $b_1, \ldots, b_n$ цепной дроби (15) равны элементам одной из двух цепных дробей (26) или (27), то $|p_{2,k}| \geq k+2$ при $k \geq n$. Откуда, в частности, получаем строгое неравенство

$$|\tilde{\alpha}_0| = |p_0 - \tilde{\beta}_0| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |p_{k+1} - p_k| < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1. \qquad (41)$$

Неравенство (41) по-другому означает, что четное число b_0 будет ближайшим четным числом к $\tilde{\beta}_0$ и, следовательно, оно и остаток $\tilde{\alpha}_1$ получаются из $\tilde{\beta}_0$ шагом алгоритма разложения в четную цепную дробь. Тот же вывод можно сделать и для других пар чисел ҷ неполных частных b_n и остатков $\tilde{\beta}_n$. Тем самым доказана

Теорема 6. *Если четная цепная дробь не принадлежит классу* Per[±2]*, она может быть получена из своего предела алгоритмом разложения в четную цепную дробь.*

Теперь для указания значения цепной дроби не обязательно пририсовывать волну над символами α, β: вместо значка соответствия « $\to$ » при написании цепной дроби можно употреблять знак равенства.

Мы видели, что бесконечная периодическая цепная дробь (26) сходится к единице. То есть число 1 имеет два различных разложения в четную цепную дробь ч обрывающееся и бесконечное. Подобно тому, как это делается для периодических десятичных дробей со сплошными девятками на конце, исключим из рассмотрения четные цепные дроби, имеющие своими нижними звеньями бесконечно повторяющиеся двойки или повторяющиеся минус двойки, т.е. цепные дроби введенного ранее класса $\mathrm{Per}[\pm 2]$. Обоснуем это.

Пусть ℓ ч номер звена четной цепной дроби, стоящего непосредственно перед участком с бесконечно повторяющимися двойками или минус двойками. При этом положим $\ell = 0$, если таких звеньев нет. Воспользовавшись соотношением (21), для проективных векторов ч подходящих дробей $\bar{\mathbf{p}}_{\ell+n}(\beta) = P_\ell J_{\pm 2}^n \bar{\mathbf{0}}$, где $J_{\pm 2}^n$ определяются по формулам (28), получим для пределов подходящих дробей

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \bar{\mathbf{p}}_{\ell+n}(\beta) &= \lim_{n\to\infty} P_\ell \begin{pmatrix} (-1)^n n \\ (-1)^n(n+1) \end{pmatrix} = P_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } \theta = -1, \\
\lim_{n\to\infty} \bar{\mathbf{p}}_{\ell+n}(\beta) &= \lim_{n\to\infty} P_\ell \begin{pmatrix} -n \\ n+1 \end{pmatrix} = P_\ell \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } \theta = 1.
\end{aligned}$$

Но получившиеся предельные векторы могут быть получены по-другому, с использованием новых матриц B_ℓ^θ:

$$\begin{aligned}
P_\ell \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= P_{\ell-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_{\ell-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b_\ell + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P_{\ell-1} B_\ell^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
P_\ell \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= P_{\ell-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_{\ell-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b_\ell - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P_{\ell-1} B_\ell^{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Если $\ell = 0$, цепная дробь, отвечающая матрице $P_{\ell-1} B_\ell^\theta$, это нечетное число $b_0 - \theta \in \mathbb{Z}_{odd}$. Если же $\ell > 0$, то четное число b_ℓ не равно 0 и 2θ, а стоящее в матрице B_ℓ^θ нечетное число число $b_\ell - \theta$ не равно плюс ч минус единице, т.е. $|b_\ell - \theta| \geq 3$. В обоих случаях можно рассмотреть отвечающую матрице $P_{\ell-1} B_\ell^\theta$ обрывающуюся четную цепную дробь

$$[\, b_0\, ; -b_1, \ldots, (-1)^{\ell-1} b_{\ell-1}, (-1)^\ell (b_\ell - \theta)], - \tag{42}$$

ведь условия (14) для нее выполнены. К тому же все подходящие дроби с номерами n, меньшими ℓ, у цепных дробей (34) и (42) совпадают. При этом, как мы видели, последнее неполное частное обрывающейся цепной дроби ч нечетное.

Итак, каждой бесконечной четной цепной дроби (34) из класса $\mathrm{Per}[\pm 2]$ соответствует ровно одна обрывающаяся цепная дробь (42), отвечающая рациональному числу β из $\mathbb{Q}_{even}$, а рациональному числу из $\mathbb{Q}_{even}$ соответствуют ровно две четные цепные дроби ч обрывающаяся и бесконечная периодическая, имеющая β своим пределом:

Теорема 7. *Между бесконечными периодическими цепными дробям из* $\mathrm{Per}[\pm 2]$ *и нечетными рациональными числами* $\mathbb{Q}_{odd}$ *имеется взаимно однозначное соответствие.*

Введем линейные формы

$$L_n = p_{1,n} - p_{2,n}\beta_0 = p_{2,n}(p_n - \beta_0), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{43}$$

Заменив b_n в рекуррентных соотношениях (24) на $-\alpha_{n+1} - \dfrac{1}{\alpha_n}$, получим

$$p_{j,n-1}\alpha_{n+1} + p_{j,n} = -\frac{p_{j,n-2}\alpha_n + p_{j,n-1}}{\alpha_n} = \ldots = \frac{p_{j,-1}\alpha_1 + p_{j,0}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(-\alpha_k)}, \quad j = 1, 2.$$

Учтя, что

$$\beta_0 = \frac{p_{1,n-1}\alpha_{n+1} + p_{1,n}}{p_{2,n-1}\alpha_{n+1} + p_{2,n}}, \tag{44}$$

и что $p_{2,-1} = 0, p_{2,0} = 1$, получаем

$$L_n = \frac{-\alpha_{n+1}}{p_{2,n-1}\alpha_{n+1} + p_{2,n}} = (-1)^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}\alpha_k.$$

Из формул (8), (6) получения элемента b_k по остатку α_k на шаге алгоритма разложения видим, что

$$\mathrm{sign}\ \alpha_k = -\ \mathrm{sign}\ b_k, \tag{45}$$

и поэтому

$$L_n = (-1)^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}(-\ \mathrm{sign}\ b_k)\prod_{k=1}^{n+1}|\alpha_k| = \prod_{k=1}^{n+1}\mathrm{sign}\ b_k\prod_{k=1}^{n+1}|\alpha_k|. \tag{46}$$

Теперь мы можем указать, с какой стороны от разлагаемого числа расположена подходящая дробь:

$$\mathrm{sign}\ (p_n - \alpha) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\mathrm{sign}\ b_k}{\prod\limits_{k=1}^{n}\mathrm{sign}\ b_k} = \mathrm{sign}\ b_{n+1}.$$

Для цепной дроби не из класса $\mathrm{Per}[\pm 2]$ каждая из величин α_k в произведении (46) по модулю строго меньше единицы, и верна

Теорема 8. *Абсолютные значения линейных форм L_n с ростом n строго убывают; подходящие дроби p_n меньше разложенного в четную цепную дробь числа, если знак элемента b_{n+1} четной цепной дроби отрицателен, и больше ч если положителен:*

$$|L_{n+1}| < |L_n| = \prod_{k=1}^{n+1} |\alpha_k|, \quad \text{sign}\,(p_n - \alpha) = \text{sign}\, b_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \qquad (47)$$

Рациональное число q_1/q_2 называется *наилучшим приближением к вещественному числу* α, если для всех рациональных чисел q_1'/q_2' со знаменателями $q_2' \neq 0$, по модулю меньшими $|q_2|$, выполнено

$$|q_2\alpha - q_1| < |q_2'\alpha - q_1'| \ \ \forall\, q_1', q_2' \in \mathbb{Z}, 0 < |q_2'| < |q_2|.$$

Мы будем опираться на общеизвестный факт, что подходящие дроби к классическим правильным цепным дробям суть наилучшие приближения. Для четных цепных дробей аналогичного соответствия классов рациональных чисел (или включения) нет.

Начнем с того, что подходящие дроби четной цепной дроби всегда являются «четными» рациональными числами, т.е. нечетна сумма их числителя и знаменателя (в несократимой на 2 форме). Т.е. с помощью четной цепной дроби принципиально невозможно получить наилучшие приближения к числу, и числитель, и знаменатель которых нечетны. А таких подходящих дробей к классической цепной дроби, говоря не строго, одна треть (еще по одной трети подходящих дробей имеют четный числитель и нечетный знаменатель или, наоборот, нечетный числитель и четный знаменатель.)

Для четных цепных дробей, например, с положительными элементами $b_n > 0, n \in \mathbb{N}$, из (47) следует, что последовательность подходящих дробей p_n монотонно убывает, а все разности $p_n - \beta$ положительны. Но известно, что подходящие дроби классической правильной цепной дроби (наилучшие приближения) с четными и с нечетными индексами расположены по разные стороны от приближаемого числа. То есть среди подходящих дробей к четной цепной дроби нет ни одного наилучшего приближения, меньшего β.

С другой стороны, пример подходящих дробей $p_k = k/(k+1), k < n$, четной цепной дроби числа $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}, n \in \mathbb{N}$, показывает, что большинство из них ч не наилучшие приближения.

Будет ли наилучшими приближениями некоторая подпоследовательность подходящих дробей к четной цепной дроби, мы намерены изучить в последующих работах.

§ 8. Представление четными цепными дробями квадратичных иррациональностей

Пусть $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ч квадратичная иррациональность, лежащая в расширении $\mathbb{Q}[\beta]$ поля рациональных чисел и $f_\beta(x)$ ч *основной многочлен числа* β:

$$f_\beta(u) = au^2 + bu + c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, \ a > 0, \ f_\beta(\beta) = 0 \tag{48}$$

(здесь a, b, c взаимно просты). $D = b^2 - 4ac$ ч *дискриминант числа* β, а $\breve{\beta}$ ч *сопряженное к* β *число*, т.е. корни

$$\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$$

уравнения $f_\beta(x) = 0$ суть β и $\breve{\beta}$.

Если при разложении некоторого числа β четная цепная дробь периодическая ($\alpha_n = \alpha_{n+t}, t \in \mathbb{N}, n \geq \ell$), то число α_ℓ дробно-линейно выражается через $\alpha_{\ell+t}$, то есть через само себя. Это условие приводит к квадратному уравнению на α_ℓ. Исходное число β_0 дробно-линейно выражается через один из корней данного уравнения и поэтому само тоже будет корнем какого-то квадратного уравнения. Причем последнее уравнение не может быть приводимым над полем рациональных чисел, иначе α_0 было бы рациональным числом и раскладывалось не в периодическую, а в обрывающуюся цепную дробь.

Докажем обратное утверждение: любая квадратичная иррациональность раскладывается в периодическую четную цепную дробь.

Для начала заметим, что квадратичная иррациональность не может разлагаться в обрывающуюся цепную дробь или четную цепную дробь из класса Per$[\pm 2]$. Поэтому для бесконечного числа индексов выполнено одно из двух условий (37) или (38). Пусть $n-1$ именно такой индекс.

Вспомним теперь формулу (44) для выражения разложенного в цепную дробь числа через n-й остаток $\alpha_{n+1} = \beta_n - b_n$ (см. (9)):

$$\beta_0 = \frac{p_{1,n-1}\beta_n - p_{1,n-2}}{p_{2,n-1}\beta_n - p_{2,n-2}}.$$

При этом из теории алгебраических чисел следует, что число β_n будет квадратичной иррациональностью, и сопряженное к β_0 число $\breve{\beta}_0$ вычисляется через сопряженное к β_n число $\breve{\beta}_n$ по аналогичной формуле. Нас интересует обратное представление $\breve{\beta}_n$ через $\breve{\beta}_0$:

$$\breve{\beta}_n = \frac{p_{1,n-2} - \breve{\beta}_0 p_{2,n-2}}{p_{1,n-1} - \breve{\beta}_0 p_{2,n-1}} = \frac{p_{2,n-2}}{p_{2,n-1}} \left(1 + \frac{1}{p_{2,n-2}p_{2,n-1}(p_{n-1} - \breve{\beta}_0)}\right).$$

Поскольку для четных цепных дробей рациональные дроби p_{n-1} сходятся к $\beta_0 \neq \breve{\beta}_0$, а знаменатели $p_{2,n-2}p_{2,n-1}$ подходящих дробей с ростом n неограниченно возрастают, выражение в больших круглых скобках стремится к единице и при $n-1$ больших некоторого n_1 отличается от 1 менее, чем на 1/2. В случае А отношение $\dfrac{p_{2,n-2}}{p_{2,n-1}}$ по модулю меньше 1/3, а в случае В ч меньше 1/2, и, в любом случае, модуль всего выражения $\breve{\beta}_n$ не больше 3/4. По свойству четных цепных дробей, модуль числа β_n больше единицы. Поэтому модули чисел $\beta_n - \breve{\beta}_n$ и $\beta_n^{-1} - \breve{\beta}_n^{-1}$ больше, чем 1/4 и 1/3 соответственно.

Для фиксированных положительных чисел c_1, c_2 назовем число α $(c_1, c_2)-$приведенным, если для корней уравнения (48) верно

$$|\alpha - \breve{\alpha}| > c_1, \quad |\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\breve{\alpha}}| > c_2.$$

Поскольку $(a\alpha - a\breve{\alpha})^2 = (c\alpha^{-1} - c\breve{\alpha}^{-1})^2 = D$, то модули коэффициентов a, c ограничены:

$$|a| < \frac{\sqrt{D}}{c_1}, \quad |c| < \frac{\sqrt{D}}{c_2}. \tag{49}$$

Число их целочисленных пар a, c, лежащих в прямоугольнике (49), конечно. Для каждой такой пары существует: не более двух отличающихся знаками целых чисел b, для которых $b^2 = D + 4ac$; столько же уравнений (48) (с положительным a) и пар их корней. Поэтому справедлива

Лемма 1. *Для конкретных $c_1, c_2 > 0$ число $(c_1, c_2)-$приведенных квадратичных иррациональностей α конечно.*

Легко проверить, что элементарные дробно-линейные отображения вида (6) и (8), обратные к ним и их композиции переводят квадратичные иррациональности в квадратичные иррациональности, удовлетворяющие квадратным уравнениям с тем же дискриминантом. Итак, дискриминанты всех чисел β_k, α_k равны дискриминанту β_0.

Применяя лемму, мы получим, что какой-то из остатков β_n цепной дроби по подпоследовательности индексов $n-1$, удовлетворяющих условиям А или В, неизбежно повторится при разных индексах. Повторятся и результаты разложения в четную цепную дробь этих остатков: алгоритм периодичен.

Нами доказан аналог теоремы Эйлера - Лагранжа

Теорема 9. *Квадратичные иррациональности и только они раскладываются в периодические четные цепные дроби, не принадлежащие классу* $\mathrm{Per}[\pm 2]$.

§ 9. Примеры

В приведенных примерах над строкой указана общая длина участка. В участках, состоящих из чередующихся неполных частных $2, -2, 2, \ldots$ и $-2, 2, -2, \ldots$ указано только число 2 или -2, с которого он начинается.

9.1. «Четные» и «нечетные» рациональные числа.

$$\frac{2n-1}{2n+1} = [\ 0\ ; \overbrace{2, -2, \ldots, (-1)^n 2}^{n-1}, (-1)^{n+1} 3],$$

$$\frac{n}{n+1} = [\ 0\ ; \overbrace{2, -2, \ldots, (-1)^{n-1} 2}^{n}\ ], \quad n \in \mathbb{N}.$$

9.2.1. «Золотое сечение».

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = [\ 2\ ; \overbrace{-2, -2,\ 2,\ 2}^{4}, \overbrace{-2, -2,\ 2,\ 2}^{4}, \ldots].$$

Длина периода равна 4.

9.2.2. Квадратичные иррациональности с длинными периодами.

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n} = [\ 0; \overbrace{2, -2, \ldots, (-1)^{n-1} 2}^{n}, \overbrace{(-1)^{n-1} 2, (-1)^n 2, .., (-1)^{2n-2} 2}^{n}, ..], \ n \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

Напомним, что для отыскания периода четной цепной дроби k-й элемент используемого здесь представления в виде правильной цепной дроби надо умножить на $(-1)^k$, поэтому, не смотря на то, что при нечетных n выражение $(-1)^{n-1}$ равно единице, длина периода здесь $2n$, а не n.

Интересно проследить за значениями квадратичной формы, связанной с числом β. Пусть (48) ą основной многочлен квадратичной иррациональности β. Свяжем с числом β определенную на целочисленной решетке без нуля квадратичную форму

$$y^2 f_\beta\left(\frac{x}{y}\right) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad (x, y) \in \mathbb{Z}^{2'}. \tag{51}$$

Значения формы ą отличные от нуля целые числа.

Подставив в (51) числители $x = p_{1,k}$ и знаменатели $y = p_{2,k}$ подходящих дробей, получим периодическую последовательность $f_{\beta,k} = ap_{1,k}^2 + bp_{1,k}p_{2,k} + cp_{2,k}^2$. Для алгебраических чисел (50) и $k = 2sn + t$ эта последовательность лежит на двух периодически повторяющихся кусках парабол и напоминает синусоиду:

$$f_{\frac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}, 2ns+k} = \begin{cases} 2t^2 - 2nt + 2t - n, & \text{если } 0 \le t < n, \\ 2t^2 + 2t - 6nt - 3n + 4n^2, & \text{если } n \le t < 2n. \end{cases}$$

Минимальные мо модулю значения $(-1)^s n$ и $(-1)^{s+1} n$ принимаются в точках вида $ns-2$ и $ns-1$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Абсолютные значения максимальных по модулю значений формы весьма велики: $n^2/2$ при четном n и $(n^2+1)/2$ при нечетном n.

9.3. Постоянная Эйлера: $e \approx 2.7128$ (основание натуральных логарифмов).

$$e = [\ 2\ ; \overbrace{2, -2,\ 2}^{3}, \overbrace{2, -2,\ 2, -2,\ 2}^{5}, \ldots, \overbrace{2, -2, \ldots, -2,\ 2}^{2n+1}, \ldots],$$

Мы видим, что, кроме плюс и минус двойки, другие четные неполные частные в предложенных примерах не встретились. Числа же $+2$ и -2 встречаются примерно поровну. Это не случайно. В планируемом нами продолжении настоящей работы будет указана причина этого явления.

Однако другие примеры показывают, что другие четные числа в разложениях встречаются, но редко.

$$e - 1 = [\ 2\ ; \overbrace{-4,\ 2,\ 4,\ 2}^{4}, \overbrace{-8,\ 2,\ 8,\ 2}^{4}, \ldots, \overbrace{-4n,\ 2n,\ 4n,\ 2n}^{4}, \ldots].$$

9.4. Кубический корень из двух.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = [2; -2, 2, -2, -6, 2, 4, 2, -10, 16, -12, 2, -2, -4, -12, -2, -4, 2, -2, -4,$$
$$2, -2, 2, -2, -2, 2, -16, 2, -2, 14, -16, -4, 6, \overbrace{-2, ..}^{534}, ..].$$

9.5.1. Число $\pi \approx 3.14159$.

$$\pi = [\ 4\ ; \overbrace{-2, 2, ..}^{6}, -16, \overbrace{-2, ..}^{293}, -2, 4, -4, \overbrace{-2, ..}^{14} -4, 2, 2, 2, 2, 2, \overbrace{2, -2, ..}^{84}, 4, -2,$$
$$-16, 2, -2, 14, ..].$$

$$\pi - 1 = [\ 2\ ; 8, \overbrace{-2, ..}^{15}, -292, -2, 2, 2, 2, -2, 2, -2, -14, -2, -2, 4, -2, 4, -2,$$
$$2, 84, 2, 2, -16, -4, \overbrace{2, ..}^{13}, 4, 2, 6, 6, 100, -4, 2, -8, 2, -2, 6, 2, -8, \overbrace{2, ..}^{8},$$
$$-8, 4, -2, 2, -8, ..].$$

Обращают на себя внимание почти повторяющиеся большие числа в этих двух разложениях: числа «повторов» $293, 14, 84$ в первом разложении и $-292, -14, 84$ во втором. Если продолжать разложения дальше, в аналогичных ролях встретятся пары $438, 436$ и $20776, -20778$. Это указывает на существующую связь между разложениями чисел β и $\beta - 1$. Разложения других чисел β подтверждают сделанную гипотезу.

Однако пока, на начальной стадии развития теории четных цепных дробей, исследование этой связи затруднительно. Сначала должен быть создан необходимый аппарат для исследования и только потом будет возможно описание данной связи.

9.5.2. Постоянная Эйлера - Машерони: $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln n) \approx 0.57722$).

$$\begin{aligned}\gamma = [\,0; &2,-4,4,-6,2,-2,14,6,-2,-8,-2,2,-6,2,40,\overbrace{2,..}^{11},-4,-8,8,2,-6,\\ &\overbrace{-2,..}^{49},6,-66,-2,2,-2,2,-8,-12,400,2,2,-2,2,-4,4,-6,-4,2,-2,..],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma-1 = [\,0;&-2,-2,-2,2,-2,-4,-4,2,\overbrace{-2,..}^{13},6,2,-10,4,-2,2,-2,2,\overbrace{2,..}^{41},\\ &12,-2,2,-8,\overbrace{-2,..}^{8},\overbrace{2,..}^{6},-50,2,-2,2,-2,-66,6,\overbrace{-2,..}^{6},-12,..].\end{aligned}$$

9.5.3. Постоянная Каталана: $\mathrm{Catalan} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \approx 0.915965$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Catalan} = [0;\,&\overbrace{2,..}^{99},6,-2,-8,\overbrace{2,..}^{22},-2,-4,\overbrace{2,..}^{26},-12,12,-10,-4,2,2,-2,-2,\\ &2,-4,12,2,-2,-6,\overbrace{-2,..}^{13},-4,-8,2,2,6,-6,-10,2,2,-34,-4,-2,4,6,\\ &-2,2,-4,4,-4,8,..].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Catalan}-1 = [0;&-12,10,-90,2,-2,2,-2,\overbrace{-2,..}^{7},24,-4,2,-2,28,-12,\overbrace{-2,..}^{11},\\ &-10,2,-2,2,2,-2,-2,4,-2,2,12,-2,\overbrace{-2,..}^{7},-12,-2,2,-2,2,-8,-2,4,\\ &\overbrace{-2,..}^{5},-6,\overbrace{2,..}^{9},2,-2,-34,2,-2,2,-2,-2,2,-2,6,4,-2,2,2,2,-2,2,8,\\ &-2,2,-2,2,-2,4,2,-2,2,-4,-2,4,-16,6,-2,2,-2,2,2,4,\overbrace{2,..}^{17},-6,16,\\ &-2,\overbrace{-2,..}^{13},-2,4,2,-2,4,\overbrace{2,..}^{6},4,-4,2,-324,2,2,-2,2,108,4,-4,..].\end{aligned}$$

Список литературы

1. Perron O. Die Lehre von den Kettenbr*ü*chen. Leipzig ч Berlin: Teubner, 1913. S. 1ч520.

2. Парусников В.И. Обобщение теоремы Пинкерле для k-членных рукуррентных соотношений // Матем. Заметки, 2005, т. 78(4), с. 575ч592.

3. Стилтьес Т. Исследование о непрерывных дробях. Харьков ч Киев: ОНТИ, 1936.