ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 83 за 2008 г.

Орлов Ю.Н., Ивкина Ю.П.

Обобщение теоремы Козлова-Пуанкаре о диффузии для бесстолкновительной сплошной среды

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Орлов Ю.Н., Ивкина Ю.П. Обобщение теоремы Козлова-Пуанкаре о диффузии для бесстолкновительной сплошной среды // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 83. 12 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-83

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

Ю.Н. Орлов, Ю.П. Ивкина

Обобщение теоремы Козлова-Пуанкаре о диффузии для бесстолкновительной сплошной среды

Москва - 2008

Ю.Н. Орлов, Ю.П. Ивкина. Обобщение теоремы Козлова-Пуанкаре о диффузии для бесстолкновительной сплошной среды. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2008, 12 страниц, библиография: 4 наименования.

В работе проводится обобщение теоремы В.В. Козлова о слабой сходимости решения бесстолкновительного уравнения Лиувилля к равновесному распределению, однородному по пространственным переменным. Для этого вводится принцип проектирования меры фазовом пространстве системы на меру, абсолютно непрерывную относительно меры Лебега в координатном пространстве. В этих терминах доказывается теорема о слабом пределе распределений, являющихся решениями однородного уравнения Лиувилля и принадлежащих новым функциональным пространствам.

Y.N. Orlov, Y.P. Ivkina. Generalization of the Kozlov-Puancare diffusion theorem for the collisionless continuous medium. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2008, 12 Pages, 4 References.

In this work the generalization of the Kozlov-Puancare diffusion theorem on weak convergence of the collisionless Liouville equation to the equilibrium distribution, which is homogeneous with respect to spatial coordinates. For this purpose the principal of measure projection in the system phase state is introduced. In these terms the theorem of existence of weak limit of distributions of Liouville equation is proved in new functional spaces.

Введение

В настоящей работе исследуются асимптотические по времени свойства функционалов на решениях уравнения Лиувилля. Этими свойствами определяется равновесное состояние системы.

Статистическое равновесие в газе означает в классическом понимании, что скорости частиц имеют максвелловское распределение, а плотность постоянна по всему объему (с точностью до флуктуаций), т.е. равна средней плотности газа. Выравнивание же плотности означает, что имеет место диффузия, при которой начальные неоднородные условия необратимо размываются. В то же время уравнения динамики отдельных частиц и всей системы в целом обратимы по времени. Согласование этих двух положений именно для случая идеального газа представляет особую важность: может оказаться, что необратимость является скорее математическим свойством, чем следствием физических гипотез, таких, например, как гипотеза молекулярного хаоса в уравнении Больцмана [1].

Данная работа основывается на теоремах В.В. Козлова [2] об асимптотическом поведении функций распределения для ряда модельных систем статистической механики, в частности, для уравнения Лиувилля бесстолкновительной сплошной среды. В монографии [2] были математически корректно обоснованы идеи А. Пуанкаре [3] о представлении идеального газа как бесстолкновительной сплошной среды, использующем аналогию между уравнением Лиувилля для функции распределения идеального газа по координатам и скоростям и уравнением неразрывности в механике жидкости.

В настоящей работе проводится доказательство аналога теоремы В.В. Козлова о диффузии для случая принадлежности распределений (мер в фазовом пространстве) классам функций, отличным от интегрируемых по Риману или Лебегу. Именно, доказано существование слабого предела решения уравнения Лиувилля для бесстолкновительной сплошной среды, когда распределение принадлежит классу сингулярных обобщенных функций по пространственной координате.

2. Постановка задачи

Введем следующую систему обозначений. Следуя [2], движение частицы в замкнутом сосуде, например, в n-мерном параллелепипеде, с условием упругого отражения от стенок может быть представлено как бесстолкновительное периодическое движение на торе T^n. Пусть скорость ω частицы принадлежит R^n. Тогда ее движение в фазовом пространстве $P = T^n \times R^n$ задается уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = 0; \quad x \in T^n, \omega \in R^n. \qquad (1)$$

Предположим теперь, что имеется континуум частиц, которые движутся по закону (1), т.е. не сталкиваются между собой, но упруго отражаются от стенок сосуда. Введем функцию распределения такой бесстолкновительной сплошной среды $f(x,\omega): T^n \times R^n \to R$. Исследуем, сходится ли и в каком смысле эта функция распределения при $t \to +\infty$.

Введем оператор эволюции системы

$$U_t: \ f(x,\omega) \to f_t(x,\omega),$$

где $f_t(x,\omega)$ – функция распределения через промежуток времени *t*: $U_t(f(x,\omega)) = f(x-\omega t,\omega)$.

Приведем формулировки теорем, доказанных В.В. Козловым в [2] относительно асимптотических свойств функции $f_t(x,\omega)$, которые обобщаются в данной работе.

Теорема 1 (В. В. Козлов).

Пусть $f(x,\omega): \ P \to R$ *есть интегрируемая по Лебегу функция, а* $g(x): T^n \to R$ *интегрируемая по Риману функция. Введем функционал*

$$K(t) = \int\limits_P f(x-\omega t,\omega) g(x) d^n x d^n \omega. \tag{2}$$

Тогда существует предел этого функционала при $t \to +\infty$*, равный*

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = < f > \overline{g}, \tag{3}$$

где

$$< f >= \int\limits_P f(x,\omega) d^n x d^n \omega, \qquad \overline{g} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n} g(x) d^n x. \tag{4}$$

Теорема 2 (В. В. Козлов).

Пусть f, g*:* $P \to R$ *- интегрируемые по Лебегу функции вместе со своими квадратами, т.е.* $f, g \in L_2(P)$. *Введем функционал*

$$K(t) = \int\limits_P f(x-\omega t,\omega) g(x,\omega) d^n x d^n \omega. \tag{5}$$

Тогда существует предел этого функционала при $t \to +\infty$*, равный*

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = (2\pi)^n \int\limits_{R^n} \overline{f}\,\overline{g} d^n \omega. \tag{6}$$

В формуле (6) черта сверху означает усреднение по тору, как и в (4). В частном случае теоремы 1, когда $g(x)$ является характеристической функцией некоторого множества $G \subset \Pi$, измеримого в смысле Жордановой меры, функционал $K(t)$ в формуле (2) может быть представлен в виде

$$K(t) = \int\limits_P f(x-\omega t,\omega) g(x) d^n x d^n \omega = \int\limits_{G\times R^n} U_t(f(x,\omega)) d^n x d^n \omega.$$

Последний интеграл представляет собой долю частиц, находящихся в момент времени t в объеме G. Следовательно, указанная теорема имеет следующую интерпретацию [2]:

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = <f> \overline{g} = \int_P f(x,\omega) d^n x d^n \omega \cdot \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} g(x) d^n x = \frac{mesG}{mes\Pi} ,$$

т.е. частицы со временем стремятся равномерно заполнить сосуд.

В теореме 2 функцию распределения следует рассматривать как линейный функционал на пространстве L_2. В пространстве линейных функционалов предел $f(x,\omega)$ при $t\to\infty$ понимается в слабом смысле, и теорема 2 позволяет найти этот предел. Именно, определим непрерывный линейный функционал

$$f(g) = (f,g) = (f,g)_{L_2} .$$

Тогда теорема 2 может быть записана в следующем виде:

$$(U_t(f),g) = (f_t,g) \to (f_0,g), \;\; t\to\infty ,$$

где

$$(f_0,g) = (2\pi)^n \int_{R^n} \overline{f}\,\overline{g} d^n\omega .$$

Далее мы рассматриваем обобщения вышеприведенных теорем, переходя от функций распределения к мерам в фазовом пространстве системы.

3. Обобщение теоремы 1

Принципиально важным свойством функции плотности распределения является ее интегрируемость по Лебегу. Отказ от этого свойства в общем случае приводит к тому, что утверждение теоремы 1 не имеет места. Например, пусть в системе существует конечная доля ν частиц с одинаковой скоростью $\omega=\omega_0$. В этом случае среднее значение некоторой функции g по распределению f определяется как

$$\overline{g}(t) = \int_{T\times R\setminus\omega_0} g(x,\omega)\cdot f(x-\omega t,\omega) d\omega dx + \nu \int_T g(x,\omega_0)\cdot f(x-\omega_0 t,\omega_0) dx .$$

В этом выражении первое слагаемое при $t\to\infty$, как следует из (3)-(4), стремится к константе, а вот второе слагаемое может являться в общем случае периодической функцией, и в результате сумма не будет стремиться к константе. Если же существует конечный набор таких групп частиц со скоростями $\omega = {\omega_0}^1, \ldots {\omega_0}^N$, то получающаяся в результате сумма периодических функций является почти-периодической функцией и также не имеет предела при $t\to\infty$.

Однако есть важный пример обобщения теоремы 1 на случай, когда распределение $f(x,\omega)$ представляется в виде линейной комбинации обобщенных функций с точечным носителем по пространственным координатам с коэффициентами, являющимися интегрируемыми по Лебегу функциями в пространстве скоростей. В частности, пусть

$$f(x,\omega) = \delta(x)h(\omega)\,. \tag{7}$$

Тогда для функционала (2) получаем

$$K(t) = \int\limits_P g(x)\cdot U_t(f(\omega))dxd\omega = \\ = \int\limits_P g(x)\cdot\delta(x-\omega t)\cdot f(\omega)d\omega dx = \int\limits_{R^n} g(\omega t)\cdot f(\omega)d\omega\,. \tag{8}$$

Исследуем поведение $K(t)$ (8) при $t\to\infty$ и покажем, что, как и в случае (4), частицы со временем равномерно заполняют сосуд. Подчеркнем, что функция распределения (7) принадлежит другому классу, чем предполагается в теореме 1.

Теорема 3. *Пусть* $f(x,\omega) = \delta(x)h(\omega)$, *где* $h(\omega)$ *– интегрируемая по Лебегу функция на* R^n, *и пусть* $g(x)$ *есть интегрируемая по Риману функция на* T^n. *Тогда существует предел при* $t\to\infty$ *функционала*

$$K(t) = \int\limits_P f(x-\omega t,\omega)g(x)d^n x d^n\omega$$

(см. формулу (2)), равный

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n} h(\omega)d^n\omega \int\limits_{T^n} g(x)d^n x\,. \tag{9}$$

Доказательство проводится в несколько этапов. Предварительно заметим, что, поскольку любую интегрируемую по Лебегу функцию можно представить как разность двух положительных функций, то доказательство достаточно провести только для положительных функций h. Сначала докажем теорему для случая, когда g является тригонометрическим полиномом. Затем получим то же равенство для всех функций g из пространства интегрируемых по Риману на T^n.

1) Пусть $g = C$. Тогда сразу же получаем формулу (9):

$$K(t) = \int\limits_{R^n} C\cdot h(\omega)d\omega = C\int\limits_{R^n} h(\omega)d\omega = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{T^n} Cd^n x\int\limits_P h(\omega)d^n\omega = \\ = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_P h(\omega)d^n\omega\int\limits_{T^n} g(x)d^n x\,.$$

2) Пусть $g(x) = \exp(ikx)$. Тогда

$$K(t) = \int\limits_P \exp(ikx)\delta(x-\omega t)h(\omega)d^n x d^n\omega = \int\limits_{R^n}\exp(ik\omega t)h(\omega)d^n\omega\,,$$

и по теореме Римана $\lim_{t\to\infty} K(t) = 0$. В силу линейности функционала (2) отсюда следует, что равенство (9) выполнено для всех тригонометрических полиномов.

3) Пусть теперь $g(x)$ – функция, интегрируемая по Риману. Тогда для любого ε существуют такие тригонометрические полиномы $g_1(x)$ и $g_2(x)$, что $g_1(x) \le g(x) \le g_2(x)$, и $\overline{g_2} - \overline{g_1} < \varepsilon$ где, как и выше в (4), чертой сверху обозначено усреднение функции по тору.

Обозначим

$$K_1(t) = \int_{R^n} g_1(\omega t)\cdot h(\omega)d\omega, \qquad K_2(t) = \int_{R^n} g_2(\omega t)\cdot h(\omega)d\omega.$$

Т.к. $h(\omega) \ge 0$, то $\forall t$ имеет место система неравенств $K_1(t) \le K(t) \le K_2(t)$ и, кроме того,

$$\lim_{t\to\infty}(K_2(t) - K_1(t)) = (\overline{g_2} - \overline{g_1})\int_{R^n} h(\omega)d\omega < \varepsilon \int_{R^n} h(\omega)d\omega.$$

Следовательно, получаем оценку

$$|K(t) - \overline{g}\int_{R^n} h(\omega)d\omega| \le$$

$$\le |K(t) - K_1(t)| + |K_1(t) - \overline{g}_1 \int_{R^n} h(\omega)d\omega| + |\overline{g_2} - \overline{g_1}| \int_{R^n} h(\omega)d\omega \le const\cdot\varepsilon.$$

Теорема 3 доказана.

Таким образом, формулировка теоремы 1 в части интегрируемой по Лебегу функции может быть изменена так, чтобы включить случай, когда $f(x,\omega) = \delta(x)\cdot h(\omega)$, где только $h(\omega)$ является интегрируемой по Лебегу функцией. Теперь представляется полезным сформулировать и доказать теорему, включающую в себя оба варианта. Для этого имеет смысл перейти от функций распределения к мерам.

4. Теорема об асимптотике меры

Заметим, что функционал $K(t)$ в (2) можно рассматривать не только в виде $K(t) = \int_P g(x)\cdot U_t(f(\omega))dxd\omega$, но и перенести временную зависимость на функцию $g(x)$:

$$K(t) = \int_P g(x)\cdot U_t(f(\omega))dxd\omega = \int_P g(x)\cdot f(x-\omega t,\omega)dxd\omega =$$

$$= \int_P g(x+\omega t)\cdot f(x,\omega)dxd\omega = \int_P U_{-t}(g(x))\cdot f(x,\omega)dxd\omega.$$

Тем самым теорема 1 может быть переформулирована в терминах меры $d\mu = f(x,\omega)dxd\omega$:

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \int_P g(x+\omega t)\cdot d\mu =$$

$$= \int_P f(x,\omega)d^n x d^n\omega \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} g(x)d^n x = \bar{g}\cdot \int_P d\mu .$$

Аналогично и функцию $f(x,\omega) = \delta(x)\cdot h(\omega)$, где $h(\omega)$ интегрируемая по Лебегу функция, можно представить как меру $d\mu = h(\omega)d\omega\cdot d\nu$, где $d\nu$ есть мера Дирака, т.е.

$$\nu(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ 0\in A \\ 0, & \text{если } \ 0\notin A \end{cases}.$$

В этом случае для рассматриваемого функционала $K(t)$ (2) получаем тот же результат, что и в теореме 3, совпадающий формально с утверждением теоремы 1:

$$\lim_{t\to\pm\infty} K(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \int_P g(x+\omega t)\cdot d\mu = \lim_{t\to\pm\infty} \int_P g(\omega t)h(\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} h(\omega)d\omega \int_{T^n} g(x)dx = \bar{g}\cdot \int_P d\mu.$$

Таким образом, возникает вопрос дальнейшего обобщения задачи: для какого класса мер можно доказать теорему 1?

Как мы уже упоминали, большое значение имеет интегрируемость функции распределения по скоростям. Для того чтобы это условие можно было сформулировать для произвольной меры, необходимо определить принцип «проектирования» меры μ пространства $T^n\times R^n$ в меру λ пространства R^n, на которую можно будет уже накладывать требования абсолютной непрерывности относительно меры Лебега. Мы будем рассматривать только конечные меры, определенные на борелевской σ-алгебре. Определим «принцип проектирования» следующим образом: каждой интегрируемой по Риману функции $g(x)$ поставим в соответствие меру

$$\lambda_g: \quad \lambda_g(A) = \int_{T^n\times A} g(x)d\mu = \int_{T^n\times R^n} g(x)\cdot\chi_A(\omega)d\mu \tag{10}$$

для любого множества A из борелевской σ- алгебры на R^n. Докажем корректность такого определения λ_g и определим соответствующий интеграл

$$\int_{R^n} \varphi(\omega)d\lambda_g .$$

Лемма. *Для любой интегрируемой по Риману функции* $g(x)$ *функционал*

$$\lambda_g:\quad \lambda_g(A)=\int\limits_{T^n\times A} g(x)d\mu=\int\limits_{T^n\times R^n} g(x)\cdot\chi_A(\omega)d\mu$$

является мерой, причем для любой ограниченной непрерывной функции $\varphi(\omega)$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_{R^n}\varphi(\omega)d\lambda_g=\int\limits_{R^n\times T^n}\varphi(\omega)g(x)d\mu .$$

Доказательство. Покажем сначала, что функционал

$$\lambda_g(A)=\int\limits_{T^n\times R^n} g(x)\cdot\chi_A(\omega)d\mu$$

существует и принимает конечные значения. Действительно, функция $g(x)\cdot\chi_A(\omega)$ измерима относительно борелевской σ- алгебры и ограничена. Следовательно, $g(x)\cdot\chi_A(\omega)\le C$. Тогда

$$\int\limits_{T^n\times R^n} g(x)\cdot\chi_A(\omega)d\mu\le\int\limits_{T^n\times R^n} Cd\mu=C\int\limits_{T^n\times R^n} d\mu .$$

Теперь докажем, что функционал $\lambda_g(A)$ обладает всеми необходимыми свойствами меры, а именно: во-первых, $\lambda_g(\varnothing)=0$; во-вторых,

$$\lambda_g(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\int\limits_{T^n\times R^n} g(x)\cdot\chi_{UA_i}(\omega)d\mu=\int\limits_{T^n\times R^n} g(x)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\chi_{A_i}(\omega)d\mu=$$

$$=\int\limits_{T^n\times R^n}\sum_{i=1}^{\infty}(g(x)\cdot\chi_{A_i}(\omega))d\mu=\int\limits_{T^n\times R^n}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(g(x)\cdot\chi_{A_i}(\omega))d\mu=$$

$$=\int\limits_{T^n\times R^n}\lim_{N\to\infty}(g(x)\cdot\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{N}A_i}(\omega))d\mu .$$

Поскольку же $g(x)\cdot\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{N}A_i}(\omega)\le C$ и интеграл $\int\limits_{T^n\times R^n} Cd\mu$ существует, то по теореме о мажорированной сходимости [4, стр.30] написанная выше цепочка равенств может быть продолжена так:

$$\lambda_g(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\int\limits_{T^n\times R^n}\lim_{N\to\infty}(g(x)\cdot\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{N}A_i}(\omega))d\mu=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{T^n\times R^n} g(x)\cdot\chi_{\bigcup\limits_{i=1}^{N}A_i}(\omega)d\mu=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{T^n\times R^n}(g(x)\cdot\chi_{A_i}(\omega))d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{T^n\times R^n}(g(x)\cdot\chi_{A_i}(\omega))d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_g(A_i).$$

Таким образом, мера λ_g определена корректно и является конечной.

Докажем, что любая ограниченная непрерывная функция $\varphi(\omega)$ является интегрируемой по мере λ_g и $\int\limits_{R^n}\varphi(\omega)d\lambda_g = \int\limits_{R^n\times T^n}\varphi(\omega)g(x)d\mu$.

Рассмотрим сначала простые функции, то есть измеримые функции, принимающие не более чем счетное число значений. Пусть $h(\omega)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}y_i\chi_{A_i}(\omega)$ есть простая ограниченная функция. Тогда имеем

$$\int\limits_{R^n}h(\omega)d\lambda_g := \sum_{i=1}^{\infty}y_i\lambda_g(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{T^n\times R^n}g(x)\cdot y_i\chi_{A_i}(\omega)d\mu =$$

$$= \int\limits_{T^n\times R^n} g(x)\sum_{i=1}^{\infty}y_i\chi_{A_i}(\omega)d\mu = \int\limits_{T^n\times R^n}g(x)h(\omega)d\mu \le C\int\limits_{T^n\times R^n}d\mu .$$

Далее, для любой ограниченной непрерывной функции $\varphi(\omega)$ существует последовательность равномерно сходящихся к ней простых ограниченных функций $h_k(\omega)$, так что $\varphi(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}h_n(\omega)$. Тогда справедлива цепочка равенств:

$$\int\limits_{R^n}\varphi(\omega)d\lambda_g = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{R^n}h_k(\omega)d\lambda_g = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{T^n\times R^n}g(x)h_k(\omega)d\mu =$$

$$= \int\limits_{T^n\times R^n} g(x)\lim_{k\to\infty}h_k(\omega)d\mu = \int\limits_{T^n\times R^n}g(x)\varphi(\omega)d\mu .$$

Лемма доказана.

Таким образом, каждой интегрируемой по Риману функции $g(x)$ и мере μ, определенной на $R^n\times T^n$, мы ставим в соответствие меру λ_g, определенную на R^n. На эту меру мы будем накладывать ограничения, которые накладывали на функцию $f(x,\omega)$ по переменной ω, а именно: мера λ_g должна быть абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то есть $d\lambda_g = f_g(\omega)d\omega$. Тогда справедливо следующее утверждение, являющееся обобщением теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть мера λ_g, определенная в (10), абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{T^n\times R^n} g(x+\omega t)d\mu = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n\times R^n} d\mu \int\limits_{T^n} g(x)dx \qquad (11)$$

Доказательство теоремы 4 проводим аналогично доказательству теоремы 3.
1). Пусть $g(x)=C$. Очевидно, что

$$\int\limits_{T^n\times R^n} Cd\mu = C \int\limits_{T^n\times R^n} d\mu = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n\times R^n} d\mu \int\limits_{T^n} g(x)dx,$$

т.е. формула (11) выполнена.
2). Пусть $g(x)=e^{ikx}$. Тогда

$$K(t) = \int\limits_{T^n\times R^n} e^{ik(x+\omega t)}d\mu = \int\limits_{T^n\times R^n} e^{ikx}e^{ik\omega t}d\mu = \int\limits_{R^n} e^{ik\omega t}d\lambda_g = \int\limits_{R^n} e^{ik\omega t} f_g(\omega)d\omega.$$

Так как $f_g(\omega)$ - интегрируемая по Лебегу функция, то по теореме Римана $\lim\limits_{t\to\infty} K(t)=0$. Таким образом, формула (11) справедлива, если $g(x)$ – тригонометрический полином.
3.) Пусть теперь $g(x)$ интегрируемая по Риману функция. Тогда существуют такие тригонометрические полиномы $g_1(x)$ и $g_2(x)$, что

$$g_1(x) \le g(x) \le g_2(x), \quad \int\limits_{T^n} (g_2(x)-g_1(x))dx \le \varepsilon .$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{T^n\times R^n} g_1(x+\omega t)d\mu \le \int\limits_{T^n\times R^n} g(x+\omega t)d\mu \le \int\limits_{T^n\times R^n} g_2(x+\omega t)d\mu .$$

4). Из пункта 2) доказательства следует, что существует такое T, что при всех $T<t$ выполняется

$$\left| \int\limits_{T^n\times R^n} g_1(x+\omega t)d\mu - \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n\times R^n} d\mu \int\limits_{T^n} g_1(x)dx \right| \le \varepsilon .$$

Поскольку же $\int\limits_{T^n} (g(x)-g_1(x))dx \le \varepsilon$, то

$$\left| \int\limits_{T^n\times R^n} g_1(x+\omega t)d\mu - \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n\times R^n} d\mu \int\limits_{T^n} g(x)dx \right| \le const\cdot\varepsilon .$$

Аналогичное неравенство записывается и для $g_2(x)$. Тогда получаем, что

$$\left| \int\limits_{T^n\times R^n} g(x+\omega t)d\mu - \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n\times R^n} d\mu \int\limits_{T^n} g(x)dx \right| \le const\cdot\varepsilon ,$$

то есть

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{T^n\times R^n} g(x+\omega t)d\mu = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{T^n\times R^n} d\mu \int\limits_{T^n} g(x)dx\,.$$

Теорема 4 доказана.

5. Заключение

Итак, мы рассмотрели возможность обобщения формулировки теоремы о слабой асимптотике функции распределения, являющейся решением уравнения Лиувилля, переходя от распределений к мерам и вводя операцию проектирования меры на пространство скоростей так, чтобы полученная мера была абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. В этот класс мер попадает и мера в виде обобщенной функции с точечным носителем по пространственной координате. Тем самым «теорема о диффузии» (теорема 1 В.В. Козлова) усиливается с позиций ее физической интерпретации.

Используя теорему 2, можно сказать, что необратимая диффузия до полностью однородного состояния идеального газа в сосуде с зеркальными граничными условиями имеет место даже в том случае, когда первоначально газ был собран «в одной точке», если только распределение его по скоростям является интегрируемой по Лебегу функцией.

Представляется, что формулировка и доказательство теоремы 1 (теорема 4) в терминах меры позволяет унифицировать метод доказательства аналогичных утверждений для более сложных динамических систем, чем модель (1). В то же время подчеркнем, что и бесстолкновительная модель (1) обладает нетривиальным поведением с точки зрения стремления к равновесию.

Авторы глубоко признательны академику В.В. Козлову за возможность обсуждения на его семинарах отдельных аспектов рассматриваемой проблемы, связанных с термодинамической и статистической интерпретацией полученных результатов, а также профессорам В.В. Веденяпину и М.В. Масленникову за внимание к работе и полезные дискуссии.

Список литературы

1. Л. Больцман. Лекции по теории газов. М.: Гостехиздат, 1956.
2. В.В. Козлов. Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. А. Пуанкаре. Замечания о кинетической теории газов. Избранные труды, т. III. М.: Наука, 1974.
4. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.