



Иванов Д.С., [Овчинников М.Ю.](#)

Математическое
моделирование
управляемого движения
многоэлементной системы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Иванов Д.С., Овчинников М.Ю. Математическое моделирование управляемого движения многоэлементной системы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 72. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-72>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им.М.В.КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Д.С. Иванов, М.Ю. Овчинников

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ
МНОГОЭЛЕМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ**

Москва

2008

Математическое моделирование управляемого движения многоэлементной системы. Д.С.Иванов, М.Ю.Овчинников. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, Москва, 2008, N 72, 32 страницы, 32 рисунка, библиография 7 наименований.

Дано описание многозвенной системы, состоящей из нескольких подвижных макетов, изготовленных в Центре космических технологий и микрогравитации (ZARM) Бременского университета (Германия). Создана математическая модель движения этой системы. Приведены результаты математического моделирования алгоритма управления движением, обеспечивающего перемещение элементов системы по заданной траектории. Рассмотрены несколько конфигураций системы, способов взаимодействия её элементов, исследована зависимость параметров системы от параметров движения, проведено исследование точности управления.

Ключевые слова: многоэлементная система, алгоритм управления, лабораторное моделирование динамики

Mathematical Modeling of Multilink System Controlled Motion, D.S.Ivanov, M.Yu.Ovchinnikov, Preprint of KIAM RAS, Moscow, 2008, N 72, 32 Pages, 32 Figures, 7 References.

Laboratory facility for simulation of planar formation mock-up dynamics is developed at Zentrum für Angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation (ZARM) in Bremen University (Germany) which is used for verification of motion control algorithms. Mathematical modeling results of motion control algorithms which provide formation motion near the given trajectory are obtained. Several configurations and ways of system elements interaction are considered. Dependence of system parameters vs. motion characteristics is investigated. Control accuracy research is conducted.

Key words: multilink system, control algorithm, laboratory simulation of dynamics

1. Введение

Появление малых спутников привело к возникновению нового взгляда на способы формирования конфигураций космических систем, схемы выполнения экспериментов, способы решения новых фундаментальных и прикладных задач в космосе. В частности, стало возможным формирование группы спутников, движущихся по орбите на небольшом удалении друг от друга и решающих единую задачу. Принципиальной особенностью группового полета является автономная навигация отдельного аппарата в составе группы и управление их взаимным относительным положением в группе. Это могут быть статические и меняющиеся во времени конфигурации. Возможность определения взаимного положения аппаратов и управления взаимным положением порождает возможность переконфигурирования системы, маневрирования, сближения и стыковки спутников. Достоинствами группового полета (*формации* – от *Formation Flying*) является способность одновременного проведения наблюдений, измерений, других экспериментов в различных точках пространства при заданном и контролируемом взаимном положении спутников, на которых установлена необходимая для решения таких задач полезная нагрузка. Другое преимущество, которое обеспечивает формация над отдельным спутником, заключается в том, что выход из строя одного или даже части группы спутников не приводит к потере работоспособности всего ансамбля [1].

Вышеперечисленные особенности использования группы малых аппаратов относятся далеко не только к спутникам, но и, к примеру, к группам роботов, находящихся в какой-либо земной среде и выполняющих общую задачу, для решения которой необходимо управлять их взаимной ориентацией и положением. Изменяются законы движения аппаратов, а цели и алгоритмы управления могут быть весьма схожими. Обобщая, можно назвать группу аппаратов *многозвенной системой*. Для определенности будем всё же далее говорить о группе малых спутников как о частном примере многозвенной системы.

1.1. Примеры различных целей управления движением формаций и их возможных конфигураций

Рассмотрим некоторые конфигурации формаций и цели управления их движением.

Важным свойством формации, недоступным одиночному спутнику, является возможность одновременного измерения характеристик среды в различных, но близких точках пространства. Это свойство важно для метеорологии, задач изучения атмосферы, магнитосферы Земли и т.д. Однако для того, чтобы обработать полученные одновременные измерения и, скажем, составить пространственную карту, необходимо знать взаимное расстояние между спутниками и постоянно поддерживать его. Таким образом, возникает задача управления пространственным взаимным положением отдельных спутников формации.

Примером использования формации для изучения гравитационного поля Земли является выведенная на орбиту в марте 2002 года формация *GRACE*

(Gravity Recovery And Climate Experiment). Формация состоит из двух спутников, масса каждого около 430 кг, находящихся на почти полярной орбите высотой 485 км и наклоном 89° . Эскиз миссии в полёте показан на рис.1.1. В середине миссии спутники, двигающиеся по схеме «лидер-ведомый», сблизились, поменялись местами и снова разошлись на прежнее расстояние. С помощью полученных данных ученые планируют показать, что изменение гравитационного поля Земли эффективно отображает изменения в климате планеты.

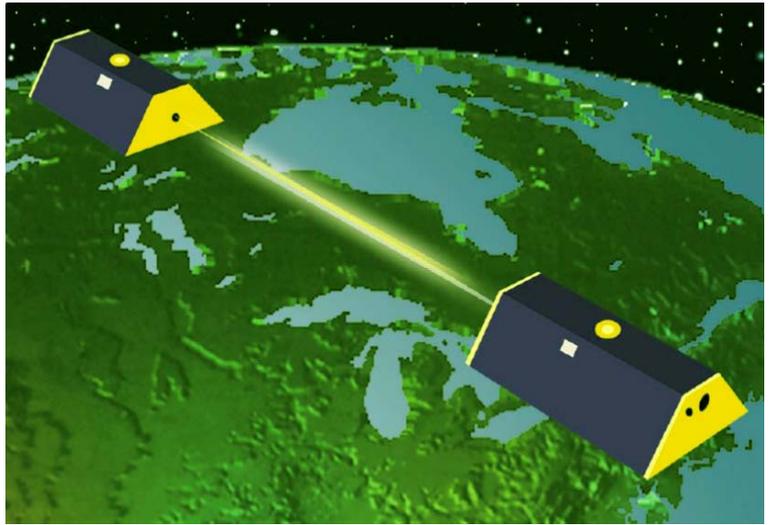


Рис. 1.1. Миссия *GRACE*

Возможность одновременного выполнения измерений из разных точек пространства позволяет проводить астрономические наблюдения или наблюдения объектов на поверхности Земли с высоким разрешением, используя систему спутников, как телескопную систему с разнесенной апертурой. Базой интерферометра в данном случае будет относительное расстояние между спутниками. Опять возникает задача измерения и поддержания относительного расстояния между спутниками. Для обработки получаемых снимков также необходимо знать и их взаимную ориентацию, а в общем случае, когда нужно повернуть камеру для съёмки определённой точки, нужно уметь управлять взаимной ориентацией спутников.

Примером системы для составления топографической карты поверхности Земли с большой точностью служит формация *TanDEM-X*, разрабатываемая DLR, Германия. *TanDEM-X* состоит из двух спутников, образующих большой интерферометр, способный проводить картографирование Земли с точностью до двух метров (рис.1.2). Запуск формации планируется в 2009 году.

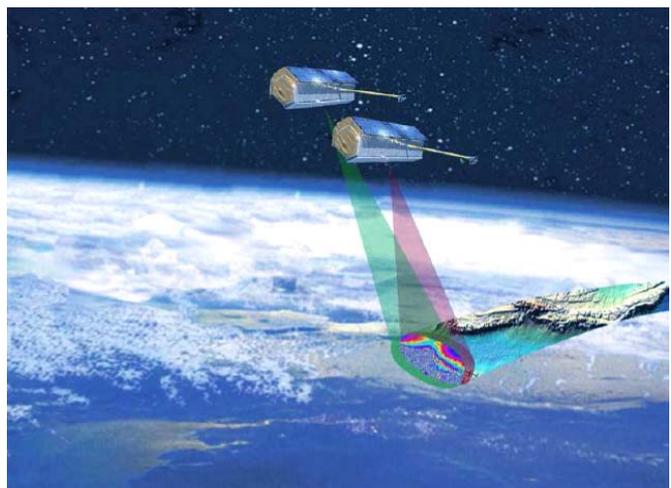


Рис. 1.2. Спутники для картографирования местности

Как уже было сказано выше, по сравнению с одиночными миссиями в формации появляется необходимость обеспечения заданного взаимного положения аппаратов и это не может быть решено в рамках подходов, реализуемых для одиночных миссий, в которых управление осуществляется либо в автономном режиме, либо по командам с Земли. Приходится решать

задачу навигационного обеспечения относительного движения в формации по автономным измерениям относительной скорости и/или относительного расстояния между спутниками. Причем, в группе спутников обычно выделяется головной аппарат, который, выполняя управляющие функции, подает команды остальным членам группы. Так в формациях реализуется принцип распределённой информационно-системы. Примером миссии, где была использована такая схема управления, можно рассматривать формацию *ST5* (Space Technology-5), состоящую из трех автономных спутников (рис.1.3). Формация была разработана для тестирования технологий в интересах будущей миссии NASA Magnetospheric Constellation Mission.

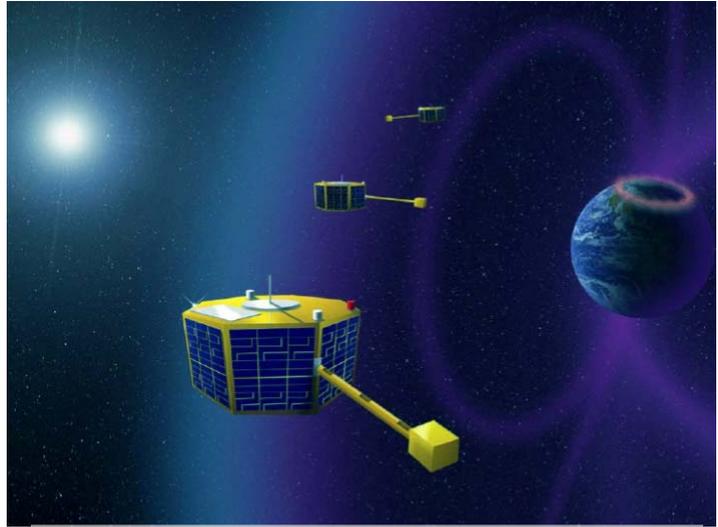


Рис. 1.3. Миссия *ST – 5*

Понятно, что различные миссии требуют различные типы формаций в зависимости от поставленных задач. Например, для случая, когда необходимо иметь много снимков одной области на поверхности Земли, подходит формация *same ground-track*. В этом случае одна и та же область поверхности Земли наблюдается сначала одним спутником, затем через определенное время другим с одной и той же точки орбиты над поверхностью Земли. Это важно, например, в случае необходимости обнаружения движущегося объекта. Круговая формация подходит для создания большой распределённой антенны. Для задач стереографической съёмки, когда важно иметь несколько одновременных снимков одного и того же объекта с разных точек подходит формация *leader-follower*. В этом случае спутники движутся друг за другом по одной и той же орбите, но с разными эпохами. Однако возможна и такая формация, при которой расстояние между спутниками остаются неизменными. В качестве примера приведём конфигурацию миссии *LISA* (Laser Interferometer Space Antenna, США). Орбиты каждого спутника выбираются так, чтобы минимизировать изменение расстояний между аппаратами при движении вокруг Солнца (рис.1.4).

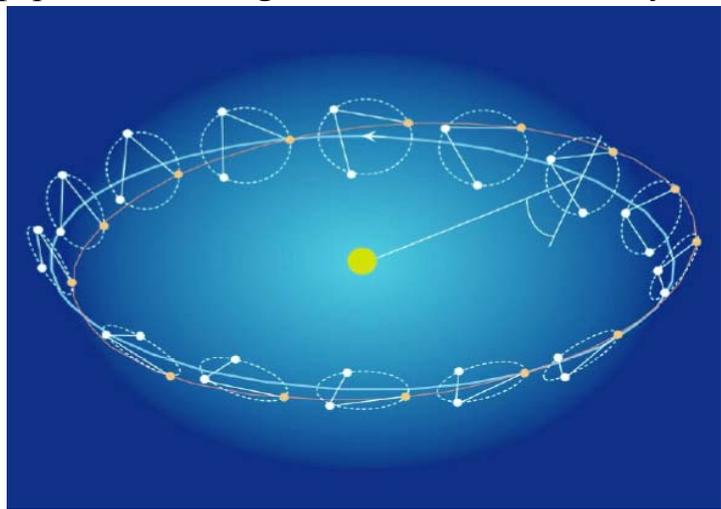


Рис. 1.4. Пространственная конфигурация трёх аппаратов при их движении вокруг Солнца

1.2. Наземная отработка алгоритмов управления

Перед выводом на орбиту спутники и группы спутников подвергаются многоэтапным проверкам и испытаниям. Эти испытания дают важную информацию о будущем поведении на орбите, позволяют выявить ошибки, допущенные при разработке и изготовлении, помогают найти границы применимости того или иного метода управления и многое другое, на основе чего можно надеяться на четкую и надежную работу формации на орбите. Однако силы и моменты, которые испытывают аппараты на орбите, значительно отличаются от тех, которые действуют на него на Земле. Это затрудняет проведение натуральных динамических испытаний в лабораторных условиях. Тем не менее, существуют способы проведения испытаний спутников, которые в определённой мере имитируют условия на орбите, позволяя таким образом отработать алгоритмы идентификации и управления углового движения тела в космосе, схемы взаимодействия аппаратов группы, алгоритмы, позволяющие поддерживать различные пространственные конфигурации формаций.

В Центре прикладных космических технологий и микрогравитации (Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation – ZARM) Университета города Бремена (Германия) был разработан стенд под названием LuVeX (Luftkissen Vehikel Experiment) (рис.1.5), на котором можно исследовать динамику макетов спутников [2]. На настоящий момент создано два макета, передвигающиеся благодаря воздушной подушке, приводимые в движение импульсными двигателями на сжатом воздухе. Построив алгоритмы управления этими двигателями, можно провести эксперименты по управлению положением и ориентацией макетов [3]. Эти результаты будут полезны для разработки и верификации алгоритмов управления реальными спутниками и, например, управления групповыми полётами.

Настоящая работа посвящена математическому моделированию управления движением макетов LuVeX, алгоритмам поддержания различных конфигураций и взаимной ориентации формаций, составленных из нескольких макетов.

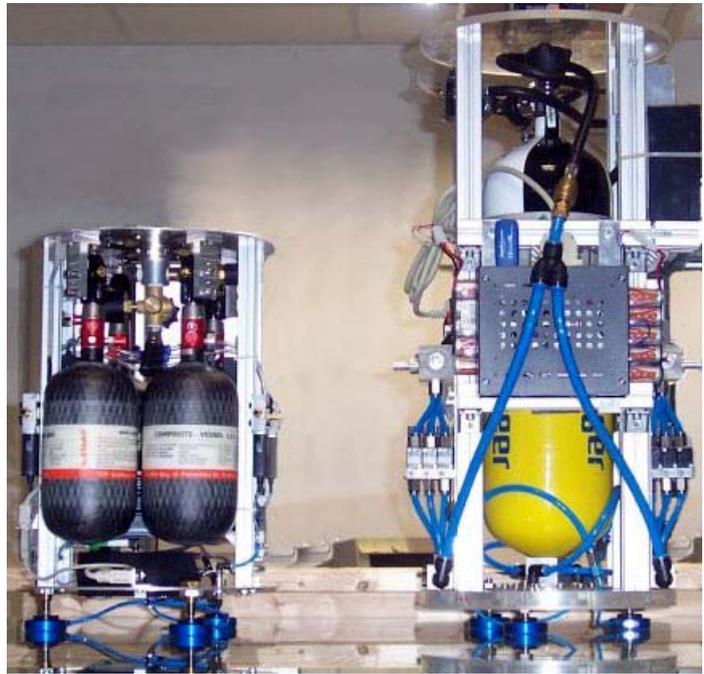


Рис. 1.5. Макеты LuVeX

Для построения алгоритмов управления группой макетов получим уравнения движения отдельного макета. Затем, используя принцип максимума Понтрягина, выведем правила, по которым будут управляться макеты. И, наконец, строя различные пространственные конфигурации из макетов, исследуем зависимость движения формации от параметров системы.

2. Уравнения движения макета

2.1 Анализ сил, действующих на макет

Макет представляет собой тело, движущееся по ровному горизонтальному столу, что обеспечивается специальной воздушной подвеской ножек макета. Таким образом, макет имеет три степени свободы – две координаты плоскопараллельного движения и угол поворота системы координат, связанной с макетом относительно неподвижной системы координат (рис 2.1). На макет действуют:

- сила сопротивления движению со стороны воздуха;
- сила трения ножек макета о стол;
- управляющие силы от импульсных двигателей, которые установлены так, как изображено на рис.2.1.

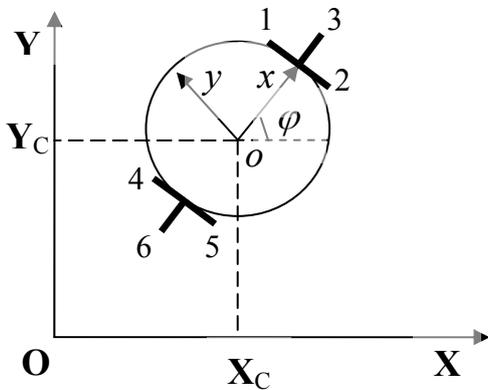


Рис. 2.1 Системы координат и направления тяги двигателей

Сопротивление воздуха, зависящее от аэродинамических характеристик самого макета, не поддается простому описанию. Из-за малых линейных скоростей точек макета пренебрегаем им. Трение макета о стол также крайне мало, так как ножки макета обеспечивают макет достаточно надёжной воздушной подушкой.

Будем учитывать только управляющие моменты и силы импульсных двигателей. Двигатели располагаются на макете таким образом, что для создания силы в направлении связанной оси Ox и против этого направления действуют двигатели 3 и 6, для создания силы в направлении оси Oy действует сразу пара двигателей 1 и 4, против направления этой оси 2 и 5. Для создания вращающего момента по часовой стрелки включаются двигатели 1 и 5, против часовой стрелки – 2 и 4 (рис.2.1).

2.2. Вывод уравнений движения

Составим уравнения Лагранжа второго рода. Кинетическая энергия тела складывается из энергии поступательного движения центра масс и энергии вращения вокруг центра масс. Найдем скорость движения центра масс. Она равна переносной скорости движения точки центра масс:

$$v_{Cx} = \dot{X}_C, \quad v_{Cy} = \dot{Y}_C.$$

Кинетическая энергия запишется в виде

$$T = \frac{M(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2)}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2},$$

где I – главный момент инерции макета относительно оси Oz связанной системы координат, $\dot{\varphi}$ – проекция угловой скорости вращения макета на ось Oz , вычис-

ляемая по формуле $r = \dot{\phi}$; точкой обозначена процедура дифференцирования по времени. Уравнения Лагранжа второго рода записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_i,$$

где Q_i – обобщенные силы. В нашем случае это проекции управляющих сил и моментов:

$$Q_X = Mu_X, Q_Y = Mu_Y, Q_\phi = I\varepsilon,$$

где u_X и u_Y – это управляющие ускорения по осям ОХ и ОУ, ε – это угловое ускорение макета. Тогда уравнения движения системы запишутся в виде

$$\frac{dv_{C_x}}{dt} = u_X, \frac{dv_{C_y}}{dt} = u_Y, \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \varepsilon. \quad (2.1)$$

3. Решение задачи управления

Рассмотрим задачу управления макетом. Построим управление таким образом, чтобы макет двигался по заданной траектории с заданной точностью, причем задача управления будет заключаться в наибоыстрейшем возвращении макета на заданную траекторию при недопустимом отклонении от нее.

Так как макет имеет три степени свободы, то им можно управлять по трём координатам независимо: одна координата – угол поворота на столе, и две координаты – положение центра масс макета на столе. Сначала решим задачу управления в общем виде, а потом распишем для каждой координаты отдельно.

3.1. Постановка задачи и решение в общем виде

Решим задачу наибоыстрейшего перевода фазовой точки из одного состояния в другое [4]. Сформулируем эту задачу следующим образом. Пусть точка движется вдоль оси Ох по закону $\ddot{x}(t) = u(t)$, $t \geq t_0$, где $u(t)$ – управление, зависящее от времени, t_0 – начальный момент времени. Требуется найти кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $|u(t)| \leq u^{\max}$, $t_0 \leq t \leq T$ такое, чтобы точка, выйдя из начального положения $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, пришла за минимальное время в точку $x(T) = x_T, \dot{x}(T) = \dot{x}_T$, где u^{\max} – максимальное значение управления, T – время окончания сеанса управления.

Обозначим $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ – фазовые координаты точки. Тогда задачу можно переформулировать так: наибоыстрейшим образом перевести фазовую точку (x_1, x_2) из состояния (x_0, \dot{x}_0) в состояние (x_T, \dot{x}_T) , считая, что движение подчиняется уравнениям

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t). \quad (3.1)$$

Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальным управлением, обеспечивающим наискорейший переход из одной точки в другую, является управление

$$u_{opt}(t) = u^{\max} \text{sign}(-C_1 t + C_2), \quad (3.2)$$

где C_1, C_2 – некоторые константы, которые определяются из начальных условий [4]. Таким образом, оптимальное управление является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $+u^{\max}$, $-u^{\max}$ и имеющей не более одной точки переключения t_1 , при переходе через которую $u_{opt}(t)$ меняет знак.

3.2. Управление ориентацией. Движение по опорной траектории.

Теперь рассмотрим одномерную задачу управления ориентацией, считая, что тело движется по закону $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, где φ – угол поворота подвижной системы координат относительно неподвижной, ε – управляющее угловое ускорение $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon^{\max}$, $t_0 \leq t \leq T$. Задача состоит в наибо́льшем переводе точки фазового состояния из положения $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ в состояние $(\varphi_T, \dot{\varphi}_T)$ с тем условием, что точка $(\varphi_T, \dot{\varphi}_T)$ – лежит на некоторой заранее заданной кривой, которую будем называть *опорная* траектория. Положим, опорная траектория подчиняется закону

$$\varphi_{on} = \varphi_{on}^0 + \Omega(t - t_0), \quad \dot{\varphi}_{on} = \Omega, \quad (3.3)$$

где Ω – некоторая заданная величина угловой скорости, φ_{on}^0 – значение угла в начальный момент времени t_0 .

Как мы выяснили раньше, оптимальным будет управление (3.2) с одним переключением в момент времени t_1 . В зависимости от начальной $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ и конечной $(\varphi_T, \dot{\varphi}_T)$ точек возможны два варианта управления: сначала обеспечиваем ускорение $-\varepsilon$, и в момент времени t_1 переключаем его на $+\varepsilon$, и наоборот. Рассмотрим управление подробнее.

Проинтегрируем уравнение (3.1) с начальными условиями $(\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)) = (\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ до момента переключения t_1 , приняв $u(t) = -\varepsilon$,

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0(t - t_0) - \frac{\varepsilon(t - t_0)^2}{2} \\ \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0 - \varepsilon(t - t_0) \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Далее произведём интегрирование этого же уравнения (3.1), но с начальными условиями $(\varphi(t_1), \dot{\varphi}(t_1)) = (\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ для момента переключения, приняв $u(t) = +\varepsilon$:

$$\begin{cases} \varphi(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2} + (\dot{\varphi}_0 - 2\varepsilon t_1 + \varepsilon t_0)t + \varphi_0 - \dot{\varphi}_0 t_0 - \frac{\varepsilon t_0^2}{2} + \varepsilon t_1^2 \\ \dot{\varphi}(t) = \varepsilon t + \dot{\varphi}_0 + \varepsilon t_0 - 2\varepsilon t_1 \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq T.$$

Но при условии, что точка $(\varphi_T, \dot{\varphi}_T)$ должна лежать на опорной траектории, запишем так:

$$\begin{cases} \varphi_{on}^0 + \Omega(T - t_0) = \frac{\varepsilon T^2}{2} + (\dot{\varphi}_0 - 2\varepsilon t_1 + \varepsilon t_0)T + \varphi_0 - \dot{\varphi}_0 t_0 - \frac{\varepsilon t_0^2}{2} + \varepsilon t_1^2, \\ \Omega = \varepsilon T + \dot{\varphi}_0 + \varepsilon t_0 - 2\varepsilon t_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными t_1 и T . При выборе корней уравнения будем руководствоваться ограничениями: $0 \leq t_0 < t_1 < T$.

3.3. Управление движением центра масс

Теперь рассмотрим задачу управления центром масс по оси OX , полагая, что тело движется по закону

$$\ddot{x}(t) = u_x(t).$$

Требуется найти кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $|u(t)| \leq u^{\max}$, $t_0 \leq t \leq T$, такое, чтобы точка, выйдя из начального положения $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, пришла за минимальное время в точку $x(T) = x_T$, $\dot{x}(T) = \dot{x}_T$. Как и в задаче с управлением ориентацией точка (x_T, \dot{x}_T) должна лежать на опорной траектории.

Положим, опорная траектория будет удовлетворять следующим уравнениям:

$$x_{on}(t) = x^0 - R \sin(\Omega t + \alpha_0), \quad \dot{x}_{on}(t) = -\Omega R \cos(\Omega t + \alpha_0).$$

Здесь x^0 , R , Ω – некоторые заданные константы, а α_0 – фаза состояния в момент времени t_0 .

Оптимальным управлением для этой задачи будет управление (3.2) с одним переключением в момент времени t_1 . В зависимости от начальной (x_0, \dot{x}_0) и конечной (x_T, \dot{x}_T) точек также возможны два варианта управления. Рассмотрим подробнее один из них.

Опять же проинтегрируем уравнение (3.1) с начальными условиями $(x(t_0), \dot{x}(t_0)) = (x_0, \dot{x}_0)$ до момента переключения t_1 , приняв $u(t) = -u$,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) - \frac{u(t - t_0)^2}{2} \\ \dot{x}(t) = \dot{x}_0 - u(t - t_0) \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Далее произведём интегрирование этого же уравнения (3.1), но с начальными условиями $(x(t_1), \dot{x}(t_1)) = (x_1, \dot{x}_1)$ для момента переключения, приняв $u(t) = +u$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{ut^2}{2} + (\dot{x}_0 - 2ut_1 + ut_0)t + x_0 - \dot{x}_0 t_0 - \frac{ut_0^2}{2} + ut_1^2 \\ \dot{x}(t) = ut + \dot{x}_0 + ut_0 - 2ut_1 \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq T.$$

Но при условии, что точка (x_T, \dot{x}_T) должна лежать на опорной траектории, запишем

$$\begin{cases} x^0 - R \sin(\Omega T + \alpha_0) = \frac{uT^2}{2} + (\dot{x}_0 - 2ut_1 + ut_0)T + x_0 - \dot{x}_0 t_0 - \frac{ut_0^2}{2} + ut_1^2, \\ -\Omega R \cos(\Omega T + \alpha_0) = uT + \dot{x}_0 + ut_0 - 2ut_1. \end{cases} \quad (3.5)$$

При выборе корней уравнения руководствуемся ограничениями $0 \leq t_0 < t_1 < T$.

Для управления центром масс по оси Oy произведем аналогичный расчет, но опорную траекторию примем в виде

$$y_{on}(t) = y^0 + R \cos(\Omega t + \alpha_0), \quad \dot{y}_{on}(t) = -\Omega R \sin(\Omega t + \alpha_0),$$

где y^0, R, Ω – некоторые заданные константы, а α_0 – фаза состояния в момент времени t_0 .

3.4. Решение уравнений

Теперь рассмотрим способы решения систем уравнений (3.4) и (3.5). Если из второго уравнения системы (3.4) выразить t_1 и подставить в первое уравнение, то получаем квадратное уравнение с постоянными коэффициентами относительно T

$$aT^2 + bT + c = 0, \quad (3.6)$$

$$\text{где } a = -\frac{\varepsilon}{4}, \quad b = -\frac{\Omega + \dot{\varphi}_0 + \varepsilon t_0}{2}, \quad c = -\dot{\varphi}_0 t_0 - \frac{\varepsilon t_0^2}{2} + \frac{(\Omega + \dot{\varphi}_0 + \varepsilon t_0)^2}{4\varepsilon} + \varphi_0 - \varphi_{on}^0 + \Omega t_0.$$

Корни этого уравнения существуют при условии на дискриминант $D = b^2 - 4ac \geq 0$. В нашем случае он определяется выражением

$$D = \varepsilon(-\varepsilon t_0 - \Omega t_0 + \dot{\varphi}_0 t_0 - \varphi_0 + \varphi_{on}^0).$$

Однако все моменты времени равноправны и любое t_0 можно выбрать за начало отсчета, то есть равным нулю. Тогда условие на дискриминант упростится

$$D = \varepsilon(\varphi_{on}^0 - \varphi_0).$$

Такой дискриминант не обращается в нуль, поскольку ε – определённое число, задающее значение ресурса управления, а разница $\varphi_{on}^0 - \varphi_0$ не равна нулю по причине того, что управление включается именно тогда, когда эта разница превышает некоторое заданное значение. Если же эта разница отрицательна, то выберем управление, которое сначала обеспечивает ускорение $+\varepsilon$, и в момент времени t_1 переключает его на $-\varepsilon$, то есть управление, противоположное управлению, для которого выводились уравнения (3.4). Таким образом, мы выбираем такое управление, чтобы $D > 0$. То есть корни уравнения (3.6) существуют и при этом их два. Однако при выборе корней этого уравнения следует руководствоваться разумными ограничениями $0 \leq t_0 < t_1 < T$.

Теперь рассмотрим систему уравнений (3.5). Тут уже не удаётся получить квадратное уравнение, так как это уравнение трансцендентно. Его можно решить лишь численно. Выразим t_1 из второго уравнения

$$t_1 = \frac{1}{2u}(\Omega R \cos(\Omega T + \alpha_0) + uT + \dot{x}_0 + ut_0)$$

и подставим в первое. Получим функцию $f(T)$. Будем искать нуль этой функции методом половинного деления отрезка. Начиная с момента времени t_0 , будем идти в положительном направлении по оси значений и на каждом шаге, вычисляя значение функции $f(T_n)$, сравнивать его со значением на предыдущем шаге $f(T_{n-1})$. В момент, когда значения функций на соседних шагах будут

разных знаков, разделим шаг на 10, и повторим проделанное начиная с момента T_{n-1} . Так будем повторять до тех пор, пока точность найденного корня не достигнет некоторой заданной величины. Таким образом, найдем корень функции $f(T)$, а затем вычислим из второго уравнения t_1 . Однако если не выполняется условие $0 \leq t_0 < t_1 < T$, то заменим в уравнении (3.5) значение управления на противоположное и повторим все операции.

Теперь рассмотрим классическое нахождение оптимального управления, которое не требует расчета параметров управления.

Фазовая траектория тела, движущегося по закону (3.1), проходящая через начало координат, имеет вид

$$x = \pm \frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Найдя функции переключения [5], получаем правило управления:

$$u = \begin{cases} +u^{\max}, & \text{если } \dot{x}^2 \operatorname{sign}(\dot{x}) < -2x \text{ или } \dot{x}^2 \operatorname{sign}(\dot{x}) = -2x, x > 0, \\ -u^{\max}, & \text{если } \dot{x}^2 \operatorname{sign}(\dot{x}) > -2x \text{ или } \dot{x}^2 \operatorname{sign}(\dot{x}) = -2x, x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, зная в начальный момент местонахождение точки системы на фазовой плоскости, можно определить какой знак управления необходимо прикладывать к системе, чтобы оптимальным образом двигаться в заданную точку (рис.3.1). При этом на каждом цикле работы программы необходимо отслеживать настоящее положение системы и в случае достижения кривой переключения менять знак управления на противоположный и далее двигаться к заданной точке по кривой переключения. Когда же положение тела окажется в области допустимых значений, необходимо отключать управление.

Преимуществом такого подхода является то, что не нужно специально рассчитывать время переключения и выключения управления, они при таком подходе получаются сами собой.

Такой подход позволяет оперативно реагировать на возмущения, которым может подвергнуться система во время управления. Минусом же является то, что проверку по управлению нужно проводить на каждом шаге управления, что может привести к слишком большим затратам времени. Кроме того, такой подход управления обеспечивает приведение состояния системы только к границе ε -окрестности точки, а не точно в заданную точку. При постоянном, но неучтенном малом возмущении это приведет к тому, что система будет постоянно выходить из этой окрестности, и управление будет непрерывно пытаться вернуть состояние тела обратно.

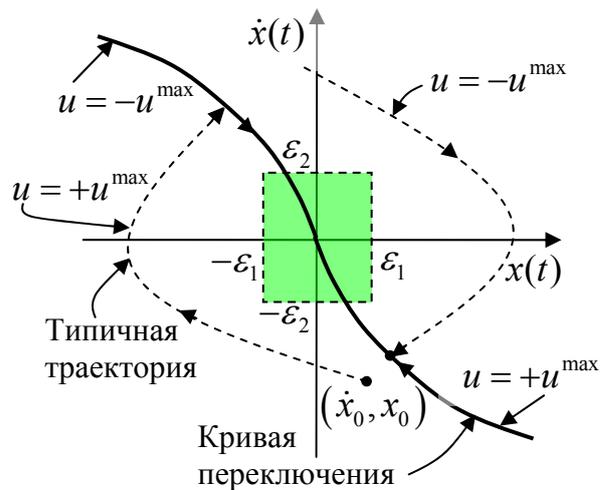


Рис. 3.1. Фазовые траектории и кривые переключения.

4. Математическое моделирование

Рассмотрим теперь структуру и заложенные алгоритмы программы, с помощью которой производилось математическое моделирование движения многоэлементной системы, состоящей из макетов LuVeX. Программа была разработана в интегрированной среде MATLAB 6.5.

4.1. Параметры программы

Для задания параметров программы используется интерфейс, изображенный на рис.4.1. Параметры программы делятся на смысловые группы:

Simulation

Luvex orientation and position controlling by thrusters

Control acceleration
 Erot= 180.00 deg/sec²
 Elin= 1.00 m/sec²

Initial Conditions
 Phi0= 0.00 deg
 w0= 0.00 deg/sec
 x0= 0.00 m
 y0= 1.00 m
 vx0= 0.00 m/sec
 vy0= 0.00 m/sec

Given trajectory
 W= 10.00 deg/sec
 PHIO= 0.00 deg
 X0= 0.00 m
 Y0= 0.00 m
 R= 15.00 m

Mass properties
 m= 12.00 kg
 mf= 1.50 kg
 Vm= 0.0050 kg/sec

Time of calculation
 T= 60.00 sec

Frequency of sensor
 f= 300.00 Hz

Error of sensor
 e_gyro= 0.01 deg/sec
 e_accel= 1.00 m/sec²

Errors of trajectory
 Erot1= 1.00 deg
 Elin1= 0.05 m
 Erot2= 2.00 deg/sec
 Elin2= 0.01 m/sec

With two vehicles
 With three vehicles

Kalman filter
 N= 100.00

Estimation of control
 K= 100.00

Shou me picture
 Make avifile

START

Рис.4.1. Интерфейс программы

- *Управляющие воздействия* – задание линейного и углового управляющих ускорений.
- *Опорная траектория* – задание параметров опорной траектории (угловая скорость движения по окружности, начальная фаза, координаты центра окружности и её радиус).

- *Шум датчиков* – задание значения шума имитируемых показаний датчиков угловой скорости и акселерометра.
- *Ошибки траектории* – задание допустимых ошибок, которые могут быть допущены при управлении макетом.
- *Начальные условия* – задание положения тела в фазовом пространстве в начальный момент времени.
- *Параметры массы* – установка начальной полной массы макета, массы сжатого воздуха и скорости расхода воздуха.
- *Время вычислений* – время движения макета.
- *Частота выходных данных датчиков*.
- *Параметры фильтра Калмана* – установка размера выборки алгоритма уточнения ковариации.

Программа работает в трёх режимах: управление одним макетом, двумя и тремя, соответственно. Выбрать необходимый режим можно, установив соответствующую “галку” в Check Box. После установки всех параметров моделирования нужно нажать на кнопку **Start** и программа начнет вычисления.

4.2. Алгоритм управления макетом

Программа реализует замкнутый принцип управления. Канал обратной связи организуется с помощью имитации датчика угловой скорости, двухосного акселерометра и звездного датчика, который с некоторым периодом уточняет полученные с помощью интегрирования данные об ориентации и положении тела на столе. Таким образом, рассматриваемая система наблюдаема, то есть, исходя из имеющихся измерений, можно восстановить фазовое состояние системы в момент измерения.

На вход программы поступают три величины: угловая скорость тела и ускорения, измеренные в направлении осей Ox и Oy (рис. 2.1) связанной с телом системы координат (рис.4.2). Но так как необходимо определить положение тела в неподвижной системе координат, простым преобразованием переводим измеренные ускорения в неподвижную систему OXY . Далее, преобразованные данные с датчиков поступают на вход фильтра Калмана. Выходом фильтра Калмана [6] является шестимерный вектор оценки состояния тела, который с некоторым периодом уточняется данными со звездного датчика. Сначала проверке нахождения тела в допустимой области подвергаются фазовые элементы положения тела. Если положение находится в допустимой области относительно опорной траектории, идёт проверка фазовых элементов ориентации. И если проверка даёт положительный результат, то производится расчет параметров управления ориентацией, за которым следует управление. Но если же результат проверки фазовых элементов положения тела оказался положительным, то происходит следующее: сначала останавливается вращение и только после прекращения вращения производится расчет параметров управления положением. Делается это по следующей причине: расчет управления положения производится в связанной системе координат, но если связанная система координат находится в движении – невозможно рассчитать время управ-

ления по каждой связной оси, импульс управления будет направлен не в конкретном направлении, а “размазан”, поэтому эффективного управления в этом случае не получается.

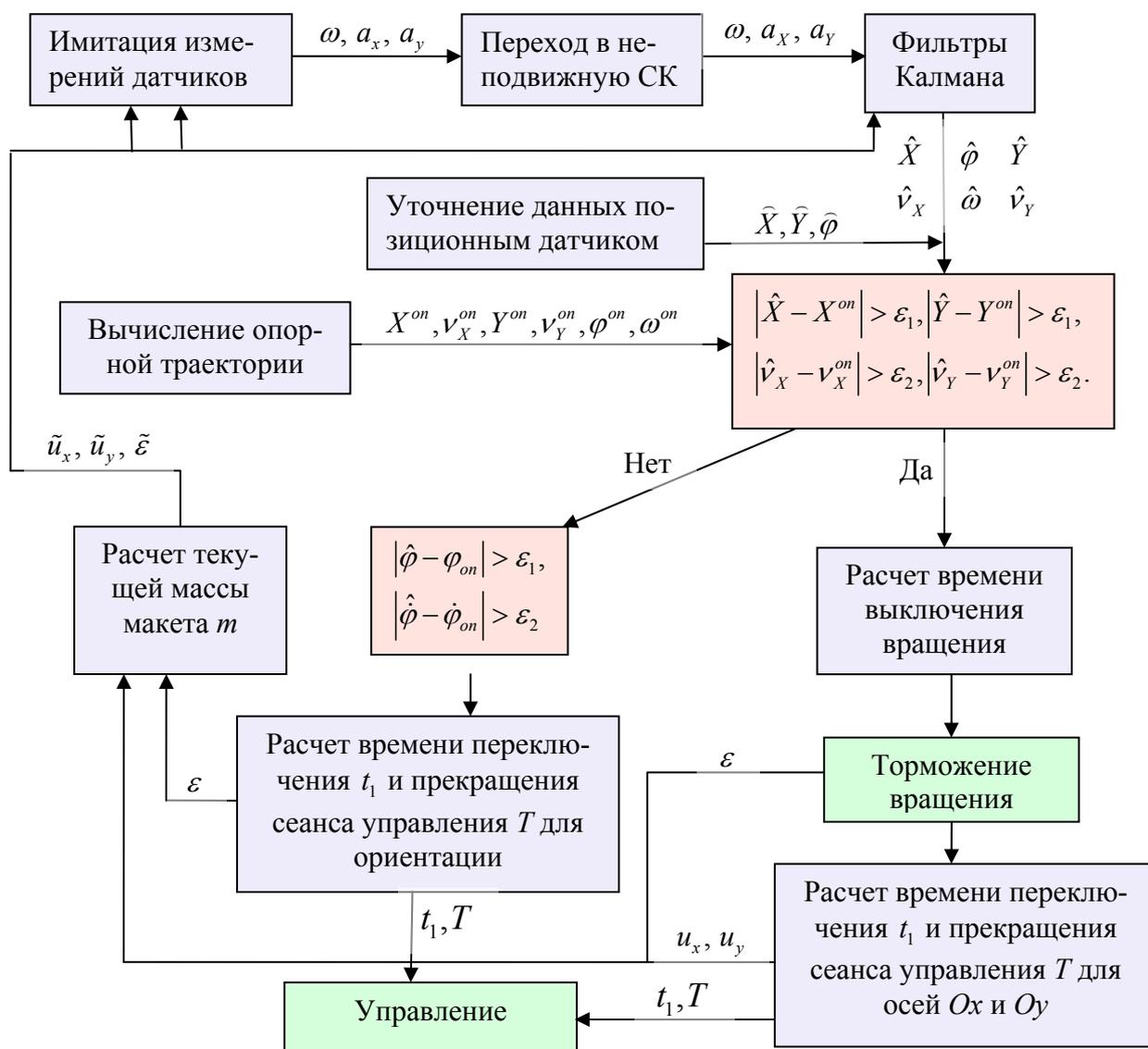


Рис.4.2. Блок-схема программы

Отметим, что во время включения управления в математическую модель движения, на которой основан фильтр Калмана, и в блок, имитирующий показания датчика угловой скорости и акселерометра, подставляются значения управления ε, u_x, u_y . Однако следует заметить, что во время управления расходуется сжатый воздух макета, а, значит, масса макета уменьшается. Вследствие того, что давление на импульсные двигатели подается постоянное, их управляющее воздействие меняется со временем. Поэтому, зная скорость расхода сжатого воздуха и время действия управления, можно рассчитать изменение массы макета, а затем рассчитать изменение управляющих ускорений и именно их подставлять в блок имитации измерений и в математическую модель фильтра Калмана.

4.3. Иллюстрация результатов моделирования

Результаты вычислений отображаются на графиках. Их можно также проследить в режиме реального времени, установив галочку Check Box *Show the picture*. На экране появится схематическое изображение макетов, которые движутся по мере расчетов программы, отображая тем самым положение макетов (рис.4.3). Кроме того, программа позволяет сформировать видео файл, в котором будет записано движение макетов.

Другим результатом работы программы моделирования являются четыре группы графиков, каждая из которых отображает изменение во времени фазового состояния тела и управление, соответствующее этой фазе.

На рис.4.4 изображены графики управляемого движения. Красной линией

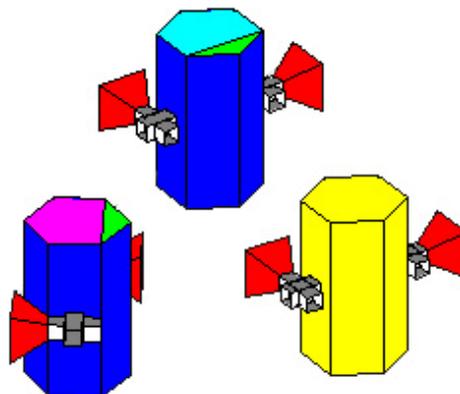


Рис. 4.3. Изображение макетов

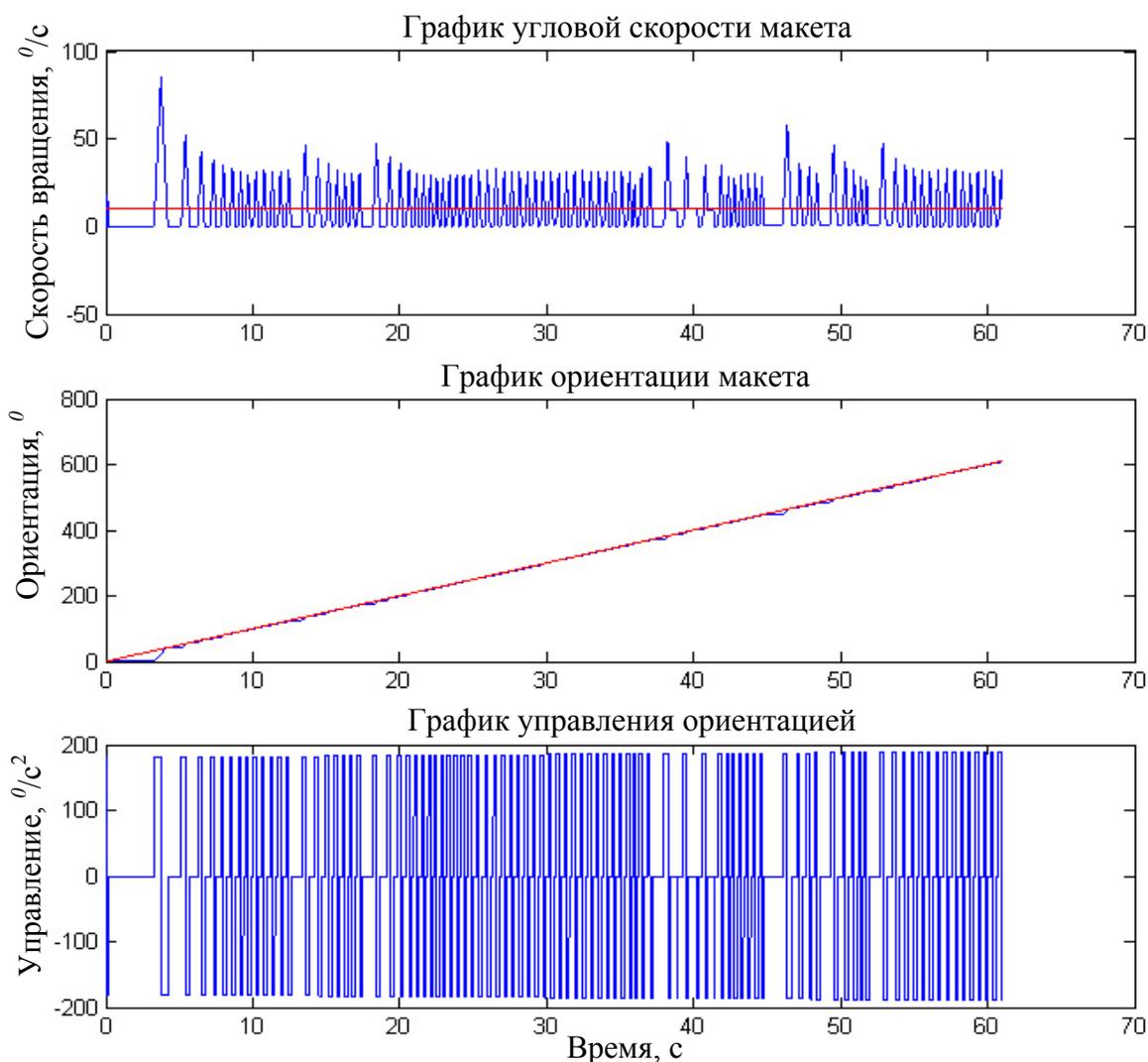


Рис. 4.4. Управление ориентацией макета

изображена опорная траектория, синей – реальное положение тела. Как можно видеть из графиков, основываясь на алгоритме управления (рис. 4.2), вращение тела систематически прекращается. Как это было описано выше, это производится с целью эффективного управления положением – пока отсутствует вращение тела происходит управление его положением. После сеанса управления положением включается управление ориентацией и тело приводится в область допустимых значений относительно опорной траектории.

Рассмотрим графики управления положением по осям OX и OY (рис.4.5 и рис.4.6). Первый достаточно долгий сеанс управления был вызван тем, что начальное положение тела находилось вне допустимой области относительно опорной траектории. Последующие сеансы управления имели корректировочный, непродолжительный по времени характер, не позволяющий положению тела покидать некоторые установленные рамки относительно заданной траектории.

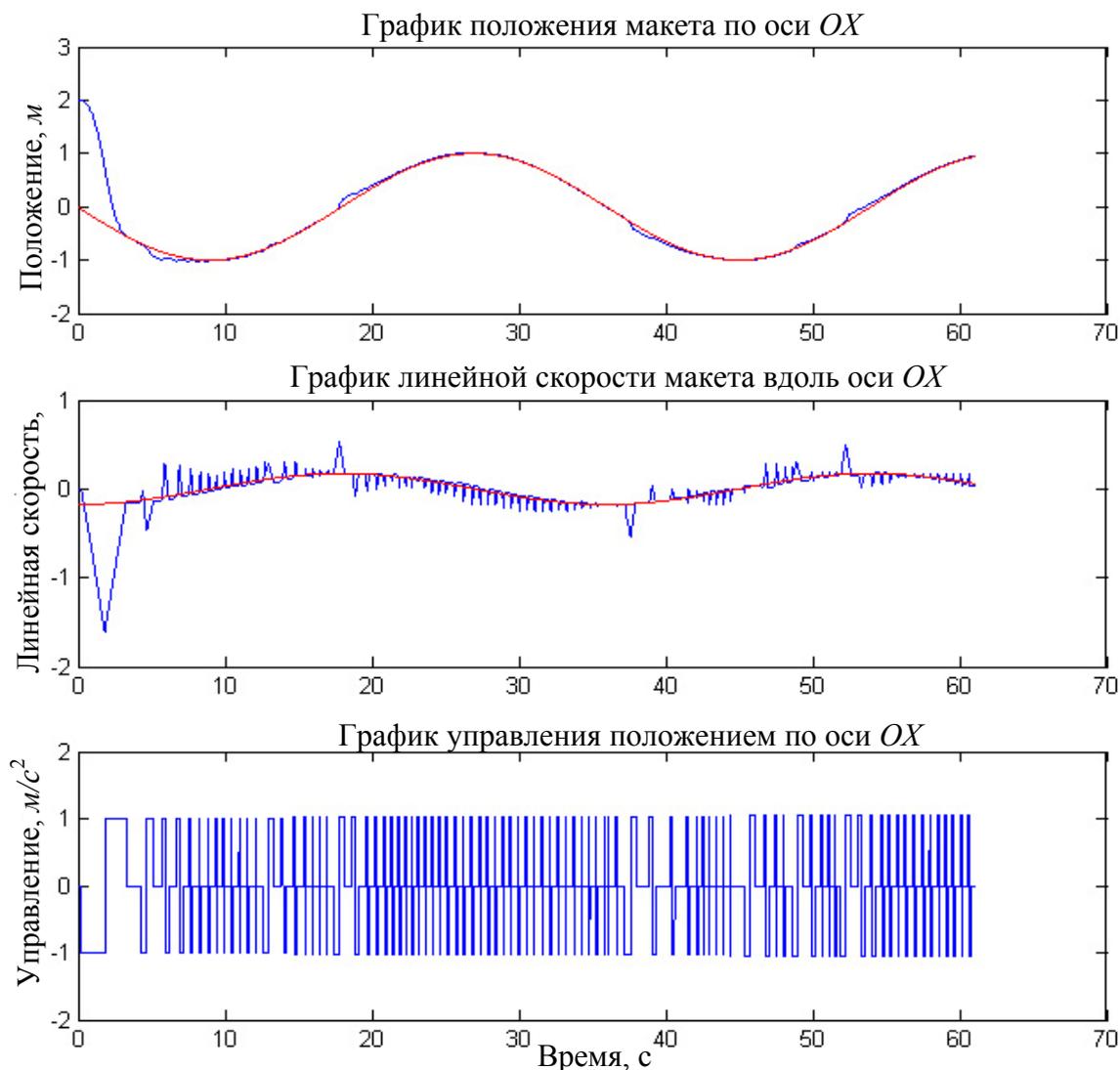


Рис. 4.5. Управление положением по оси OX

Заметим, что результирующее моделируемое движение тела – это движение его центра масс по некоторой заданной окружности с такой ориентацией, что в каждый момент времени отрицательная полуось связанной оси Oy всегда

“смотрит” в центр этой окружности. Другими словами, угловая скорость вращения тела совпадает с циклической скоростью движения центра масс тела по окружности. Следует отметить, что движение по такой кривой как окружность требует частого вмешательства управления, так как уравнения движения центра масс тела без вмешательства управления (3.1) обуславливают собой прямолинейное и равномерное движение. Действительно, из рис.4.5 и рис.4.6, когда положение тела оказывается в допустимой области, следует, что его траектория напоминает некоторую касательную к опорной траектории, распространяю-

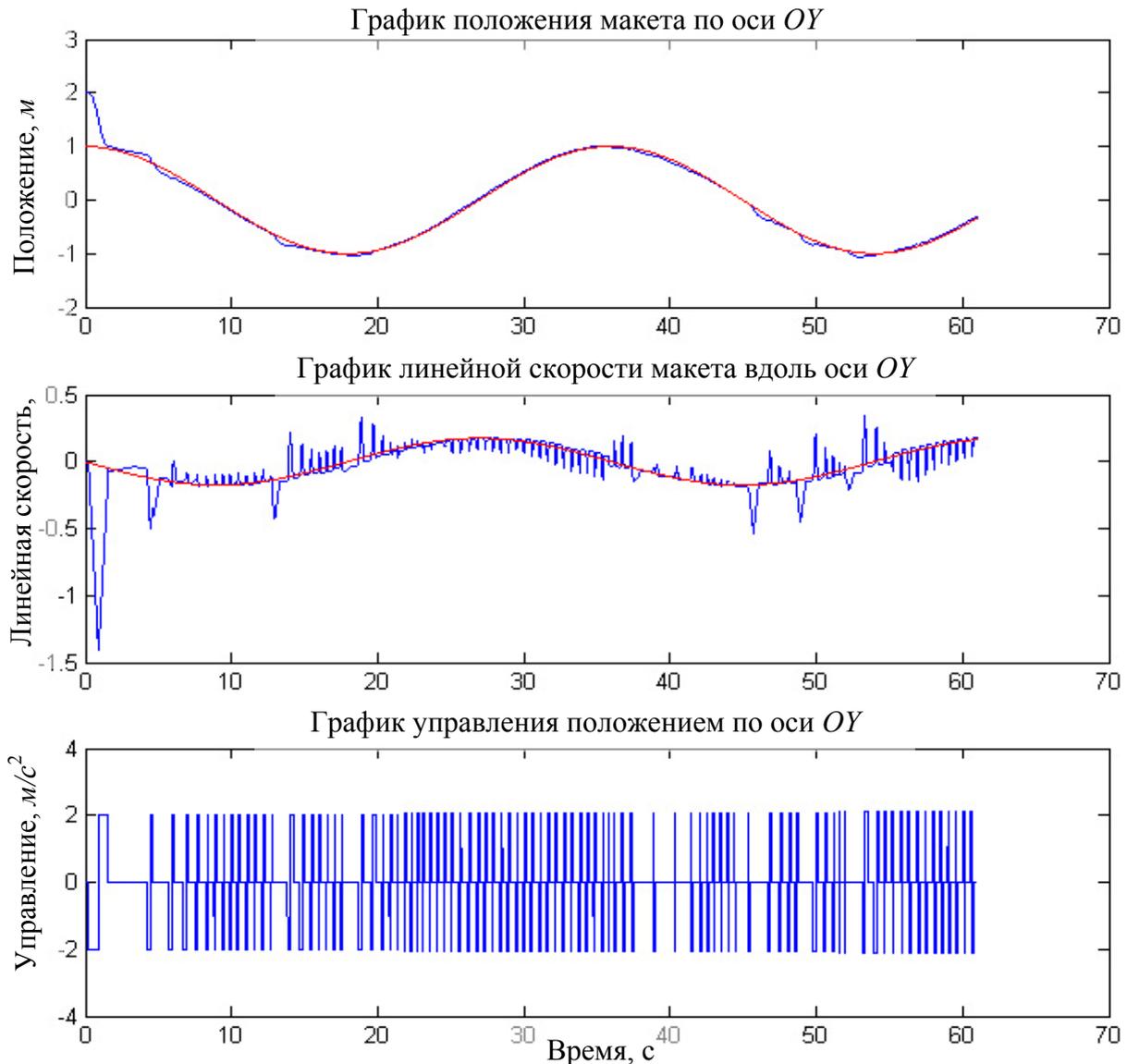


Рис.4.6. Управление положением по оси OY

щуюся до границы допустимого удаления от опорной линии, после чего включается управление и переводит траекторию тела на касательную к текущей точке заданной траектории. Если рассмотреть ближе графики управления линейной скоростью по осям OX и OY , то опять же легко увидеть, что во время отсутствия управления пунктирные графики представляют собой прямые, параллельные оси времени, что соответствует прямолинейному равномерному движению. Когда включается управление, графики скорости – это прямые с определённым наклоном, определяемым параметром ресурса управления. После

окончания сеанса управления, график текущей скорости лежит на опорной траектории. Рассмотрим теперь графики зависимости управления от времени (на рис.4.4, 4.5, 4.6 – это нижние рисунки). По причине уменьшения массы макета вследствие траты сжатого воздуха, запасенного в баллонах, величина управления возросла. Как можно увидеть из рис.4.7, изменение массы макета практически линейно уменьшалось со временем. Однако при тщательном рассмотрении видно, что это не прямая, а кривая, имеющая горизонтальные участки, соответствующие периодам времени, когда управление отсутствовало.

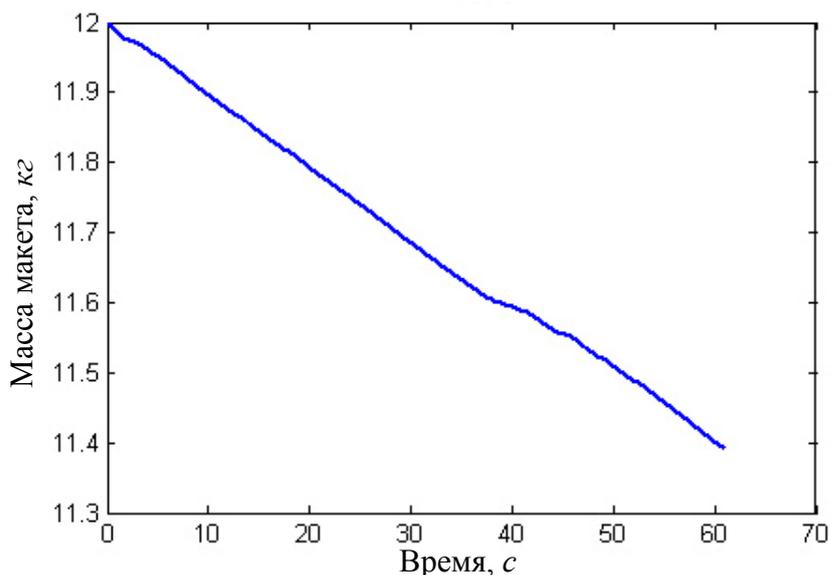


Рис. 4.7. Изменение массы макета

Опорная траектория, которая представляет собой некоторую окружность, выбрана потому, что взаимное движение близко летящих спутников, представляющих собой формацию, также близко к окружности.

Различие заключается в том, что в космосе круговое движение обеспечивается выбором специальных орбит, отличающихся между собой только эпохами, а в лабораторных условиях такое круговое движение может быть реализовано только с помощью управления. Поэтому важно провести соответствие между управлением макетами в лаборатории и управлением спутниками на орбите.

5. Исследование параметров движения группы макетов

Рассмотрим различные конфигурации движения макетов и проследим, как влияют параметры движения на расход топлива и на задаваемую точность движения.

5.1. Движение одного макета относительно неподвижного второго

При движении двух близко летящих спутников на орбите в хилловском приближении относительного движения одного аппарата вокруг другого траектория одного спутника в системе координат, связанной с одним из спутников, представляет собой эллипс. Однако из-за различных возмущающих факторов финитное относительное движение может с течением времени разрушиться. Поэтому особый интерес представляет собой управление, поддерживающее такое эллиптическое относительное движение. В лабораторных условиях рассмотрим частный случай эллипса – окружность.

5.1.1. Описание движения и механизма взаимодействия макетов

Рассмотрим следующую схему движения двух макетов, изображенную на рис.5.1. Пусть макет № 1, который будем называть *головным*, остается неподвижным. А макет № 2, который будем называть *зависимым*, совершает круговые движения вокруг головного аппарата с постоянной скоростью Ω , сохраняя радиус окружности R постоянным. Зависимый аппарат во время движения должен быть ориентирован на головной, например осью Oy связанной системы координат, как показано на рис.5.1. Это движение реализуется только, когда угловая скорость кругового движения Ω равна угловой скорости собственного вращения ω .

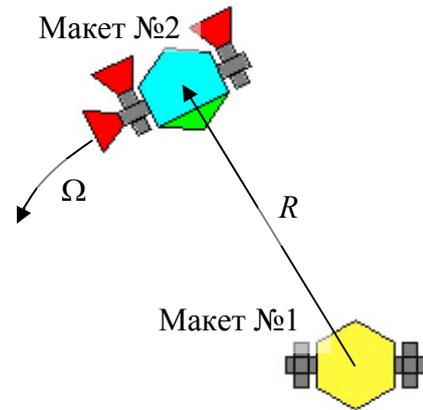


Рис. 5.1. Схема движения

Такое движение двух аппаратов может быть реализовано с помощью нескольких способов взаимодействия. В лабораторных условиях может использоваться та или иная схема в зависимости от доступных измерительных средств и датчиков. Если на борт макета № 2 установить датчик угловой скорости и двухосный акселерометр, то при условии задания начального вектора состояния макета бортовой компьютер путём интегрирования или с помощью фильтра Калмана способен вычислить вектор состояния макета в каждый момент времени (рис.5.2). Эти вычисленные данные по радиоканалу можно передавать на борт головного аппарата, который, зная своё положение в пространстве и параметры

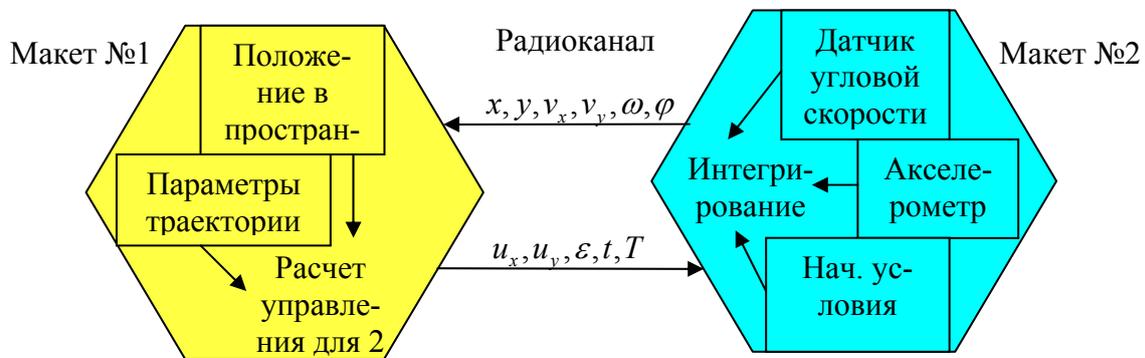


Рис.5.2. Схема взаимодействия макетов

опорной траектории, вычисляет параметры управления зависимого макета и, опять же по радиоканалу, послать эти значения на бортовой компьютер аппарата № 2. Минусом такой реализации является задание начальных условий для аппаратов, что представляет собой достаточно сложную задачу. Также при использовании только измерений датчиков проблему представляет их уход, а также неизбежные ошибки при интегрировании, что может привести к неудовлетворительной работе системы. Решением этих проблем является использование позиционных датчиков, например звёздной камеры или лабораторного аналога системы GPS. Рассмотрим схему, в которой используются позиционные датчики (рис.5.3). При таком наборе измерительных средств проблема ухода дифференциальных датчиков будет снята – позиционные датчики на вы-

ходе выдают непосредственно положение макета на столе. Однако недостатком, к примеру звёздной камеры, является медленная обработка одного изображения, что не позволяет иметь данные о положении на каждом такте работы программы управления, поэтому такому позиционному датчику остается только функция корректировки данных, полученных при интегрировании.

Следует провести параллель между лабораторной реализацией группового движения и реализацией на орбите. Дело в том, что в космосе невозможно использовать звёздную камеру для определения положения спутника – звёзды на-

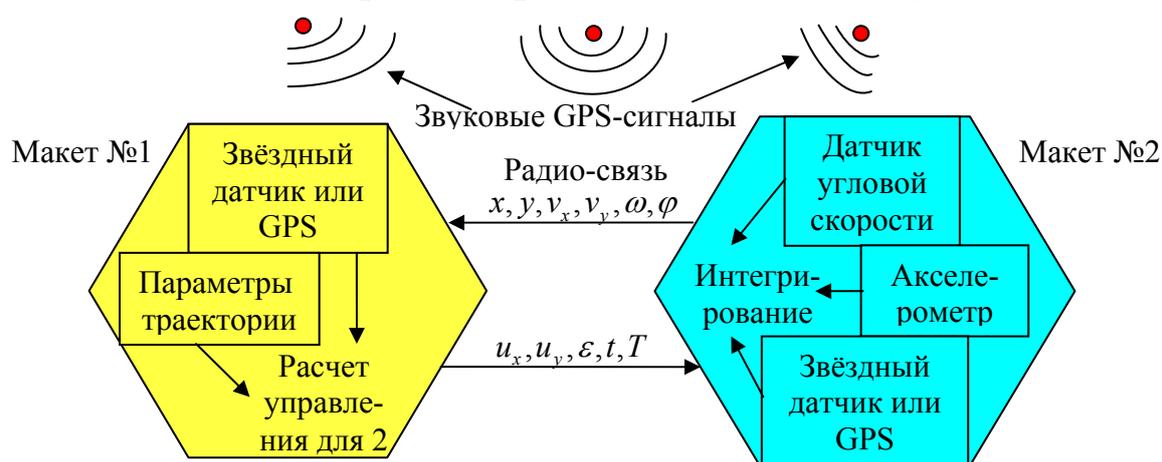


Рис.5.3. Схема взаимодействия макетов с использованием позиционных датчиков

ходятся на бесконечности в отличие от лаборатории, где имитирующие звёздное небо светодиоды на потолке находятся на небольшом расстоянии от стола [7] и позволяют вычислять не только ориентацию, но и положение макета. Использование GPS-сигналов также не позволяет вычислить взаимное положение близко летящих спутников с достаточной точностью по причине того, что необходимо вычитать близких по величине и направлению вектора. Поэтому в космосе целесообразно пользоваться другими измерительными приборами, позволяющими непосредственно измерять относительное расстояние. Таким измерительным средством, к примеру, может быть радиолокатор, позволяющий измерить расстояние до объекта по времени прихода отраженных от этого объекта волн, или лазерный измеритель дальности. Взаимная ориентация аппаратов может быть сходным с вышеописанным образом: звёздный датчик с некоторым интервалом определяет ориентацию относительно инерциальной системы координат, а между этими интервалами происходит интегрирование показаний датчика угловой скорости.

5.1.2. Исследование параметров движения

Теперь исследуем, как влияют параметры движения описанной системы на расход сжатого воздуха и на точность. Для исследования выбраны именно эти критерии, так как при выборе управления наиболее важными являются ответы на два вопроса: сколько топлива требует управление и какую точность оно обеспечивает? Ответим на эти вопросы, варьируя различные параметры движения и находя границы применимости описанного алгоритма управления.

Сначала исследуем зависимость расхода сжатого воздуха от геометрического размера рассматриваемой системы. На рис.5.4 изображен график зависимости расхода сжатого воздуха от величины радиуса окружности R . Как видно из графика, сначала расход топлива с увеличением R возрастает, далее следуют некоторые флуктуации и после этого, начиная примерно с $R = 8$ м, начинается снижение уровня расхода топлива. Рассматриваемый график был получен при постоянном значении угловой скорости

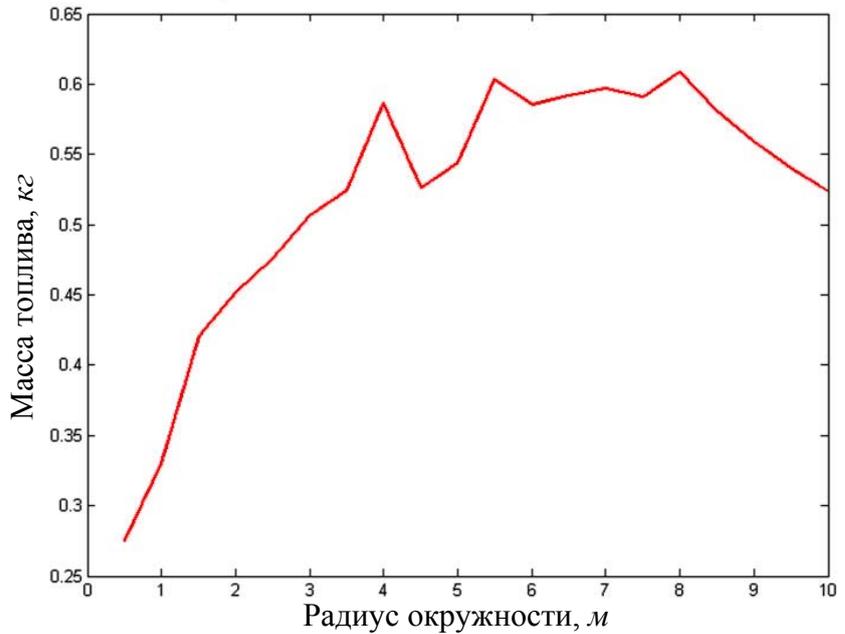


Рис.5.4. Зависимость массы расходуемого сжатого воздуха от радиуса окружности

$\Omega = 10^\circ/\text{с}$ и при постоянной заданной ошибке достижения опорной траектории $\varepsilon = 0,05$ м, моделирование велось в течение 60 с. Такая зависимость объясняется следующим образом: малым значениям R соответствуют малые размеры окружности, а, следовательно, нужно в области меньшего размера заниматься управлением положения центра масс – за единицу времени по окружности нужно проходить относительно небольшие расстояния. С увеличением R по причине неизменной Ω увеличиваются и линейные размеры проходимого расстояния, а значит, при той же ошибке достижения опорной траектории увеличивается и ресурс управления, который необходим для обеспечения движения по этой траектории.

Рассмотрим теперь как зависит средняя ошибка отслеживания траектории от ее радиуса. Как можно увидеть из графика на рис.5.5, средняя за время моделирования ошибка сначала медленно, а затем все быстрее возрастает с увеличением радиуса. Это свидетельствует о том, что с возрастанием радиуса управление на-

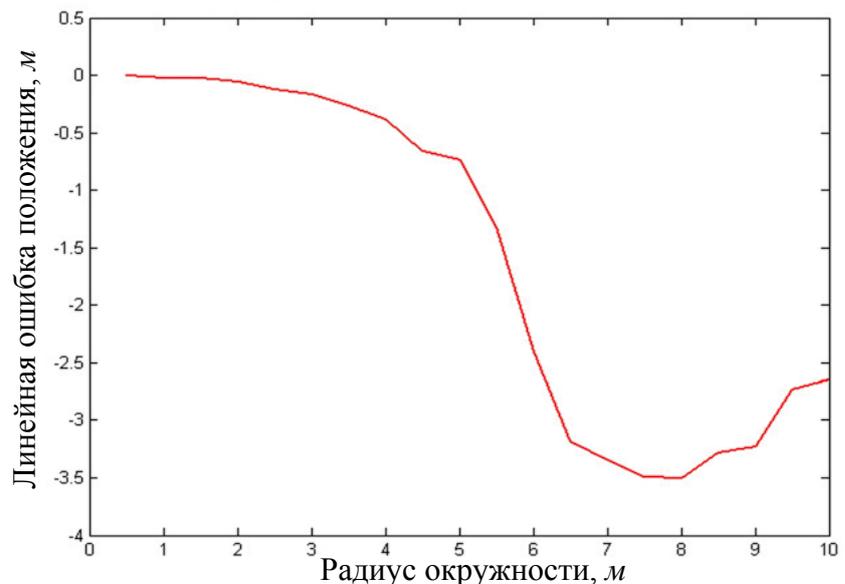


Рис.5.5. Зависимость средней ошибки траектории от радиуса окружности

чинает не справляться с задачей движения по опорной траектории. Начиная примерно с $R = 4\text{ м}$ и по $R = 8\text{ м}$, управление постоянно включено и пытается обеспечить заданную точность $\varepsilon = 0,05\text{ м}$, но как видно, не справляется с задачей. Именно поэтому на рис.5.4 эта область соответствует самому большому значению расхода топлива – на самом деле, фактически максимальному расходу топлива за период моделирования.

Выясним, по какой причине при больших R управление не справляется с задачей движения по опорной траектории при заданной ошибке. Как было описано выше, рассматриваемое управление при отклонении от опорной траектории решает задачу наискорейшего возврата на неё. Однако, так как перед управлением стоит одновременно две задачи – управление ориентацией и управление положением центра масс, которые, как было сказано в разделе 4.2, не могут выполняться одновременно, то происходит следующее. Сразу после сеанса управления положением следует сеанс управления ориентацией. Но за время управления ориентацией, положение макета успевает значительно выйти из допустимой области, после чего, управление начинает продолжительный сеанс для того, чтобы «догнать» опорную траекторию, «срезая» окружность по прямой. За время этого продолжительного сеанса траектория ориентации значительно отклоняется от опорной. Далее всё повторяется, что приводит к недопустимо большим ошибкам отслеживания траектории. Проявляется такой эффект только при достаточно больших R , так как большим R соответствуют большие линейные скорости, а следовательно, большие уходы от опорной траектории во время перерывов управления положением.

Теперь рассмотрим ситуацию, которая проявляется, начиная с $R = 8\text{ м}$. Как видно из рис.5.4 и рис.5.5 расход топлива начинает падать, а ошибка отслеживания траектории начинает уменьшаться. Это связано с тем, что как было указано в разделе 4.3 в отсутствие управления движение тела представляет собой прямолинейное и равномерное движение, соответствующее некоторой касательной к опорной траектории. При $R > 8\text{ м}$ такие касательные представляют собой достаточно протяженные прямые, ограниченные допустимой ошибкой траектории. Другими словами, во время перерывов управления положением макет движется в допустимой области, следовательно, необходимо меньше управлять и ошибка траектории становится меньше.

Таким образом, обозначились области значений параметра движения R , при которых рассматриваемое управление эффективно при постоянном значении угловой скорости $\Omega = 10^\circ/\text{с}$ и при постоянной заданной ошибке достижения опорной траектории $\varepsilon = 0,05\text{ м}$. Это области с $R < 4\text{ м}$ и $R > 8\text{ м}$. Далее будем рассматривать движение с $R = 1\text{ м}$, так как большие значения недопустимы для лабораторного стола ($2,5\text{ м} \times 3\text{ м}$). Такое управление может быть использовано и на орбите, где расстояние между спутниками в формации составляет от нескольких сотен метров до нескольких километров.

Далее рассмотрим зависимость расхода топлива от угловой скорости движения в течение 60 с. На графике (рис.5.6) наблюдается возрастание количества затрачиваемого топлива с возрастанием угловой скорости до значения $\Omega = 20^\circ/\text{с}$, далее с ростом Ω расход топлива остается также высоким и флуктуирует. Теперь исследуем зависимость линейной ошибки траектории от угловой скорости, изображенную на рис. 5.7. Как видно из графика, линейная ошибка возрастает опять же до значения $\Omega = 20^\circ/\text{с}$, после этого на некотором промежутке остается постоянной, а потом резко возрастает.

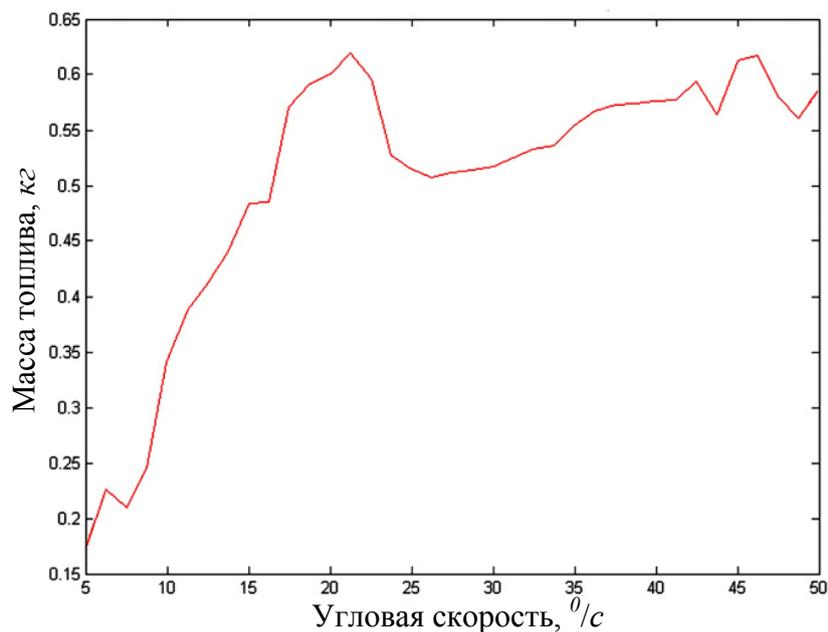


Рис. 5.6. Зависимость массы топлива от угловой скорости

После рассмотрения этих двух графиков можно заключить, что управление справляется с задачей движения по опорной траектории до угловой скорости $\Omega = 20^\circ/\text{с}$. После этого значения управление не может удержать траекторию тела вблизи опорной с ошибкой $\varepsilon = 0,05\text{ м}$, тратит много топлива, но безуспешно. Связано это с тем, что при $R = 1\text{ м}$ и больших угловых скоростях сеансы управления ориентацией становятся настолько долгими, что за это время положение тела уходит слишком далеко от опорного, и управление положением не справляется. Таким образом, разумно для эффективного управления положением макета выбирать $\Omega < 20^\circ/\text{с}$.

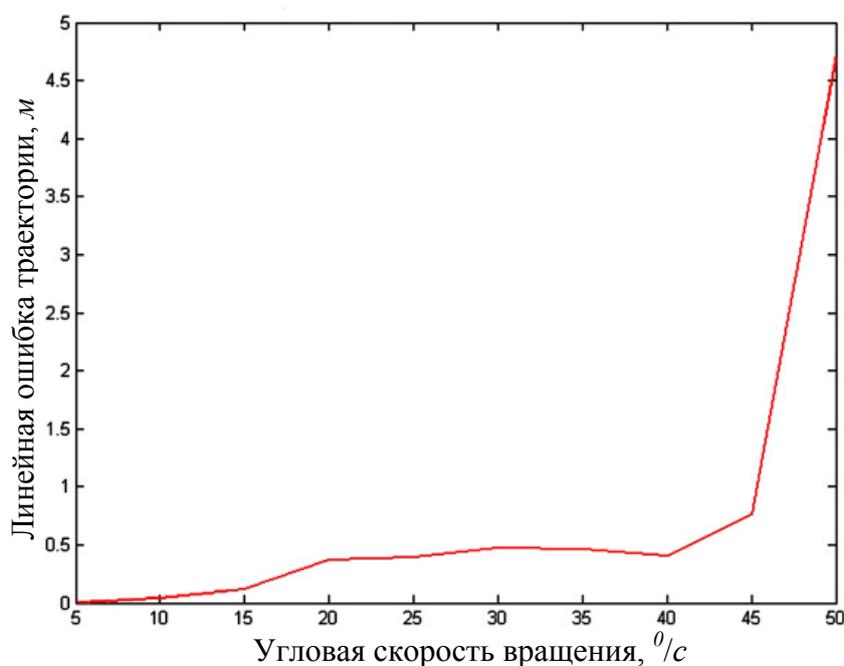


Рис.5.7. Зависимость линейной ошибки траектории от угловой скорости

Теперь рассмотрим, как зависит угло-

вая ошибка траектории от угловой скорости вращения. Как видно из рис.5.8, снова примерно со значения $\Omega = 10^\circ/c$ ошибка начинает резкий рост и управление не выдерживает заданную ошибку $\varepsilon = 1^\circ/c$. Поэтому для управления положением и ориентацией будем брать значения $\Omega \leq 10^\circ/c$.

Заметим, что выше мы рассматривали ошибки средние за время моделирования 60 с. На самом деле ошибка в течение одного сеанса моделирования не постоянная. Примерная зависимость угловой ошибки от времени показана на рис.5.9. Здесь моделирование производилось с $\Omega = 5^\circ/c$ и $\varepsilon = 1^\circ/c$. Как видно из графика, ошибка иногда превышает предельно допустимую заданную $\varepsilon = 1^\circ/c$. Это, опять же, связано с особенностью управления – поочерёдного управления положением и ориентацией.

Теперь рассмотрим, как проецируется рассматриваемое управление на управление спутниками на орбите. Так как круговое относительное движение аппаратов в формации обеспечивается силами гравитации, то можно рассмотреть только управление ориентацией спутников. Проведём моделирование с угловой скоростью орбитального движения $\Omega = 0.065^\circ/c$, соответствующей орбите МКС, и расстоянием между спутниками $R = 100 м$. Установим максимально допустимую ошибку траектории $\varepsilon = 0,01^\circ$. Зависимость угловой ошибки от времени представлена на

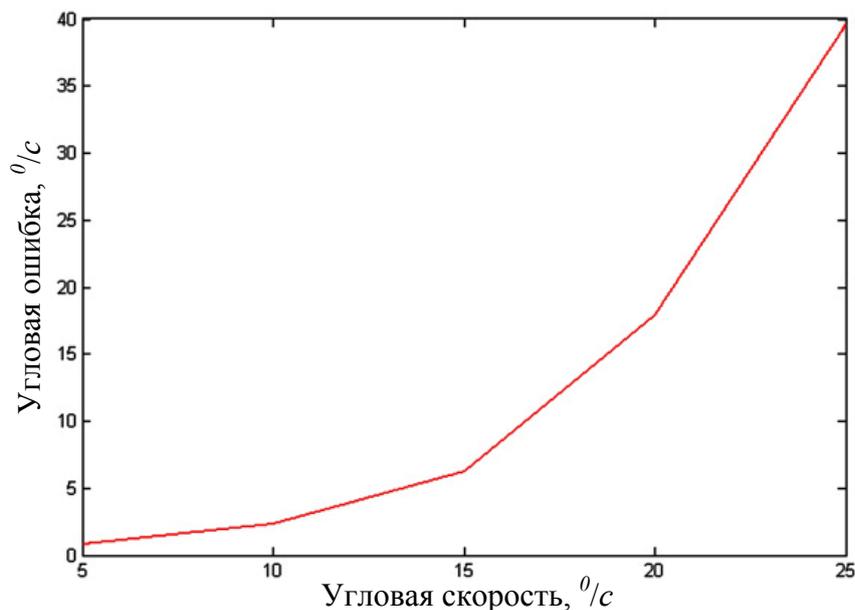


Рис. 5.8. Зависимость угловой ошибки от скорости вращения

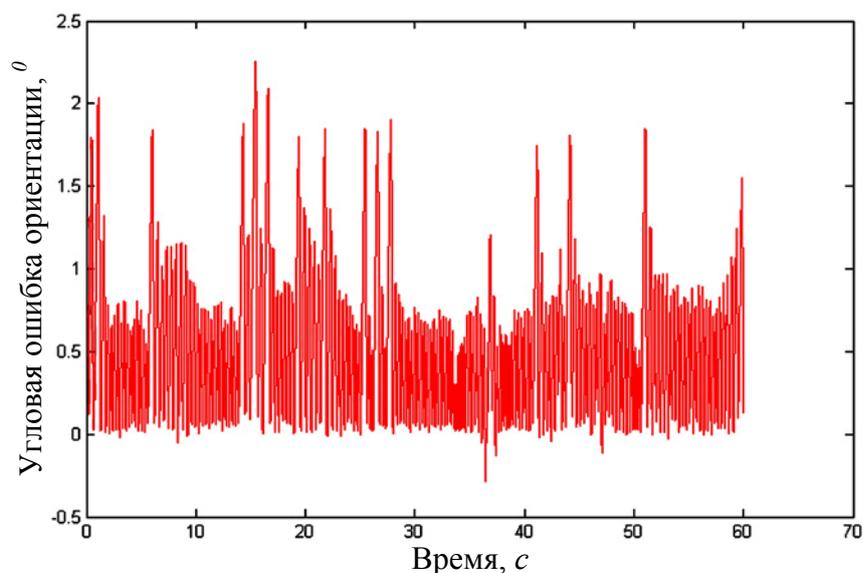


Рис. 5.9. Зависимость угловой ошибки от времени при $\Omega = 5^\circ/c$ и $\varepsilon = 1^\circ/c$

рис.5.10. Как видно из графика, ошибка отслеживания траектории не превышает заданную.

5.2. Движение двух макетов относительно неподвижного третьего макета

Добавим к двум макетам третий, который также назовём *зависимым* (рис.5.11). Задача, стоящая перед макетом №3 такая же, как и перед макетом №2: двигаться по окружности вокруг главного макета, при этом положительное направление оси Oy системы координат, связанной с макетом,

должно быть направлено на макет №1. Отличие заключается в том, что макет №3 движется с некоторой заданной разницей фаз по отношению к макету №2. На рис.5.11 выбрана разность фаз, равная 60° . Таким образом, при выборе одинаковых расстояний между первым и вторым, и первым и третьим макетом получается равносторонний треугольник со стороной R . В результате получаем движущуюся формацию макетов, задача управления для двух из которых заключается в сохранении размеров и ориентации такой формации. Формация вращается с угловой скоростью Ω .

Управление такой формацией может быть реализовано аналогично изображенному на рис.5.2 и рис.5.3 с тем отличием, что головному аппарату теперь придется производить расчет управления сразу для двух макетов. При реализации «в железе» могут возникнуть проблемы, так как процесс вычисления управления может оказаться слишком долгим, а тем более для двух аппаратов, и рассчитанные для настоящего момента времени параметры могут прийти на борт зависимого макета поздно и скорее принесут вред, чем пользу. Выходом из такой ситуации может послужить следующее решение. Головной аппарат, получив все необходимые параметры для расчета управления, прогнозирует движение зависимого аппарата на некоторое время вперед и рассчитывает управление именно для того будущего момента. Далее головной аппарат передает параметры управления зави-

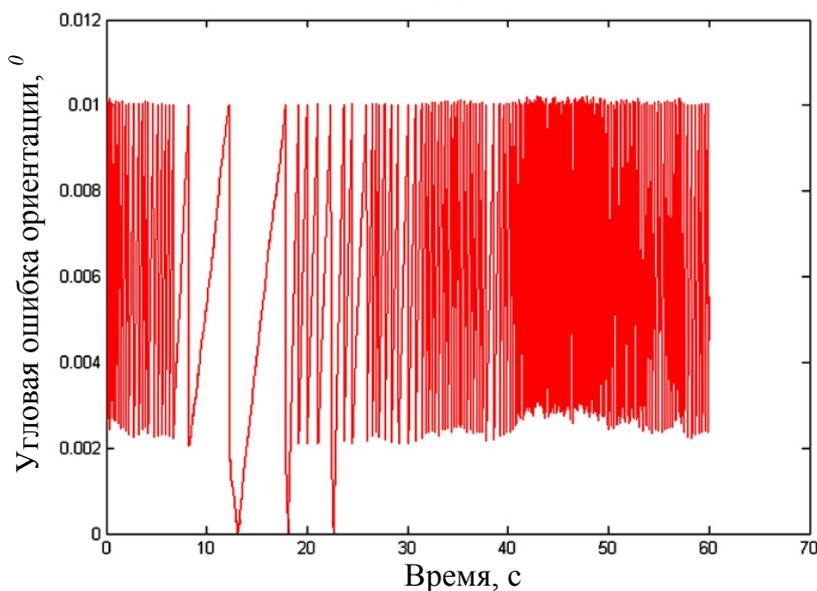


Рис. 5.10. Зависимость угловой ошибки от времени при $\Omega = 0.065^\circ / c$

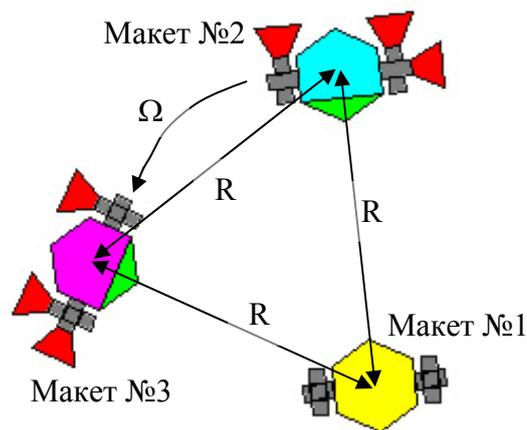


Рис. 5.11. Схема движения макетов

симому аппарату с указанием времени, начиная с которого нужно включать управление. И таким образом, решается проблема долгого вычисления управления головным аппаратом.

Как было выяснено в разделе 5.1, при значении радиуса окружности $R = 1\text{ м}$ и $\Omega \leq 10^\circ/\text{с}$ управление макетами является эффективным ошибка траек-

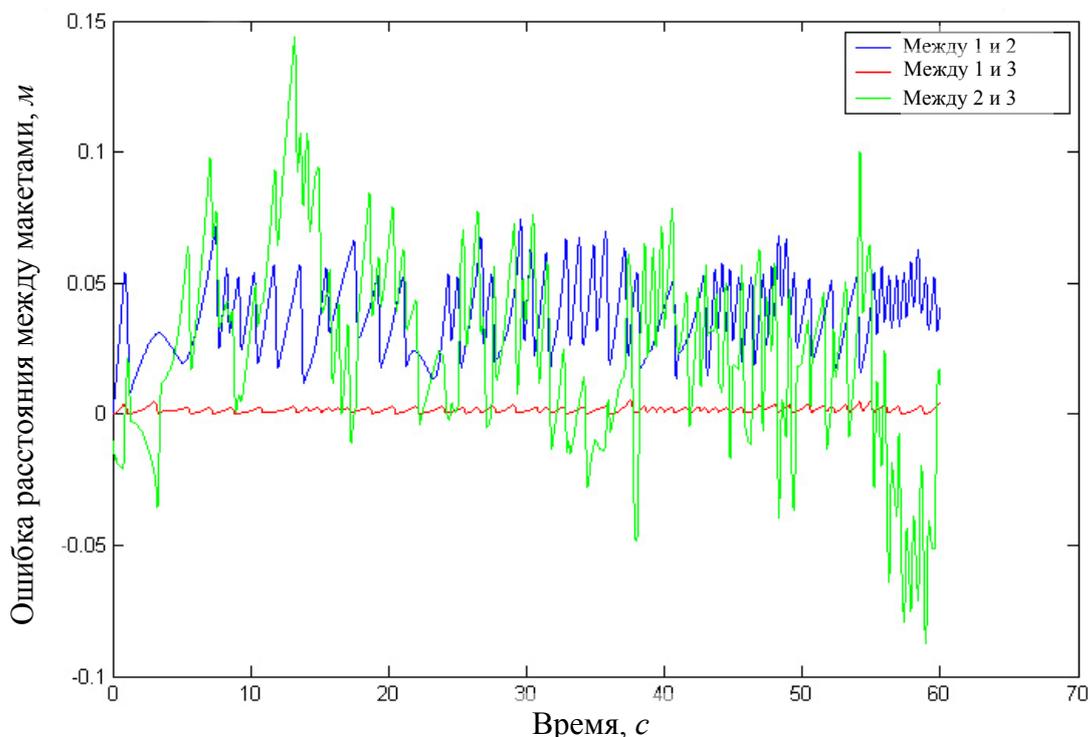


Рис. 5.12. Графики зависимости расстояний между макетами от времени

тории не выходит за рамки заданной. Поэтому рассмотрим поведение группы трёх макетов при этих параметрах. Рассмотрим графики зависимости расстояний между макетами от времени (рис.5.12). Моделирование производилось с заданной линейной ошибкой $\varepsilon = 0,05\text{ м}$. Учтём, что при такой заданной линейной ошибке ошибка взаимного расстояния будет в два раза больше. Как видно из графиков, при таких параметрах движения расстояние между макетами почти всегда находится в допустимой области за исключением нескольких моментов, когда между собой разошлись макеты №2 и №3. Это, видимо, произошло в течение сеанса управления ориентацией макета.

Теперь рассмотрим как зависит угловая ошибка взаимной ориентации трёх макетов от времени, график которой изображен на рис.5.13. Как и в случае взаимного положения, допустимая ошибка взаимной ориентации макетов №2 и №3 будет в два раза больше заданной для одного макета ($\varepsilon = 1^\circ$). Как видно из рисунка, управление ориентацией не всегда справлялось с задачей нахождения положения макета в области допустимых значений, довольно часто взаимная ориентация значительно превышала допустимую ошибку. Связано это опять же с поочерёдностью управления положением и ориентацией. Однако, если отключить управление положением, то управление ориентацией успешно справляется со своей задачей. Это можно увидеть на рис. 5.14. Ошибки ориентации макетов № 2 и № 3 относительно неподвижного головного макета не выходят

за границу допустимой области, а ошибки ориентации двух зависимых макетов, чья область допустимых значений в два раза больше, всегда меньше $\varepsilon = 1^\circ$. Эти графики свидетельствуют о том, что в случае редких корректировок положения аппаратами, как это происходит на орбите, рассматриваемое управление достаточно эффективно и обеспечивает задаваемую точность движения.

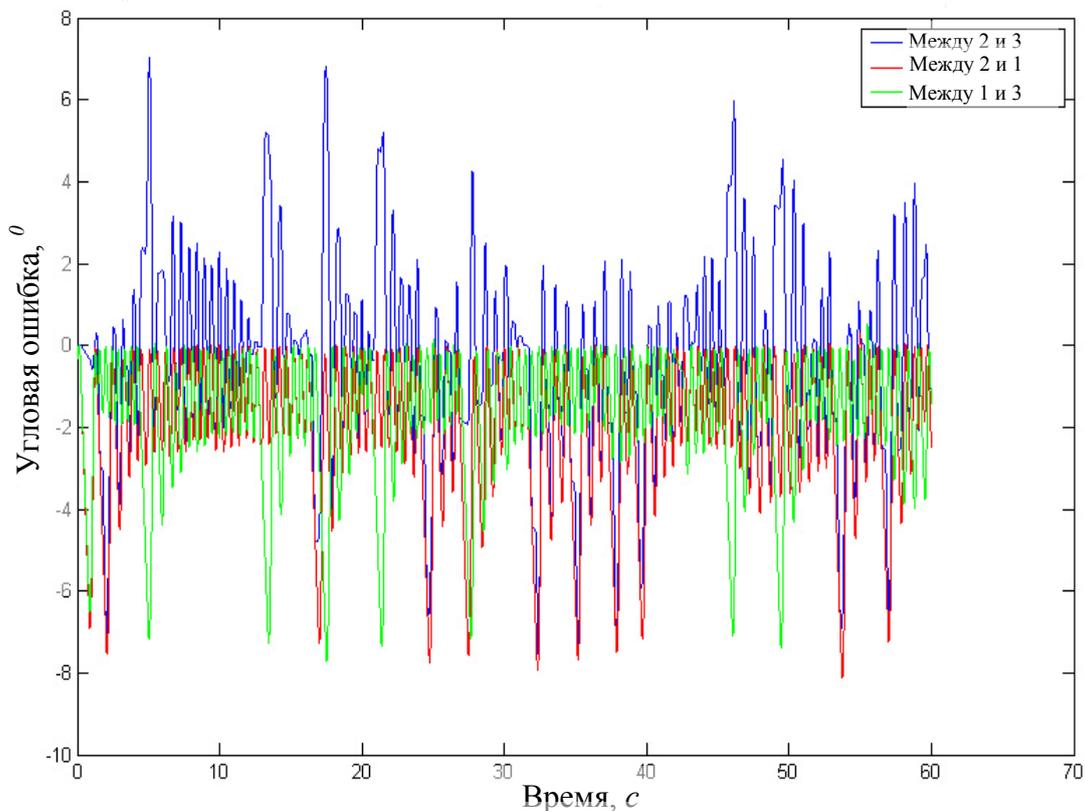


Рис. 5.13. Графики зависимости угловой ошибки от времени

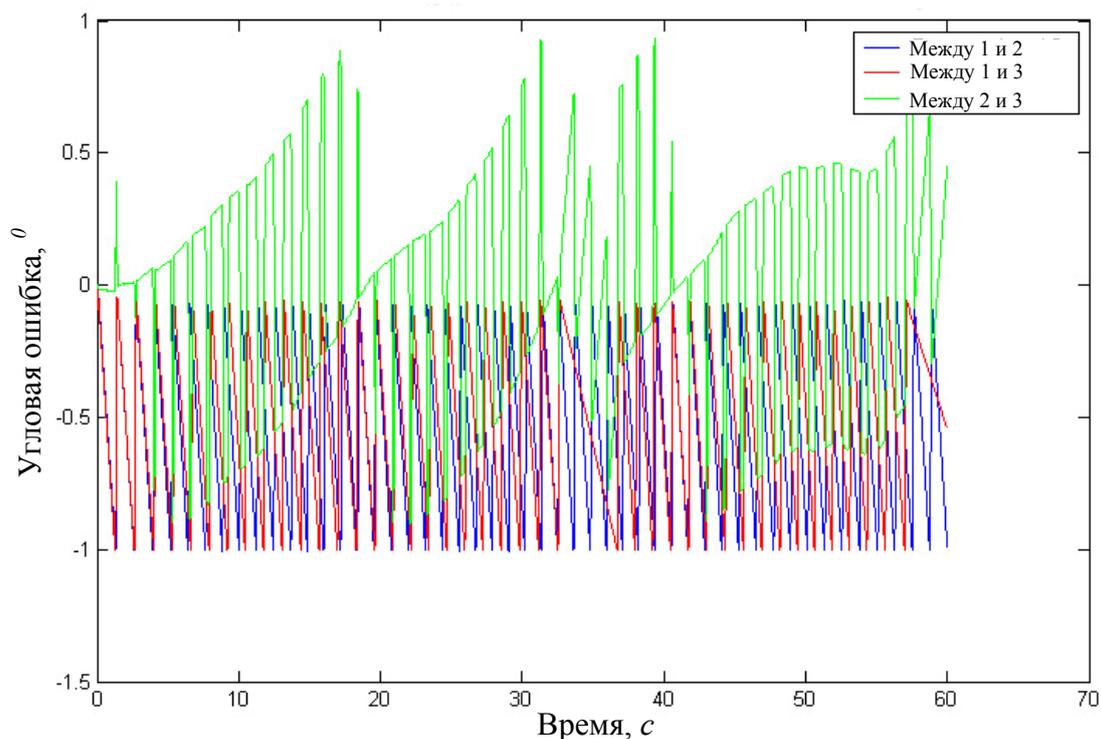


Рис.5.14. Графики зависимости угловой ошибки в отсутствие управления положением

5.3. Движение двух макетов относительно управляемого третьего макета

Усложним предыдущую конфигурацию из трёх макетов, сделав все три аппарата управляемыми. Сохраним рассмотренную выше треугольную конфигурацию из трёх макетов, но теперь вся эта конфигурация будет двигаться вокруг некоторой точки (X_0, Y_0) с угловой скоростью Ω (рис.5.15). Причем расстояние между головным макетом и точкой (X_0, Y_0) пусть будет равно расстоянию между макетами R . Такая конфигурация является наиболее близкой к «орбитальной» реальности, но и является наиболее сложной с точки зрения управления. Принципиальным отличием здесь является то, что управление движением зависимыми макетами нужно строить уже из расчета, что они движутся вокруг подвижной точки, причем закон движения этой точки заранее не известен. На данном этапе управление строится из расчета, что эта подвижная точка будет оставаться неподвижной до окончания сеанса управления зависимого макета. И это приводит к ухудшению точности движения всей формации.

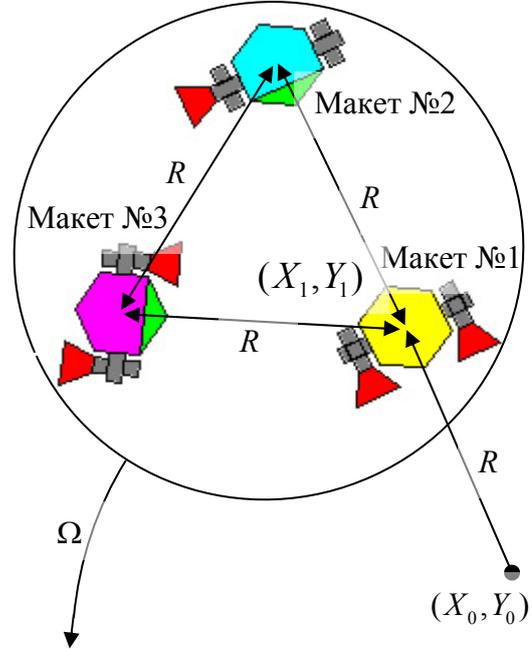


Рис.5.15. Схема движения трёх макетов

Рассмотрим подробнее как организовано управление такой группой аппаратов (рис.5.16). Головной макет играет в такой формации роль организатора

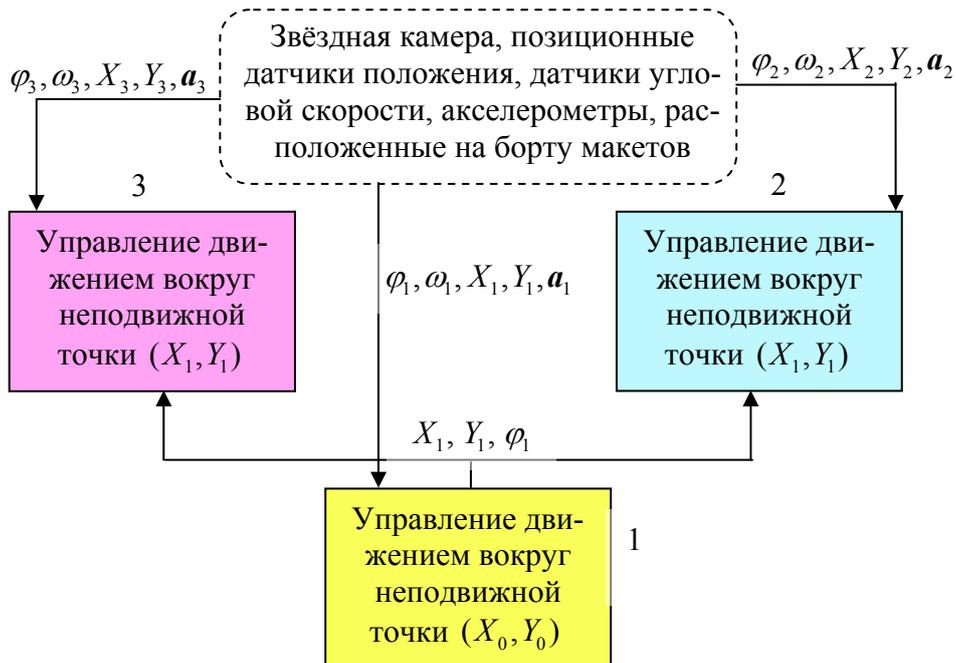


Рис. 5.16. Схема взаимосвязей в формации макетов

всего движения – именно под него подстраиваются второй и третий макеты.

Так, головной макет просто решает задачу движения вокруг некоторой точки (X_0, Y_0) , которая в точности совпадает с задачей, рассмотренной в разделе 5.1. Бортовой компьютер макета №1 с помощью датчиков вычисляет своё положение и ориентацию и принимает решение об управлении. Посредством радиоканала или с помощью измерительных средств зависимые аппараты узнают текущее положение и ориентацию головного макета и строят своё управление относительно точки (X_1, Y_1) в предположении, что она неподвижна, причем точка (X_1, Y_1) – координата макета №1. Понятно, что при таком неверном предположении точность движения формации будет страдать. Однако выбрана именно такая схема управления зависимыми макетами с недостатком информации о движении головного макета, поскольку сложно сделать прогноз управления головным макетом. Теоретически это можно было бы осуществить, но это бы существенно увеличило время вычисления параметров управления, а само управление пришло бы в негодность. С точки зрения реализации “в железе”, описанное выше управление лучше и эффективнее.

Интуитивно понятно, что управление формацией будет эффективно при медленном движении, так как в этом случае положение головного аппарата будет незначительно изменяться во времени, и управление зависимыми аппаратами будет справляться с поставленной задачей. Исследуем, как зависит средняя за время моделирования ошибка положения от угловой скорости вращения формации (рис.5.17). Как видно из графиков, при заданной ошибке траектории $\varepsilon = 0,05\text{ м}$ управление эффективно при угловой скорости $\Omega \leq 7^\circ/\text{с}$. Больше

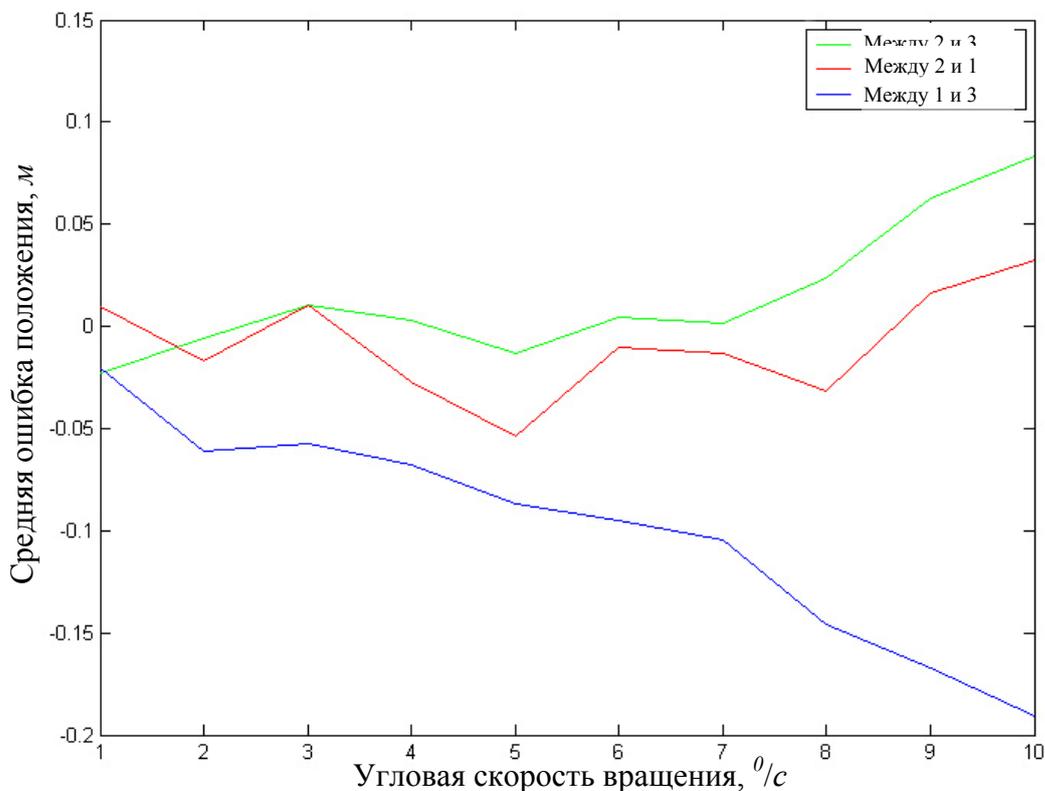


Рис. 5.17. Графики зависимости средней ошибки положения от угловой скорости

этого значения ошибка взаимного положения выходит за пределы допустимой области.

Рассмотрим теперь, как зависят от времени средние угловые ошибки ориентации от угловой скорости (рис.5.18). Как и в случае с ошибками положения, управление ориентацией эффективно при угловой скорости $\Omega \leq 7^\circ/\text{с}$.

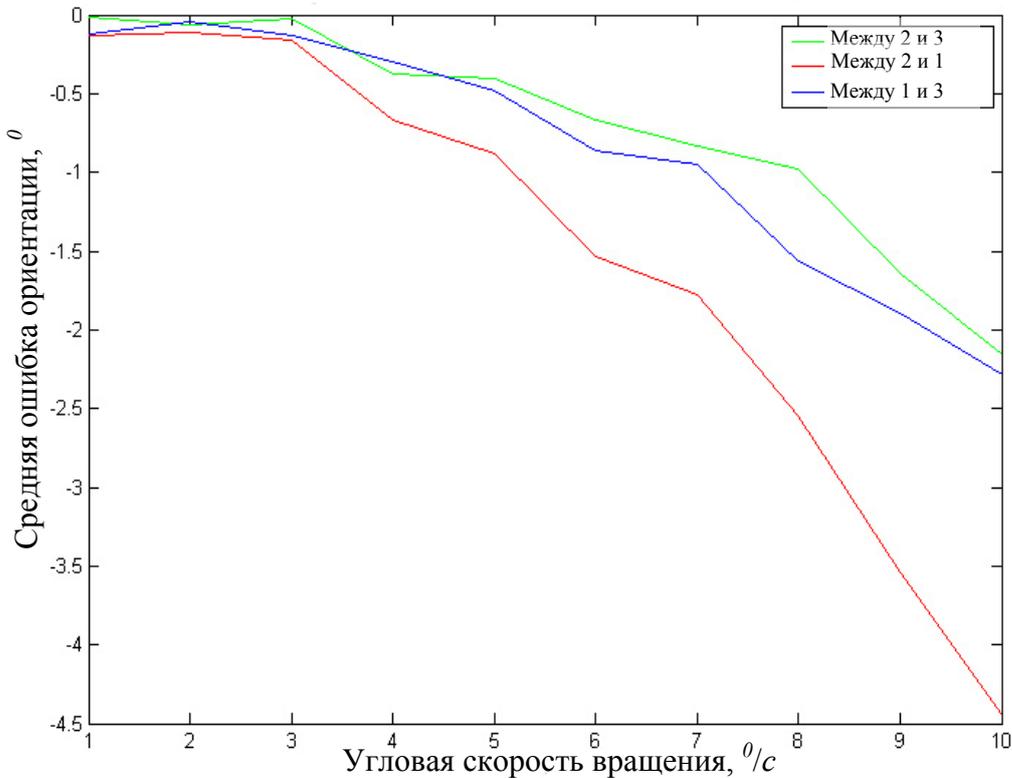


Рис.5.18. Графики зависимости ошибок взаимной ориентации от угловой скорости.

6. Заключение

Подведём итоги проделанной работы. Было проведено математическое моделирование движения различных конфигураций группы макетов. Были выявлены для различных конфигураций границы параметров движения, при которых рассматриваемое управление является эффективным. Проведена параллель между лабораторными испытаниями и реализацией управления для группы спутников. Рассмотрены возможные варианты организации взаимодействия макетов в зависимости от используемых аппаратных средств.

Работа выполнена при частичной поддержке Роснауки (ГК № 02.514.11.4068), DAAD (программа Leonhard Euler, реферат 325) и РФФИ (грант 06-01-00389).

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.Ф.Голубеву за полезные обсуждения работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Ю. Овчинников, И.Е. Зараменских. Эх, мчится тройка удалая... / Компьютерра (сдана в печать).
2. S.Theil, R.Stanislawski, A.Schleicher, S.Scheidhauer. Entwurf und Entwicklung eines Luftkissenfahrzeugs für einen Satellitendynamiksimulator/ Projektbericht, Universität Bremen. – Bremen, 2003. – 38 с.
3. Д.С. Иванов, Т. Вальтер, Д. Биндель, М.Ю. Овчинников. Стенд для отработки алгоритмов управления движением многоэлементных систем/ Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2008. – № 56. – 32 с.
(http://www.keldysh.ru/papers/2008/prep56/prep2008_56.html)
4. Ф.П. Васильев. Численные методы решения экстремальных задач./ М.: Наука, 1988. – 552с.
5. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления./ М.: Мир, 1972. – 272с.
6. Д.С. Иванов, М.Ю. Овчинников. Использование одноосного гироскопа для определения ориентации макета в лабораторных условиях/ Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2008. – № 11. – 32 с.
(http://www.keldysh.ru/papers/2008/prep11/prep2008_11.html)
7. А.А.Илын, Image Processing for the Testbed Vehicle Navigation, Preprint of KIAM RAS. Moscow, 2003. – № 73. – 32 p.
(http://library.keldysh.ru/prep_vw.asp?pid=2415)

Содержание

1. Введение	3
1.1. Примеры различных целей управления движением формаций и их возможных конфигураций	3
1.2. Наземная отработка алгоритмов управления	6
2. Уравнения движения макета	7
2.1 Анализ сил, действующих на макет	7
2.2. Вывод уравнений движения	7
3. Решение задачи управления	8
3.1. Постановка задачи и решение в общем виде	8
3.2. Управление ориентацией. Движение по опорной траектории.	9
3.3. Управление движением центра масс	10
3.4. Решение уравнений	11
4. Математическое моделирование	13
4.1. Параметры программы	13
4.2. Алгоритм управления макетом	14
4.3. Иллюстрация результатов моделирования	16
5. Исследование параметров движения группы макетов	19
5.1. Движение одного макета относительно неподвижного второго	19
5.2. Движение двух макетов относительно неподвижного третьего макета	26
5.3. Движение двух макетов относительно управляемого третьего макета	29
6. Заключение	31
ЛИТЕРАТУРА	32