ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 70 за 2008 г.

Пустыльников Л.Д.

О гипотезе Римана для приближённой дзета-функции

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

Л.Д. Пустыльников

О ГИПОТЕЗЕ РИМАНА ДЛЯ ПРИБЛИЖЁННОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

Москва, 2008 г.

УДК 511.36

Л.Д. Пустыльников. О гипотезе Римана для приближённой дзета-функции. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2008.

Доказано, что гипотеза Римана о нулях несправедлива для сколь угодно точной аппроксимации дзета-функции Римана, удовлетворяющей тому же функциональному уравнению и обладающей теми же фундаментальными свойствами, что и сама дзета-функция.

L.D. Pustyl'nikov. On the Riemann hypothesis for approximate zeta-function. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2008.

It is proved that the Riemann hypothesis does not hold for an arbitrary sharp approximation of the Riemann zeta-function satisfying the same functional equation and having the same fundamental properties as the zeta-function.

Введение

В последнее время получены новые результаты в теории дзета-функции Римана $\zeta(s)$, связанные с гипотезой Римана о нулях. Эти результаты можно разбить на две группы. Результаты, относящиеся к первой группе, связаны с построением оператора в гильбертовом пространстве, так что гипотеза Римана эквивалентна проблеме существования собственного вектора с собственным значением $\lambda = -1$ для этого оператора (§1). Результаты, относящиеся ко второй группе, связаны с поведением ξ-функции Римана $\xi(s)$ и её производных в точке $s = 1/2$. Доказано, что если хотя бы одна чётная производная функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ была бы неположительна, то гипотеза Римана о нулях была бы несправедлива. Вместе с тем также доказано, что все чётные производные функции $\xi(s)$ в точке $s = 1/2$ строго положительны, и асимптотика значений чётных производных в этой точке при стремлении порядка производной к бесконечности была найдена. Эти результаты позволяют доказать, что гипотеза Римана несправедлива для сколь угодно точной аппроксимации функции $\zeta(s)$, удовлетворяющей тому же функциональному уравнению и обладающей теми же основными свойствами, что и функция $\zeta(s)$ (§2).

1 Связь гипотезы Римана со спектром оператора, действующего в гильбертовом пространстве

Рассмотрим гильбертово пространство l, элементы которого — односторонние последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ комплексных чисел, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$, где $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Введём оператор $A = A(s)$, который зависит от комплексного числа $s \neq 1$, действует в пространстве l и задаётся бесконечной матрицей $A = (a_{kj})$ $(k,\ j = 1, 2, \ldots)$ с элементами

$$a_{kj} = \begin{cases} 1, \quad \text{если } k - j = -1, \\ p_k, \quad \text{если } 0 \le k - j \le 1, \\ 0, \quad \text{если } |k - j| > 1, \end{cases}$$

где $p_k = h_k / h_{k-1}$,

$$h_k = h_k(s) = \begin{cases} 1/k^s - \left[k^{1-s} - (k-1)^{1-s}\right]/(1-s), \quad \text{если } k \ge 2, \\ (s-1)^{-1}, \quad \text{если } k = 1, \\ 1, \quad \text{если } k = 0. \end{cases}$$

Замечание. Можно доказать, что если $0 < \operatorname{Re} s < 1$, то справедливо неравенство $h_k(s) \neq 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$. Оператор A переводит $x = (x_1, x_2, \ldots)$ в вектор $x' = (x'_1, x'_2, \ldots)$, где $x'_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1. Функция $\zeta(s)$ имеет нуль в области $0 < \operatorname{Re} s \neq 1/2$ тогда и только тогда, когда область $0 < \operatorname{Re} s < 1$ содержит такое значение s, что оператор $A(s)$ в пространстве l имеет собственный вектор с собственным значением $\lambda = -1$.

2 Опровержение гипотезы Римана для приближённой дзета-функции

Известно ([1]), что дзета-функция Римана $\zeta(s)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\zeta(s)$ — аналитическая функция, имеющая единственный полюс при $s = 1$ и принимающая вещественные значения при вещественных значениях s;

2) множество вещественных нулей функции $\zeta(s)$ совпадает с множеством всех чётных отрицательных значений s;

3) $\zeta(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция.

Далее будет доказана теорема, из которой следует, что гипотеза Римана о нулях не справедлива для сколь угодно точной аппроксимации $\zeta_\varepsilon(s)$ функции $\zeta(s)$, удовлетворяющей условиям 1)–3) (с заменой функции $\zeta(s)$ на функцию $\zeta_\varepsilon(s)$). А именно, функция $\zeta_\varepsilon(s)$ имеет комплексные нули, не лежащие на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Теорема 2. Для любого компакта K в комплексной плоскости s, не содержащего точку $s = 1$, и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует функция $\zeta_\varepsilon(s)$, удовлетворяющая условиям 1)–3), для которой $\sup\limits_{s\in K}|\zeta(s)-\zeta_\varepsilon(s)| \leq \varepsilon$, и функция $\zeta_\varepsilon(s)$ имеет по крайней мере четыре нуля $s_{1,2} = \sigma \pm it$, $s_{3,4} = 1-\sigma \pm it$, где σ и t — вещественные числа, такие что $\sigma \neq 1/2$, $t \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$, которая удовлетворяет уравнению $\xi(s) = \xi(1-s)$ ([1]). Поэтому $\xi(s)$ разлагается в ряд Тейлора $\xi(s) = \sum\limits_{r=0}^{\infty}\xi_r(s-1/2)^{2r}$ в точке $s = 1/2$ только по чётным степеням $z = s - 1/2$.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\xi_r^2}{\xi_{r-1}\xi_{r+1}} = 1.$$

Доказательство. Используем результат теоремы 3 из работы [2]. Согласно этой теореме

$$\lim_{r\to\infty}\frac{(r!\xi_r)^{(r+1)/r}}{(r+1)!\xi_{r+1}}=e.$$

Следовательно,

$$\frac{\xi_r}{\xi_{r+1}}=\frac{(r+1)(e+o_r(1))}{(r!\xi_r)^{1/r}}, \tag{1}$$

где

$$\lim_{r\to\infty}o_r(1)=0. \tag{2}$$

Далее, применяя теорему 1 из [2], которая была доказана в работе [3], получаем равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\xi_r^{1/r}}{\xi_{r+1}^{1/(r+1)}}=1. \tag{3}$$

Используя формулу Стирлинга, мы теперь получаем утверждение леммы 1 из равенств (1)–(3). Лемма 1 доказана.

Для заданного натурального числа n рассмотрим многочлен $f_n(x) = \sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r\xi_r x^r$.

Лемма 2. Существует число $n_0>0$, такое, что если $n\geq n_0$ и многочлен $f_n(x)$ не имеет кратных корней, то $f_n(x)$ имеет комплексный (не вещественный) корень.

Доказательство. Согласно теореме 1 из работы [4] неравенство $\xi_r>0$ справедливо для всех $r\geq 0$. Так как $f_n(x)$ не имеет кратных корней, то для нахождения количества вещественных корней многочлена $f_n(x)$ можно применить метод Штурма ([5]), задавая первые две функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в системе Штурма следующим образом: $F_1(x)=f_n(x)$ и $F_2(x)=\dfrac{df_n}{dx}(x)$. Третья функция $F_3(x)$ в системе Штурма есть остаток, полученный в результате деления многочлена $F_1(x)$ на $F_2(x)$, с противоположным знаком. Используя неравенство $\xi_r>0$ и вид многочлена $f_n(x)$, мы получим, что, если выполнено неравенство $(n-1)\xi_{n-1}^2<2n\xi_n\xi_{n-2}$, то модуль разности между количеством изменений знаков в системе Штурма при $x=-\infty$ и $x=\infty$ будет меньше, чем n. А это и означает, что многочлен $f_n(x)$ имеет не вещественный корень. Теперь лемма 2 следует из леммы 1. Лемма 2 доказана.

Задавая натуральное число n и вещественное число $\delta>0$, введём многочлен $\xi^{(n)}(s)=\sum\limits_{r=0}^{n}\beta_r(s-1/2)^{2r}$, где β_r $(r=0,\ ...,\ n)$ — вещественные числа, такие что $\sum\limits_{r=0}^{n}|\beta_r-\xi_r|<\delta$ и многочлен $g^{(n)}(t)\stackrel{\text{def}}{=}\xi^{(n)}(1/2+it)=\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r\beta_r t^{2r}$ не имеет кратных корней. Применяя лемму 2 и её доказательство, получим, если n — большое число, а число δ — мало, то $g^{(n)}(t)$ имеет не вещественный корень. А это приводит к тому, что многочлен $\xi(s)$ имеет комплексный корень, не принадлежащий прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Используя числа n и δ, зависящие от ε и K, определим функцию $\zeta_\varepsilon(s) = \dfrac{2\xi^{(n)}(s)\pi^{s/2}}{s(s-1)\Gamma(s/2)}$, которая удовлетворяет всем условиям теоремы. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Е.К. Титчмарш. Теория дзета-функции Римана. Издательство иностранной литературы, Москва, 1953.

[2] Л.Д. Пустыльников, Об асимптотическом поведении коэффициентов ряда Тейлора функции $\xi(s)$ // УМН 55:2 (2000), 145–146.

[3] Л.Д. Пустыльников, Асимптотическая формула для коэффициентов Тейлора функции $\xi(s)$ // Изв. РАН, серия математическая, 65:1 (2001), 93–106.

[4] Л.Д. Пустыльников, Об одном свойстве классической дзета-функции, связанном с гипотезой Римана // УМН 54:1 (1999), 259–260.

[5] А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. Гос. издательство физ.-мат. литературы, Москва, 1963.