Пустыльников Л.Д., Локоть Т.В.

Новые результаты об L-функциях Дирихле

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

Л.Д. Пустыльников и Т.В. Локоть

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ

L-ФУНКЦИЯХ ДИРИХЛЕ

Москва, 2008 г.

УДК 511.36

Л.Д. Пустыльников, Т.В. Локоть. Новые результаты об L-функциях Дирихле. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2008.

В работе проведены новые теоретические и численные исследования следующих двух проблем, связанных с L-функциями Дирихле $L(s,\chi)$: гипотеза о значениях $L(1/2,\chi)$ и расширенная гипотеза Римана для функции $L(s,\chi)$, где $\chi = \chi(n)$ — характер, являющийся символом Лежандра $\left(\frac{n}{p}\right)$, где p — простое число. Новые строгие теоретические результаты дают необходимое и достаточные условия для справедливости или опровержения второй из этих гипотез. Численные исследования, выполненные на компьютере для всех $p < 500000$, подтверждают необходимое условие и не подтверждают условия, достаточные для её опровержения. Найдена аналитическая аппроксимация полученной численно кривой распределения.

L.D. Pustyl'nikov and T.V. Lokot. New results on the Dirichlet L-functions. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2008.

New theoretical and numerical investigations of the following two problems associated with the Dirichlet L-functions $L(s,\chi)$ are carried out in this work: the conjecture on the values $L(1/2,\chi)$ and the Extended Riemann Hypothesis for the function $L(s,\chi)$ with a character $\chi = \chi(n)$ being equal to a Legendre symbol $\left(\frac{n}{p}\right)$, where p is a prime. New rigorous theoretical results give necessary and sufficient conditions for the validity or refutation of the second conjecture. Numerical investigations performed with a computer for all $p < 500000$ confirm the necessary condition and do not confirm conditions sufficient to its refutation. An analytic approximation of the numerical distribution is found as well.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 06-01-00085 и 08-01-00082.

Сайт: www.keldysh.ru

1 Введение

Суммы Гаусса и L-функции Дирихле — классические объекты математики. Несмотря на огромное количество работ, посвящённых этим объектам, некоторые фундаментальные проблемы остаются нерешёнными. Применительно к L-функциям $L(s,\chi)$ существует расширенная гипотеза Римана (РГР), согласно которой все нетривиальные нули функции $L(s,\chi)$ расположены на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Суммы Гаусса зависят от простого числа p, и основное свойство сумм Гаусса, благодаря которому они имеют многочисленные применения, состоит в том, что их абсолютная величина равна $\sqrt{p}$. Из этого свойства, и из их определения следует, что они могут принимать одно из четырёх значений: $+\sqrt{p}$, $-\sqrt{p}$, $+i\sqrt{p}$, $-i\sqrt{p}$, где i — мнимая единица. Однако, в действительности, суммы Гаусса принимают только два значения:

значение $+\sqrt{p}$, если символ Лежандра $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$,

и

значение $+i\sqrt{p}$, если символ Лежандра $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$.

В настоящей работе это утверждение сформулировано в предложении 1. При общем предположении $L(1/2,\chi) \neq 0$, где $\chi = \chi(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$ — символ Лежандра, предложение 1 доказано в [1], и в нашей работе оно сформулировано в теореме 1 (секция 2). Теорема 1 и предложение 1 позволяют поставить гипотезу 1, согласно которой неравенство $L(1/2,\chi) \neq 0$ справедливо для всех простых $p \geq 3$. На основе численных исследований эта гипотеза доказана для $p < 500000$ (теорема 2, секция 2).

Вторая часть этой работы посвящена расширенной гипотезе Римана (РГР) для L-функций $L(s,\chi)$, у которых χ есть символ Лежандра по модулю p. Здесь сформулированы две теоремы, которые дают необходимое условие для справедливости РГР (теорема 3, секция 3) и достаточное условие для опровержения РГР (теорема 4, секция 3). Доказательства теорем 3 и 4 даны в [1] и [2] соответственно. Достаточное условие есть справедливость неравенства $L(1/2,\chi) < 0$. Мы проверили справедливость этого условия численно для всех $p < 500000$. Оказалось, что для каждого простого числа $p < 500000$ справедливо неравенство $L(1/2,\chi) > 0$, то есть достаточное условие для опровержения РГР не выполняется. Более того, мы нашли эмпирический закон для значений $L(1/2,\chi)$ с $\chi = \left(\frac{n}{p}\right)$ при $p \to \infty$ (подсекция 3.3, рис. 1).

Результаты этой работы основаны на методах работ [3]–[5], относящихся к теории дзета-функции Римана, и на результатах работ [1] и [2], относящихся к L-функциям Дирихле. Компьютерная программа разработана Р.Л. Пустыльниковым.

2 Суммы Гаусса и гипотеза 1

Определение 1. Пусть $p \geq 3$ — простое число. Целое число называется квадратичным вычетом по модулю p, если оно не делится на p и сравнимо с квадратом целого числа по модулю p. Целое число, которое не сравнимо с квадратом целого числа по модулю p, называется квадратичным невычетом по модулю p.

Определение 2. Пусть n — целое число. Символ Лежандра $\left(\frac{n}{p}\right)$ определяется следующим образом: он равен 1, если n — квадратичный вычет по модулю p, он равен -1, если n — квадратичный невычет по модулю p, он равен 0, если n делится на p.

Замечание 1. Известно, что функция $\chi(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$ полностью мультипликативна, то есть $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ для всех целых m и n ([6]).

Определение 3. Пусть a — целое число. Определим суммы Гаусса $u_{a,p}$ и $S_{a,p}$ следующим образом:

$$u_{a,p} = \sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) \exp\left(2\pi \frac{an}{p}\right), \qquad S_{a,p} = \sum_{n=0}^{p-1} \exp\left(2\pi \frac{an^2}{p}\right).$$

2.1 Основные свойства сумм Гаусса и формулировка гипотезы 1

Предположим, что целое число не делится на простое число p. Прежде всего сформулируем хорошо известные свойства сумм Гаусса. Справедливы следующие равенства:

$$u_{a,p} = \left(\frac{a}{p}\right) u_{1,p} \ , \tag{1}$$

$$u_{a,p} = S_{a,p} \ , \tag{2}$$

$$|u_{a,p}| = |S_{a,p}| = \sqrt{p}. \tag{3}$$

Доказательства этих равенств даны в [6] (глава 5).

Лемма 1. Если $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, то

$$u_{a,p} = 2\left(\frac{a}{p}\right) \sum_{n=1}^{(p-1)/2} \left(\frac{n}{p}\right) \cos\frac{2\pi n}{p}, \tag{4}$$

и, если $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, то

$$u_{a,p} = 2i\left(\frac{a}{p}\right) \sum_{n=1}^{(p-1)/2} \left(\frac{n}{p}\right) \sin\frac{2\pi n}{p}. \tag{5}$$

Доказательство. В силу (1) достаточно доказать лемму 1 только для $a = 1$, так как $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$. Пусть $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$. Тогда в силу замечания 1 для любого целого n справедливо равенство $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{-n}{p}\right)$, и поэтому равенство (4) для $a = 1$ следует из определения $u_{1,p}$ (определение 3). Если же $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, то согласно замечанию 1 для любого целого n справедливо равенство $\left(\frac{n}{p}\right) = -\left(\frac{-n}{p}\right)$, и поэтому равенство для $a = 1$ также следует из определения 3. Лемма 1 доказана.

Следующее утверждение следует из (3) и леммы 1.

Следствие 1. Если $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, то $u_{a,p}$ может принимать только одно из двух значений: $+\left(\frac{a}{p}\right)\sqrt{p}$ и $-\left(\frac{a}{p}\right)\sqrt{p}$; и, если $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, то $u_{a,p}$ может принимать только одно из двух значений: $+\left(\frac{a}{p}\right)i\sqrt{p}$ и $-\left(\frac{a}{p}\right)i\sqrt{p}$.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Для любого целого числа a, не делящегося на p, если $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, то $u_{a,p} = +\left(\frac{a}{p}\right)\sqrt{p}$, и, если $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, то $u_{a,p} = +\left(\frac{a}{p}\right)i\sqrt{p}$.

Доказательство этого предложения дано в [7].

Сформулируем теперь строгий результат (теорема 1), связывающий предложение 1 с L-функциями Дирихле. С этой целью нам необходимо ввести следующее определение.

Определение 4. Пусть $\chi = \chi(n) :\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{n}{p}\right)$ — символ Лежандра. L-функция с характером $\chi(n)$ есть ряд следующего вида:

$$L_p(s) = L(s,\chi) :\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Замечание 2. Известно, что функция $s \to L(s,\chi)$ может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость ([8]).

Теорема 1. Если бы предложение 1 было бы несправедливо, то выполнялось бы равенство $L(1/2,\chi) = 0$.

Доказательство теоремы 1 дано в [1] (Theorem 1, sect. 2).

Теорема 1 и предложение 1 позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Для всех простых $p \geq 3$ справедливо неравенство $L(1/2,\chi) \neq 0$.

2.2 Численные результаты

Чтобы проверить справедливость гипотезы 1, были проведены численные исследования для всех простых $p < 500000$. Метод вычисления значений $L(1/2,\chi)$ описан в следующей секции 3. Результаты этих исследований полностью подтверждают гипотезу 1. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2. Для любого простого $p < 500000$ справедлива гипотеза 1.

Для того, чтобы провести численные исследования, необходимо уметь вычислять символ Лежандра $\left(\frac{n}{p}\right)$ для всех целых чисел n, удовлетворяющих условию $0 \leq n \leq p-1$. Это делается с использованием некоторых свойств символа Лежандра на основе следующего алгоритма:

1. Для $q = \frac{p-1}{2}$ и любого числа $\mu = 1, \ldots, q$ находим число r_μ, которое есть остаток от деления числа μ^2 на число p;

2. Для $n = 1, \ldots, p-1$ полагаем

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} 1, \text{ если число } n \text{ равно одному из чисел } r_1, \ldots, r_q; \\ -1 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

3 L-функции Дирихле и расширенная гипотеза Римана

3.1 Необходимое условие для справедливости расширенной гипотезы Римана и достаточное условие для её опровержения

Рассмотрим L-функции $L_p(s) = L(s,\chi)$ с характером $\chi = \chi(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$, где $p \geq 3$ — простое число (определение 4). Расширенная гипотеза Римана (РГР) для L-функций состоит в следующем: все нули функции $L(s,\chi)$, которые расположены в критической полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$, в действительности лежат на критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. В последующих двух теоремах 3 и 4 мы приводим необходимое условие для справедливости РГР для L-функций и достаточное условие для её опровержения.

Определение 5. Характер $\chi(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, по модулю $p \geq 3$ есть функция, обладающая следующими свойствами:

1. $\chi(n)$ — не равная тождественно нулю функция, периодическая с периодом p; более того, $\chi(n) = 0$, если наибольший общий делитель (n,p) чисел n и p больше, чем 1, и $\chi(n) \neq 0$, если $(n,p) = 1$.

2. Функция $\chi(n)$ — полностью мультипликативна, то есть $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ для всех чисел m и n.

Определение 6. Характер $\chi(n)$ по модулю p называется примитивным, если выполнены следующие условия:

1) для всех целых n значение $\chi(n)$ есть вещественное число;

2) значение $\chi(n)$ не всегда равно 1 при условии, что $(n,p) = 1$;

3) наименьший период функции $\chi(n)$ равен p.

Теорема 3. Пусть $\chi(n)$ будет вещественный характер (то есть функция $\chi(n)$ — вещественная) по модулю $p \geq 3$, такой что $L(1/2, \chi) \neq 0$, и пусть

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{-(s+\delta)/2} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s,\chi), \tag{6}$$

где $L(s,\chi)$ — функция, введённая в определении 4,

$$\delta = \begin{cases} 0, \text{ если } \chi(-1) = 1, \\ 1, \text{ если } \chi(-1) = -1, \end{cases} \tag{7}$$

Γ — гамма-функция. Тогда, если знак хотя бы одной чётной производной функции $\xi(s,\chi)$ в точке $s = 1/2$ отличается от знака числа $\xi(1/2,\chi)$, то РГР несправедлива.

Доказательство теоремы 3 дано в [1] (Theorem 4, sec. 3).

Теорема 4. Пусть χ — вещественный примитивный характер по модулю $p \geq 3$, такой что $L(1/2,\chi) < 0$. Тогда РГР для функции $L(s,\chi)$ несправедлива.

Доказательство. Равенства (6) и (7) приводят к тому, что $\xi(1/2,\chi) < 0$. Поэтому утверждение теоремы 4 следует из теоремы 3 и из следующего утверждения, доказанного в [2]: существует число $m_0 = m_0(p) > 0$, такое что для каждого чётного числа $m \geq m_0$ выполнено неравенство

$$\frac{d^m}{ds^m}\xi\left(\frac{1}{2},\chi\right) > 0.$$

Теорема 4 доказана.

Следствие 2. Утверждения теорем 3 и 4 справедливы для функции $L_p(s) = L(s,\chi)$ с характером $\chi = \chi(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$, где $p \geq 3$ — простое число.

3.2 Явное выражение для значения функции $L_p(s)$ в точке $s = 1/2$

Лемма 2. Пусть S — функция, определённая следующим образом:

$$S(x) : \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq x} \left(\frac{n}{p}\right), \qquad x \geq 1, \tag{8}$$

где $\left(\frac{n}{p}\right)$ — символ Лежандра. Тогда справедливо равенство

$$L_p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_1^{\infty} S(x) x^{-3/2} dx. \tag{9}$$

Доказательство этой леммы дано в [8] (гл. 8, лемма 9).

Теорема 5. Справедливо равенство

$$L_p\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{p}\right), \tag{10}$$

где $\left(\frac{n}{p}\right)$ — символ Лежандра.

Доказательство. В силу (9) имеем равенство

$$L_p\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) \int\limits_n^{n+1} \frac{x^{-3/2}}{2}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \tag{11}$$

которое в силу (8) приводит к равенству (10). Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 следует, что для приближённого вычисления значения $L_p(1/2)$ можно ограничиться частной суммой ряда (10). В этой связи очень полезна следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $M > 0$ — целое число, а

$$L_{p,M} :\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{p}\right) \qquad — \tag{12}$$

M-я частичная сумма ряда (10). Тогда справедливо неравенство

$$\left|L_p\left(\frac{1}{2}\right) - L_{p,M}\right| < \frac{2\sqrt{p}\ln p}{\sqrt{M+1}}. \tag{13}$$

Доказательство. Из равенств (12) и (11) следует, что

$$L_p\left(\frac{1}{2}\right) - L_{p,M} = -\frac{S(M)}{\sqrt{M+1}} + \sum_{n=M+1}^{\infty} S(n) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right). \tag{14}$$

Согласно теореме Виноградова ([6], гл. 5) для любого целого числа $m \geq 1$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n}{p}\right)\right| < \sqrt{p}\ln p, \tag{15}$$

где $\left(\frac{n}{p}\right)$ — символ Лежандра. Теперь, применяя (15), (8) и (14), получим (13). Теорема 6 доказана.

3.3 Численные результаты

Для любого простого числа $p < 500000$, используя теорему 6, вычислим $L_{p,M}$ для достаточно большого M, которое зависит от p и является приближением числа $L_p(1/2)$. В частности, минимальное значение $L_p(1/2)$ есть $0,0017$ для $p = 493919$. Рисунок показывает распределение (частоту) значений $L_p(1/2)$.

Вторая координата N_i каждой точки $Q_i = (i, N_i)$ $(i = 1, \ldots, 42)$ кривой частот представляет число значений $L_p(1/2)$, которые находятся в интервале $[i-1, i]$. Рисунок показывает, что функция частоты имеет максимум в точке $i = 1$, который равен 8146, то есть количество значений $L_p(1/2)$ в интервале $[0, 1]$. Численные результаты позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 7. Для любого простого числа $p < 500000$ справедливо неравенство (см. рис.) $L_p(1/2) > 0$.

Замечание 3. В силу теоремы 4 утверждение теоремы 7 косвенно подтверждает РГР для функции $L(\chi, s) = L_p(s)$.

3.4 Аппроксимация кривой распределения частот

В этом пункте будут приведены результаты, связанные с аппроксимацией и заданием аналитической функции, описывающей кривую распределения частот для значений $L_p(1/2)$ функций Дирихле, изображённую на рисунке. С этой целью обозначим значения $L_p(1/2)$ на оси абсцисс на этом графике через переменную x, значения частот на оси ординат на графике — через переменную y, а саму функцию, чей график совпадает с графиком на рисунке, через $y = \Psi(x)$. Далее рассмотрим функцию $\Phi(x) = \ln \Psi(x)$, и будем искать такую линейную функцию $z(x) = ax + b$ (a и b — числа, не зависящие от x), чтобы сумма квадратов разностей значений функций $\Phi(x)$ и $z(x)$ вдоль всего рассматриваемого интервала значений переменной x была наименьшей. Решение этой задачи минимизации единственно и имеет вид $z(x) = -0,188x + 8,724$. Поэтому график аппроксимируется функцией $\Psi(x) = \exp(-0,188x + 8,724)$.

Список литературы

[1] Л.Д. Пустыльников. Некоторые свойства L-рядов Дирихле, связанные с их нетривиальными нулями. Препринт ИПМ № 69 (2006).

[2] Л.Д. Пустыльников. Асимптотика производных функции $\xi(s, \chi)$. Препринт ИПМ № 44 (2007).

[3] Л.Д. Пустыльников. Об одном свойстве классической дзета-функции, связанном с гипотезой Римана // УМН 54:1 (1999), 259–260.

[4] Л.Д. Пустыльников. Об асимптотическом поведении коэффициентов ряда Тейлора функции $\xi(s)$ // УМН 55:2 (2000), 145–146.

[5] Л.Д. Пустыльников. Асимптотическая формула для коэффициентов Тейлора функции $\xi(s)$ // Изв. РАН, серия математическая, 65:1 (2001), 93–106.

[6] И.М. Виноградов. Основы теории чисел. М. (1965).

[7] H. Davenport. Multiplicative number theory. Springer-Verlag (1980).

[8] А.А. Карацуба. Основы аналитической теории чисел. Наука, М. (1975).