ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 33 за 2008 г.

Нажесткина Э.И.

Формулировка и реализация алгоритма расчета трехмерных уравнений Эйлера по схеме второго порядка точности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Нажесткина Э.И. Формулировка и реализация алгоритма расчета трехмерных уравнений Эйлера по схеме второго порядка точности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 33. 16 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-33

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Нажесткина Э.И.

Формулировка и реализация алгоритма расчета трехмерных уравнений Эйлера по схеме второго порядка точности

Препринт № 33

Москва

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В. КЕЛДЫША

НАЖЕСТКИНА Э.И.

Формулировка и реализация алгоритма расчета трехмерных уравнений Эйлера по схеме второго порядка точности

Москва, 2008

Нажесткина Э.И. *Численное исследование нелокальных граничных условий дальнего поля для задачи дозвукового обтекания крыла.*

Проведено численное исследование нелокальных граничных условий дальнего поля для задачи дозвукового обтекания крыла ONERA-M6. Применение указанных условий показало возможность использования расчетных областей сравнительно малого размера (средний радиус области составляет примерно 2 размаха крыла); при этом точность коэффициента подъемной силы Cy находится, как правило, в пределах 0.5%, что в два-три раза лучше, чем для характеристических граничных условий. Дальнейшее уточнение модели и более высокая эффективность нелокальных граничных условий (как, например, в ранее исследованном двумерном случае) возможны, прежде всего, при повышении порядка точности разностной схемы интегрирования уравнений Эйлера внутри области с первого на второй.

Nazhestkina E.I. *Numerical study of far-field non-local boundary conditions for transonic flow around wing.*

A numerical study of non-local far-field boundary conditions for transonic flow problems around the ONERA-M6 wing is done. It is shown that the conditions permit using sufficiently small computational domains providing the accuracy of the lift coefficient Cy within 0.5% (the average radius is about 2 of the wing span); this is two-three times better comparing with the commonly used characteristic-based boundary conditions. A further refinement of the model and a higher computational efficiency of the non-local boundary conditions method (like e.g. obtained in two-dimensional case) are possible after improvement of the difference scheme of integrating the Euler equations in the computational domain, first of all owing to increase the first order of accuracy to the second one.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00476

Формулировка и реализация алгоритма расчета трехмерных уравнений Эйлера по схеме второго порядка точности

Аннотация

Разработан алгоритм расчета уравнений Эйлера для 3-х мерного дозвукового обтекания тел в невязком газе. Применена схема 2-ого порядка точности, использован оригинальный подход к вычислению газодинамических функций на поверхности тела. Написана и отлажена программа для расчетов на многопроцессорной машине rsc4. Проведены контрольные расчеты обтекания кругового цилиндра, подтверждающие полную согласованность с расчетами в двумерном случае, Проводятся расчеты обтекания крыла. Следующим этапом будет замена характеристических граничных соотношений на внешней границе на нелокальные граничные условия дальнего поля.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 07-01-00476

Численный метод расчета дозвукового обтекания невязким газом

В основе метода лежит математическая модель дозвукового обтекания, описываемая нестационарными трехмерными уравнениями динамики невязкого газа. При отыскании стационарного решения используются нестационарные уравнения Эйлера. Задача формулируется как гиперболическая с соответствующими граничными условиями. Искомое решение находится путем установления. При интегрировании по времени используется разностная схема типа Лакса-Вендроффа [2]. Решение разностных уравнений осуществляется методом конечных объемов [1], [5].

Дифференциальные уравнения

Исходные уравнения в декартовых координатах могут быть записаны в следующем виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_z}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

Будем предполагать, что область Ω, в которой ищется решение , ограничена некоторой поверхностью Г, на которой заданы дополнительные граничные условия.

На основе теоремы Гаусса-Остроградского интегральная форма уравнений (1) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{q}\, dvol + \iint\limits_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\, ds = 0 \qquad (2)$$

где

$$\mathbf{q} = \{\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e\}$$

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} + p(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z, \mathbf{v})\}$$

$$\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$$

n - единичная внешняя нормаль к поверхности Г , ограничивающей объем Ω. p, ρ давление и плотность, отнесенные соответственно к p_∞ и ρ_∞ , компоненты скорости u,v отнесены к величине $(p_\infty/\rho_\infty)^{\frac{1}{2}}$ /

Полная энергия $e=p/(\gamma-1)+\rho(u^2+v^2+w^2)/2$, где γ -отношение теплоемкостей.
Квадрат скорости звука $a^2=\gamma p/\rho$. Геометрические величины отнесены к характерному размеру r_0, а время к величине $r_0/(p\infty/\rho_\infty)^{\frac{1}{2}}$. Величина H является вектором потока через поверхность

$H=H_x e_x+H_y e_y+H_z e_z$ где

$H_x=\{\rho u, \rho u^2+p, \rho uv, \rho uw, (p+e)u\}'$

$H_y=\{\rho v, \rho uv, \rho v^2+p, \rho vw, (p+e)v\}'$

$H_z=\{\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2+p, (p+e)w\}'$

n ds=S - вектор поверхности, равный по модулю площади поверхности и совпадающий по направлению с нормалью к поверхности. dvol-элементарный объем.

Метод конечных объемов и его дискретизация

Введем в области Ω некоторую разностную сетку с пространственными индексами (k,l,m), точки, попавшие на поверхность Г , назовем граничными, а все точки, лежащие вне Г, назовем внутренними. Таким образом , область Ω оказалась разбита на некоторое количество шестигранников , не обязательно с ортогональными сторонами.

Обозначим объем произвольного шестигранника с центром в точке (k,l,m) как $\Omega_{тек}$, и ограничивающую его поверхность как $\partial\Omega_{тек}$.
Уравнения для элементарного объема запишутся

$$\Omega_{тек}\frac{d\mathbf{q}_{тек}}{dt}+\delta\,[\mathbf{H}(\mathbf{q})\square\mathbf{S}]_{тек}=0 \qquad (3)$$

$\mathbf{S}=\{\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_l, \mathbf{S}_m\}$ -векторный элемент поверхности.

$\mathbf{S_k}, \mathbf{S}_l, \mathbf{S}_m$ - направлены по внешним нормалям к соответствующим поверхностям.

δ -центральный разностный оператор.

μ -оператор усреднения.

[H$\cdot$ S]=$[\mu_k \mathbf{H}(\mathbf{q})]\mathbf{S}_k + [\mu_l \mathbf{H}(\mathbf{q})]\mathbf{S}_l + [\mu_m \mathbf{H}(\mathbf{q})]\mathbf{S}_m$, где

$\mu_k \mathbf{H}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}[\mathbf{H}_{k+\frac{1}{2},l,m} + \mathbf{H}_{k-\frac{1}{2},l,m}]$,аналогично для μ_l, μ_m.

$\delta[\mathbf{H}\cdot\mathbf{S}] = \delta_k[\mathbf{H}\cdot\mathbf{S}_{k]}] + \delta_l[\mathbf{H}\cdot\mathbf{S}_l] + \delta_m[\mathbf{H}\cdot\mathbf{S}_m]$,где

$\delta_k[\mathbf{H}\cdot\mathbf{S}_k] = \frac{1}{2}[\mathbf{H}_k\cdot\mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{k-1}\cdot\mathbf{S}_{k-\frac{1}{2}} + \mathbf{H}_{k+1}\cdot\mathbf{S}_{k+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_k\cdot\mathbf{S}_{k-\frac{1}{2}}]$

Для реализации численного решения применяется разностная схема, являющаяся
модификацией схемы Лакса-Вендроффа, основанная на представлении

$$\mathbf{q}(t+\tau) \approx \mathbf{q}(t) + \tau\partial\mathbf{q}/\partial t + \frac{1}{2}\tau^2\partial^2\mathbf{q}/\partial t^2 ,$$

где вторая производная по времени вычисляется подстановкой $\partial\mathbf{q}/\partial t$ из уравнения (1) в продифференцированное по времени это же уравнение.

$$\partial^2\mathbf{q}/\partial t^2 = -\partial/\partial x(\frac{d\mathbf{H}_x}{d\mathbf{q}}\cdot\partial\mathbf{q}/\partial t) - \partial/\partial y(\frac{d\mathbf{H}_y}{d\mathbf{q}}\cdot\partial\mathbf{q}/\partial t) - \partial/\partial z(\frac{d\mathbf{H}_z}{d\mathbf{q}}\cdot\partial\mathbf{q}/\partial t)$$

$\frac{d\mathbf{H}_x}{d\mathbf{q}}, \frac{d\mathbf{H}_y}{d\mathbf{q}}, \frac{d\mathbf{H}_z}{d\mathbf{q}}$, это матрицы Якоби.

Область $\Omega_{тек}$ с центром в точке (k,l,m) ограничена поверхностями, проходящими через точки (k$\pm$1,l$\pm$1,m$\pm$1). Разобьем область $\Omega_{тек}$ на 8 подобластей с центрами (k$\pm$1/2,l$\pm$1/2,m$\pm$1/2).
В средних точках областей $\Omega_{тек}$ определяются $\partial\mathbf{q}/\partial t$ для всех 8 подобластей. По средним точкам строится новая подобласть Ω_* и в ней окончательно определяется $\mathbf{q}_{k,l,m}^{n+1}$.
Предварительно в подобласти Ω_* вычисля.ются $\partial^2\mathbf{q}/\partial t^2$ по аналогичной формуле (3).

Окончательно имеем

$$\mathbf{q}_{k,l,m}^{n+1} = \mathbf{q}_{k,l,m}^{n} - \tau/vol\Omega\ \delta[\mathbf{H}(\mathbf{q}_*^n)\cdot\mathbf{S}_*] - 1/2\tau^2/vol\Omega\delta[\mathbf{H}^{\square}\cdot\mathbf{S}^{\square}]$$

Где $\mathbf{H}^{\square} = (\mathbf{H}_x^{\square}, \mathbf{H}_y^{\square}, \mathbf{H}_z^{\square})$ -произведение матриц Якоби на производную $\partial \mathbf{q} / \partial t$. Локальный шаг по времени вычислялся на основании спектрального признака.

Уравнения на границе тела

Для вывода этих уравнений воспользуемся характеристической формой записи уравнений газовой динамики в трехмерном случае [2],[3].

$$Dp - a^2 D\rho = 0$$

$$\mathbf{n} \times (\rho D\mathbf{U} + \nabla p) = 0 \qquad (4)$$

$$a^{-1}\mathbf{n} \cdot (\rho D\mathbf{U} + \nabla p) - (\rho\, div\mathbf{U} + Dp) = 0$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Первые 3 уравнения, это характеристические соотношения, последнее условие непротекания на поверхности тела.

D-оператор полного дифференцирования по времени

$D = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla$, a – скорость звука.

Уравнение $\mathbf{n} \times (\rho D\mathbf{U} + \nabla p) = 0$ это проекция уравнения движения на касательную плоскость. Будем предполагать, что известны в касательной плоскости два ортогональных единичных вектора $\tau_{\mathbf{1}}$ и τ_2

$$\tau_1 = (\tau_{1x}, \tau_{1y}, \tau_{1z})$$
$$\tau_{\mathbf{2}} = (\tau_{2x}, \tau_{2y}, \tau_{2z}).$$

Поскольку $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$, это значит что вектор скорости лежит в касательной плоскости.

Обозначим

$$U_{\tau 1} = u\tau_{1x} + v\tau_{1y} + w\tau_{1z}$$
$$U_{\tau 2} = u\tau_{2x} + v\tau_{2y} + w\tau_{2z}$$
$$\mathbf{U} = U_{\tau 1}\tau_{\mathbf{1}} + U_{\tau 2}\tau_{\mathbf{2}}$$

Тогда систему (4) можно привести к дивергентному виду, понизив порядок на единицу, тогда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}-a^{-1}(Q_x n_x+Q_y n_y+Q_z n_z)=0$$

$$\frac{\partial(\rho U_{\tau 1})}{\partial t}+Q_x(\tau_{1x}-a^{-1}U_{\tau 1}n_x)+Q_y(\tau_{1y}-a^{-1}U_{\tau 1}n_y)+Q_z(\tau_{1z}-a^{-1}U_{\tau 1}n_z)=0$$

$$\frac{\partial(\rho U_{\tau 2})}{\partial t}+Q_x(\tau_{2x}-a^{-1}U_{\tau 2}n_x)+Q_y(\tau_{2y}-a^{-1}U_{\tau 2}n_y)+Q_z(\tau_{2z}-a^{-1}U_{\tau 2}n_z)=0$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(e+p)u+\frac{\partial}{\partial y}(e+p)v+\frac{\partial}{\partial z}(e+p)w-a^{-1}(a^2/(\gamma-1)+1/2q^2)(Q_x n_x+Q_y n_y+Q_z n_z)=0$$

где

$$Q_x=\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho uw)$$

$$Q_y=\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2+p)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho vw)$$

$$Q_z=\frac{\partial}{\partial x}(\rho uw)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho vw)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2+p)$$

$$q^2=u^2+v^2+w^2=U_{\tau 1}^2+U_{\tau 2}^2$$

Нас интересует величина поправки Δ q на n -ом шаге по времени

$\mathbf{q}^{n+1}=\mathbf{q}^n+\Delta\mathbf{q}$ где $\Delta q=\Delta q^{(1)}+\Delta q^{(2)}$

Что соответствует членам $\tau\dfrac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}$ и $1/2\tau^2\dfrac{\partial^2\mathbf{q}}{\partial t^2}$ в разложении $\mathbf{q}(t+\tau)$,

введя обозначения

$$Q=\frac{\partial q_2}{\partial t}n_x+\frac{\partial q_3}{\partial t}n_y+\frac{\partial q_4}{\partial t}n_z$$

$$F^i=\frac{\partial q_2}{\partial t}\tau_{ix}+\frac{\partial q_3}{\partial t}\tau_{iy}+\frac{\partial q_4}{\partial t}n_{iz}$$

Получим систему

$$\Delta\rho^{(1)}=\tau(\frac{\partial q_1}{\partial t}-a^{-1}Q)$$

$$\Delta(\rho U_{\tau 1})^{(1)}=\tau(F^1-a^{-1}U_{\tau 1}Q)$$

$$\Delta(\rho U_{\tau 2})^{(1)}=\tau(F^2-a^{-1}U_{\tau 2}Q)$$

$$\Delta e^{(1)}=\tau(\frac{\partial q_5}{\partial t}-a^{-1}(a^2/(\gamma-1)+1/2q^2)Q)$$

Обозначим

$$R^i = (\tau \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{q}_{(2,3,4)})$$

$$Z = (\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{q}_{(2,3,4)})$$

Тогда

$$\Delta\rho^{(2)} = 1/2\tau^2(\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} - a^{-1}Z)$$

$$\Delta(\rho U_{\tau 1})^{(2)} = 1/2\tau^2(R^1 - a^{-1}U_{\tau 1}Z)$$

$$\Delta(\rho U_{\tau 2})^{(2)} = 1/2\tau^2(R^2 - a^{-1}U_{\tau 2}Z)$$

$$\Delta e^{(2)} = 1/2\tau^2(\frac{\partial^2}{\partial t^2}q_5 - a^{-1}(a^2/(\gamma-1) + 1/2q^2)Z)$$

Выражения для $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{t}}$ и $\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2}$ используем из расчета области Ω, с учетом, что рассматривается все в касательной плоскости. Вводится дополнительная система координат и пересчитываются необходимые величины, включая производные, для решения уравнений в касательной плоскости.

После выполнения всех преобразований, получаем

$\mathbf{q}^{\square} = (\rho, \rho U_{\tau 1}, \rho U_{\tau 2}, e)$,окончательно имеем

$$u = U_{\tau 1}\tau_{1x} + U_{\tau 2}\tau_{2x}$$

$$v = U_{\tau 1}\tau_{1y} + U_{\tau 2}\tau_{2y}$$

$$w = U_{\tau 1}\tau_{1z} + U_{\tau 2}\tau_{2z}$$

Этим завершается вычисление вектора $\mathbf{q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e)$ на поверхности тела.

Аналог подобного алгоритма для двумерного случая был предложен в работе [2] , в трехмерном случае эффективность этого подхода подтвердилась.

Уравнения на внешней границе

При определении значений газодинамических величин на внешней границе используется подход, описанный в [3],[4], основанный на использовании приведенных уравнений Эйлера к диагональному виду.
Запишем уравнения Эйлера в следующем виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} = 0$$
$$\mathbf{U} = (\rho, u, v, w, p)$$

A_j - матрицы Якоби

Повернем систему координат так, чтобы одно из направлений совпало с заданным направлением, например, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$.
Система уравнений Эйлера преобразуется

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + A\frac{\partial}{n}\mathbf{U} = F(\mathbf{U}, \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau})$$

В правой части F собраны члены с производными по направлениям, лежащим в касательной плоскости в точке, в которой задан вектор $\mathbf{n}$.
Нас интересует матрица A .

$A = n_x A_1 + n_y A_2 + n_z A_3$ -это пучок матриц.

Существует такое преобразование, что $T^{-1}AT = \Lambda$ где T неособенная матрица, Λ -диагональная матрица из собственных значений матрицы A.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{U}$$
$$\lambda_4 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{U} + c(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{1/2}$$
$$\lambda_5 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{U} - c(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})^{\mathbf{1/2}}$$

Если $\mathbf{n}$ -единичная нормаль, направленная внутрь области, то

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = U$$
$$\lambda_4 = U + c$$
$$\lambda_5 = U - c$$

где c скорость звука

Матрицы T и T^{-1} могут иметь следующий вид

$$T = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & \frac{\rho}{\sqrt{2}c} & \frac{\rho}{\sqrt{2}c} \\ 0 & -n_z & n_y & \frac{n_x}{\sqrt{2}} & -\frac{n_x}{\sqrt{2}} \\ n_z & 0 & -n_x & \frac{n_y}{\sqrt{2}} & -\frac{n_y}{\sqrt{2}} \\ -n_y & n_x & 0 & \frac{n_z}{\sqrt{2}} & -\frac{n_z}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho c}{\sqrt{2}} & \frac{\rho c}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} n_x & 0 & n_z & -n_y & -\frac{n_x}{c^2} \\ n_y & -n_z & 0 & n_x & -\frac{n_y}{c^2} \\ n_z & n_y & -n_x & 0 & -\frac{n_z}{c^2} \\ 0 & \frac{n_x}{\sqrt{2}} & \frac{n_y}{\sqrt{2}} & \frac{n_z}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}\rho c} \\ 0 & -\frac{n_x}{\sqrt{2}} & -\frac{n_y}{\sqrt{2}} & -\frac{n_z}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}\rho c} \end{pmatrix}$$

Матрица T состоит из собственных векторов матрицы A .
Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n} = F \qquad \text{где} \qquad \Phi = T^{-1}\mathbf{U}$$

Характеристические переменные Φ_i вычисляются по значениям $\mathbf{U}$ во внутренних узлах сетки для $\lambda_i \le 0$ методом экстраполяции по внутренним точкам области Ω, а для $\lambda_i \ge 0$ Φ_i вычисляются по параметрам набегающего потока.

Окончательно получим

$$\mathbf{U} = T\Phi$$

Заключение

Согласно данному алгоритму была написана и отлажена программа на многопроцессорной машине rsc4. В программе предусмотрена возможность расчетов на любом числе процессов, В качестве тестов использовалось

а) Обтекание кругового цилиндра со сравнением с результатами работы [2]

б) Обтекание крыла сравнивалось с аналогичными расчетами, проведенными по программам Луцкого А.Е.

Результаты обтекания цилиндра были тождественны, результаты обтекания крыла дали хорошее совпадение.

В продолжении данной работы предполагается, что уравнения на внешней границе, основанные на характеристических соотношениях, в самом ближайшем будущем будут заменены на граничные условия дальнего поля, разработанные в работе [6] и реализованные для задач трансзвукового обтекания в работах [7], [8].

Литература

[1] Rizzi A.W.,Erikson L.E. Computation of the flow around wings based on the Euler equations. J.Flaid. Mech. v. 148, 1984, 45-71.

2.Софронов И.Л. Быстросходящийся метод решения уравнений Эйлера. ЖВМ. и МФ, том 31,1991, 575-591.

3.Кенцер Ч. Дискретизация граничных условий на движущихся разрывах. Числ. методы в механ. Жидкостей. М. Мир,1973, 62-72.

4.Русанов В.В., Нажесткина Э.И. Разностная аппроксимация вблизи границ для гиперболических систем квазилинейных уравнений. Препринт №32, ИПМ им.М.В.Келдыша АН СССР,1980.

5.Воскресенский Г.П., Луцкий А.Е., Нажесткина Э.И. Численный метод расчета дозвукового обтекания летательных аппаратов невязким газом.Препринт №105, ИПМ им.М.В.Келдыша РАН,1996.

6.Софронов И.Л. Нелокальные искусственные граничные условия для задач трехмерного стационарного обтекания. Матем. Модел. Т.10,№9,1998,64-86.

7.Нажесткина Э.И., Софронов И.Л. Численная реализация граничных условий дальнего поля для задач транзвукового аэродинамического обтекания. Препринт №93 ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2001.

8.Нажесткина Э.И. Численное исследование нелокальных граничных условий дальнего поля для задач дозвукового обтекания. Препринт №50 ИПМ им.М.В.Келдыша РАН,2006.