



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 59 за 2008 г.



Галанин М.П., Лотоцкий А.П.,
Родин А.С.

Математическое
моделирование
электромагнитного
ускорения лайнера с учетом
его контакта с твердой
поверхностью

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Родин А.С. Математическое моделирование электромагнитного ускорения лайнера с учетом его контакта с твердой поверхностью // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2008. № 59. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2008-59>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша

М. П. Галанин, А. П. Лотоцкий, А. С. Родин

**Математическое моделирование электромагнитного ускорения
лайнера с учетом его контакта с твердой поверхностью**

Москва – 2008

Аннотация

Работа посвящена моделированию электромагнитного ускорения и торможения лайнера в устройстве обострения мощности. Рассмотрено двумерное приближение, соответствующее сечению исходной пространственной области продольной плоскостью. В модели учтен контакт лайнера с опорами, расположенными в торцевых частях ускорителя. Используются условие прилипания лайнера к опоре и условие скольжения лайнера по опоре. Приведены результаты расчетов. Выполнен сравнительный анализ двух моделей контакта.

M.P. Galanin, A.P. Lototskii, A.S. Rodin

**The mathematical simulation of the electromagnetic acceleration of a liner
with account of its contact with a solid surface**

Abstract

The work is aimed to the modeling of electromagnetic acceleration and breaking of liner in device of intensification of power. The 2D approach is discussed, corresponding to the cross-section of spatial region by the longitudinal plane. The contact between the liner and the support block situated at the front end of the device is considered. The adhesion condition and the slip condition are used for the contact simulation. The calculation results are demonstrated, two contact models are compared.

Содержание

1. Постановка задачи и физическая модель
 2. Математическая модель
 3. Метод численного решения
 4. Физические параметры
 5. Результаты расчетов
 6. Заключение
- Литература

1. Постановка задачи и физическая модель

Установка «МОЛ» («Магнитное обжатие лайнеров») предназначена для исследования работы всех ступеней модуля установки «Байкал» и генерации электрического импульса мегаджоульного уровня. Для установки «МОЛ» [1,2] разработан макет усилительного каскада мощности (магнитный компрессор – МК), работа которого основана на сжатии магнитного потока лайнером, ускоренным электродинамическими силами до скорости 0.8 км/с. Принцип работы усилителя аналогичен принципу работы взрывомагнитного генератора [3], однако разгон лайнера осуществляется электромагнитными силами. Элементы устройства показаны на рис. 1.1А. На рис. 1.1Б указано направление протекания токов, направление ускорения и конфигурация ускоряющего магнитного поля.

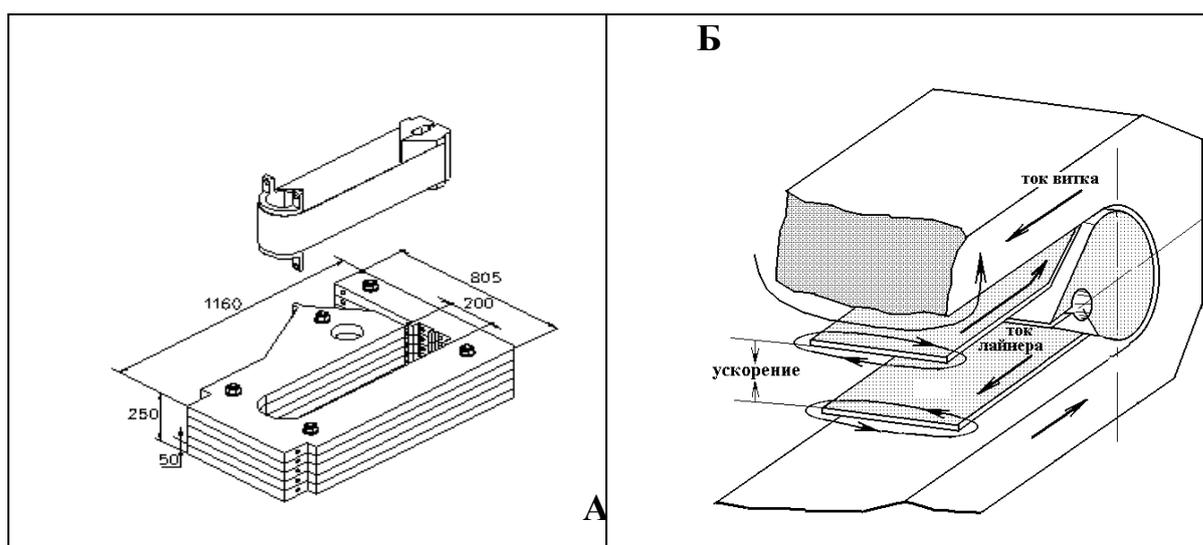


Рис. 1.1. Эскиз основных деталей генератора тока и продольное сечение собранного устройства: А - ускоряемая плоская лента с натяжным устройством и виток индуктора магнитного поля; Б - поперечное сечение генератора в собранном виде, указано направление протекания токов, направление ускорения и конфигурация ускоряющего магнитного поля.

Магнитный компрессор работает следующим образом (рис. 1.2). В начальный момент времени конденсатор в цепи индуктора заряжен до некоторого начального напряжения. После замыкания цепи по индуктору (и лайнеру) начинает течь разрядный ток. Созданное им в канале ускорителя магнитное поле взаимодействует с протекающим по лайнеру током, ускоряя лайнер в направле-

нии от индуктора. В некоторый момент времени (возможно, нулевой) замыкается и цепь лайнера. Ток этой цепи протекает по лайнеру и создает внутри полости лайнера дополнительное магнитное поле. Ускорившись, лайнер сжимает это поле, которое окончательно выводится из системы в виде импульса тока в цепи лайнера.

В процессе ускорения лента лайнера ложится на наклонную поверхность призм (см. рис.1.1.), расположенных в торцевых частях компрессора. Призмы использованы для ограничения деформации ленты и предотвращения ее обрыва.

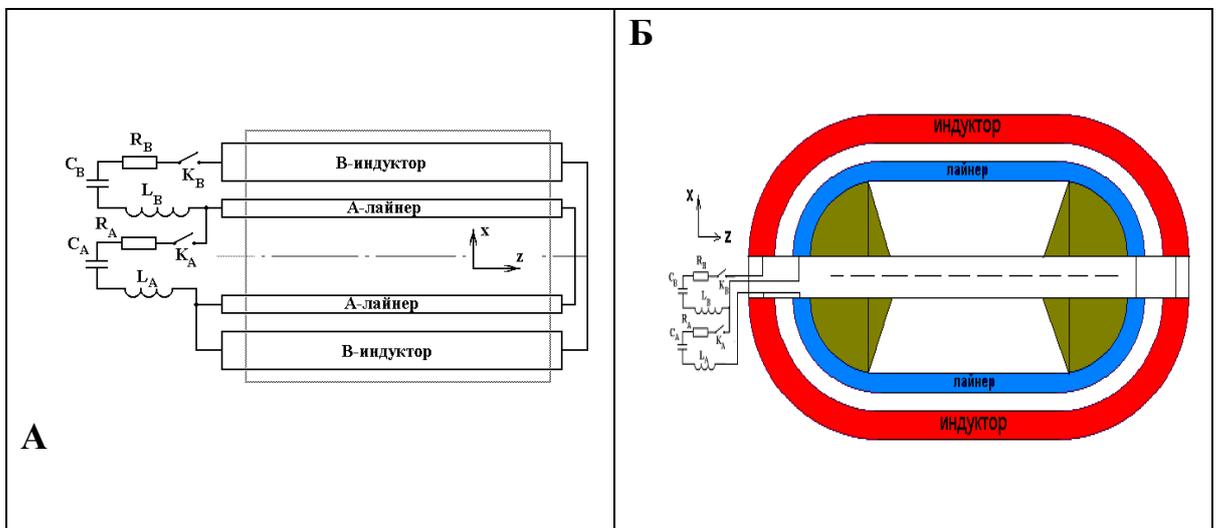


Рис. 1.2. Характерная схема сечения плоскостью $y = \text{const}$ пространственной области, в которой решается задача (в рамке) и электротехнические цепи устройства: А – задача без учета призм; Б – задача с учетом призм

Для изучения протекающих явлений рассмотрим два двумерных приближения. Сечение исходной пространственной области плоскостью $z = \text{const}$ подробно обсуждено в работах [3, 4]. Там построена и проанализирована так называемая «поперечная» модель, в которой искомые величины зависят от (x, y, t) . В данной работе рассмотрено сечение исходной пространственной области плоскостью $y = \text{const}$. Соответствующую модель будем называть продольной.

В случае продольной модели рассмотрено два варианта торцевых (находящихся вблизи границ по z) областей устройства. В первом выбрана область, изображенная на рис.1.2.А. Полученные результаты изложены в [5]. В расчетах [5] не учитывался контакт лайнера с призмой. Во втором варианте рас-

смотрена расчетная область рис. 1.2.Б. Для изображения коммутации внешних цепей в центре рисунка расположена искусственная прямоугольная подо-
 ласть.

В продольной модели все величины зависят только от координат x , z и времени t . Это означает формально бесконечную протяженность системы в на-
 правлении оси y . Однако в модели учтена и некая "эффективная" длина систе-
 мы в y - направлении, в значительной степени определяющая процесс перекач-
 ки энергии из внешней электрической цепи в кинетическую энергию лайнера.

Индуктор предполагается неподвижным. Его форма остается неизменной, материал индуктора является проводником. Лайнер подвижен, его положение подлежит расчету в зависимости от протекающих процессов. Считаем, что ма-
 териал лайнера представляет собой упругое твердое тело.

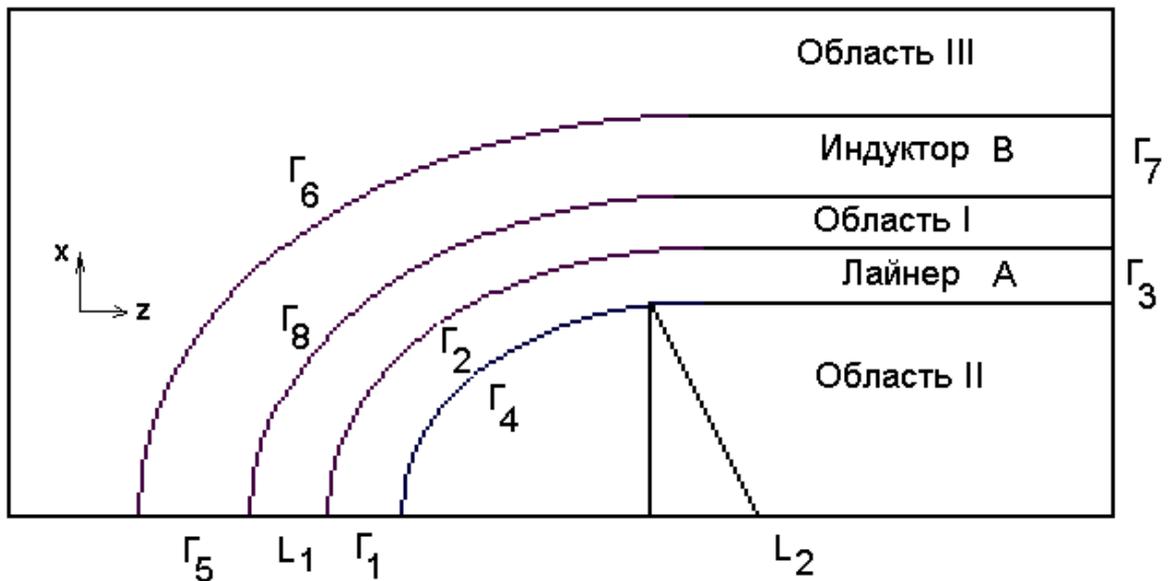


Рис. 1.3. Характерная схема четверти сечения пространственной области плоскостью $y = \text{const}$, в которой решается продольная задача.

Продольное сечение в рассматриваемом приближении имеет две плоскости симметрии. Поэтому в дальнейшем задача решается в одной четверти исходной области, которая схематично изображена на рис. 1.3.

Цель данной работы состоит в математическом моделировании электро-
 магнитного ускорения и торможения лайнера с учетом контакта с опорой. При

этом необходимо исследовать поведения лайнера для различных параметров задачи и различных моделей контакта.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 06 – 01 – 00421).

2. Математическая модель

2.1. Электродинамическая часть

Электродинамическая часть модели основана на системе уравнений Максвелла в квазистационарном приближении (см. [6])

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}([\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - \mathbf{E}),$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\sigma \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{j}, \tag{2.1}$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Здесь σ - электропроводность, \mathbf{E} и \mathbf{H} - напряженности электрического (в системе координат, в которой вещество покоится) и магнитного полей, \mathbf{j} - плотность тока, \mathbf{v} - вектор скорости движения лайнера. В рассматриваемом двумерном приближении векторные переменные имеют следующий вид: $\mathbf{H} = (0, H, 0)^T$, $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)^T$, $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)^T$, то есть векторы скорости, напряженности электрического поля и плотности тока лежат в плоскости рис. 1.3, а вектор напряженности магнитного поля направлен перпендикулярно плоскости рис. 1.3. Это означает, что в системе имеет место электромагнитное поле ТМ типа.

В используемом приближении можно выразить напряженность магнитного поля в диэлектрике через значения полных токов, которые протекают через проводники. Суперпозиция магнитного поля, созданного током I_B , текущим по индуктору, и поля, созданного током $(I_A - I_B)$, текущим по лайнеру, дает следующий результат:

$$H = \begin{cases} -\frac{4\pi}{l_y} I_B, & \vec{r} \in I \\ -\frac{4\pi}{l_y} I_A, & \vec{r} \in II \\ 0, & \vec{r} \in III \end{cases} \quad (2.2)$$

Подобласти I, II, III показаны на рис. 1.3.

Для получения уравнения, описывающего поле H в проводниках, выразим из второго уравнения (2.1) напряженность магнитного поля и подставим в первое уравнение. В итоге приходим к уравнению:

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{4\pi\sigma} \operatorname{grad}H\right) - H \operatorname{div}\vec{v} = \frac{dH}{dt}, \quad (2.3)$$

в котором используется полная производная по времени (см. [7])

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + (\vec{v} \operatorname{grad})H.$$

Выберем следующие начальное и граничные условия:

$$H(x, z, 0) = 0,$$

$$H|_{\Gamma_2, \Gamma_8} = -\frac{4\pi}{l_y} I_B, \quad H|_{\Gamma_4} = -\frac{4\pi}{l_y} I_A, \quad \frac{\partial H}{\partial x}|_{\Gamma_1, \Gamma_5} = \frac{\partial H}{\partial z}|_{\Gamma_3, \Gamma_7} = H|_{\Gamma_6} = 0,$$

здесь $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ - границы лайнера, $\Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$ - границы индуктора (см. рис. 1.3).

2.2. Уравнения внешних электрических цепей

Параметры внешних электрических цепей предполагаются сосредоточенными, так что для описания цепей можно применять уравнения Кирхгофа [8]. Они являются следствием интегрирования первого уравнения (2.1) по плоскости и контуру данных цепей. После применения формулы Стокса в уравнениях появятся интегралы по границе области. В итоге уравнения для внешней электрической цепи индуктора имеют следующий вид:

$$L_B I_{B,t} + R_B I_B - U_B - 2 \int_{L_1} E_x dx = 0 \quad \text{или} \quad (2.4)$$

$$L_B I_{B,t} + \frac{8\pi}{l_y} (S_I I_B)_{,t} + R_B I_B - U_B + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2\pi\sigma} \left(-\frac{\partial H}{\partial z} dx + \frac{\partial H}{\partial x} dz \right) -$$

$$- \int_{\Gamma_8} \frac{1}{2\pi\sigma} \left(-\frac{\partial H}{\partial z} dx + \frac{\partial H}{\partial x} dz \right) = 0,$$

$$C_B U_{B,t} = -I_B.$$

Второе уравнение (2.4) получается из первого, если выразить интеграл по границе диэлектрика через интегралы по границам проводников с помощью первого уравнения (2.1). Коэффициент 2 появился вследствие учета симметрии области.

Аналогичные уравнения для цепи лайнера (S_I и S_{II} - площади соответствующих областей) записываются в виде:

$$L_A I_{A,t} + R_A I_A - U_A - 2 \int_{L_2} E_z dz = 0 \text{ или}$$

$$L_A I_{A,t} + \frac{8\pi}{l_y} (S_{II} I_A)_{,t} + R_A I_A - U_A + \int_{\Gamma_4} \frac{1}{2\pi\sigma} \left(-\frac{\partial H}{\partial z} dx + \frac{\partial H}{\partial x} dz \right) = 0, \quad (2.5)$$

$$C_A U_{A,t} = -I_A.$$

В уравнениях (2.4)-(2.5) L, R, C - индуктивность, сопротивление и емкость в цепи соответственно, I и U - сила тока в цепи и напряжение на обкладках конденсатора (A - в цепи лайнера, B - индуктора).

Задача замыкается выбранными начальными значениями для токов и напряжений.

2.3. Математическая модель термоупругого тела

Рассмотрим лайнер как изотропное сжимаемое термоупругое твердое тело ([7, 9]). Пусть ρ и ρ_0 - текущая и начальная плотность материала лайнера, x_i и a_i - эйлеровы и лагранжевы переменные, $u_i = x_i - a_i$ - компоненты вектора перемещения ($i = 1, 2, 3$ в общем случае, в данном - до 2: $x_1 = x, x_2 = z$). В дальнейшем будем использовать уравнения движения в лагранжевых переменных.

Тензор деформации и два его первых инварианта имеют вид:

$$\gamma_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial a_l} + \frac{\partial u_l}{\partial a_k} + \frac{\partial u_m}{\partial a_k} \frac{\partial u_m}{\partial a_l} \right), \quad I_1 = \gamma_{ii}, \quad I_2 = \gamma_{ij} \gamma_{ij}.$$

Здесь использовано правило суммирования по повторяющимся индексам.

В процессе движения возникают значительные растяжения лайнера, поэтому в тензоре деформации учтены квадратичные слагаемые.

Уравнение движения в форме Лагранжа записывается в форме:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial a_j} + \rho_0 / \rho F_i, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{F} = [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ - сила Лоренца, действующая на тело, L_{ij} - тензор напряжений

Лагранжа. Для линейно-упругой среды он задается следующим выражением (более подробно см. [5, 9]):

$$L_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial a_k} (2\mu \gamma_{kj} + (\lambda I_1 - \beta(T - T_0)) \delta_{kj}),$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе, $\beta = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T$, α_T - коэффициент линейного теплового расширения.

Поставим начальные условия

$$u_i(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad v_i(\mathbf{r}, 0) = 0$$

и граничные условия

$$v_x = v_1 = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad v_z = v_2 = 0 \text{ на } \Gamma_3, \quad L_{ij} N_i = 0$$

на всей границе лайнера (N_i - нормаль в лагранжевых переменных).

Уравнение энергии в терминах энтропии представимо в виде:

$$\rho_0 T \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a_i} (k(T) \frac{\partial T}{\partial a_i}) + \rho_0 / \rho \phi, \quad (2.7)$$

здесь S - энтропия на единицу массы, $k(T)$ - коэффициент теплопроводности, $\phi = (\mathbf{jE})$ - мощность тепловыделения.

Уравнение (2.7) можно также записать в виде уравнения теплопроводности:

$$\rho_0 c_\gamma \frac{\partial T}{\partial t} + \beta T \frac{\partial I_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a_i} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial a_i} \right) + \rho_0 / \rho \phi, \quad (2.8)$$

где c_γ – удельная объемная теплоемкость при постоянной деформации.

Дополним его начальным и граничными условиями

$$T(\mathbf{r}, 0) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial a_k} N_k = 0.$$

2.4 . Моделирование контакта лайнера с призмой

Главный интерес в модели представляет описание контакта лайнера с подставкой, которая используется в существующей лабораторной установке для предотвращения разрыва ленты лайнера.

При моделировании первоначально ставилось условие прилипания лайнера к поверхности опоры, т.е. принималось, что в точках касания $v_x = v_z = 0$. Проведенные расчеты показали, что в такой постановке задачи часть лайнера, расположенная на цилиндрической части опоры, остается практически неподвижной и не растягивается. Ниже будут приведены результаты для одного из подобных расчетов.

В дальнейшем использовалось условие скольжения: в точке контакта нормальная составляющая скорости лайнера и сила, действующая по направлению касательной к поверхности опоры, равны нулю. При этом не учитывается трение ленты о поверхность. Соответствующие уравнения в декартовой системе координат имеют вид:

$$\vec{v} \cdot \vec{N} = v_x N_x + v_z N_z = 0, \quad (L_{ij} N_j) \tau_i = 0, \quad (2.9)$$

где \vec{N} - вектор нормали к поверхности, а $\vec{\tau}$ - касательный вектор (в лагранжевых координатах).

Если подставить в (2.9) выражение для тензора напряжений, то получится очень громоздкое выражение, с которым неудобно работать. Поэтому в точках контакта вводится новая система координат $\xi O \eta$, которая получается поворо-

том старой системы координат xOz на угол α такой, что ось $O\xi$ направлена по нормали к поверхности опоры, а ось $O\eta$ - по касательной к ней (см. рис. 2.1).

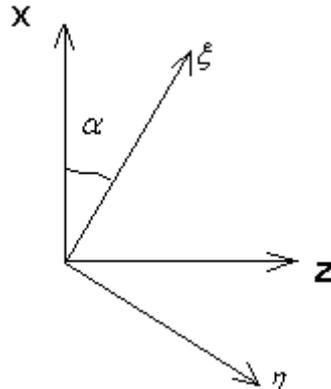


Рис. 2.1. Новая система координат

Формулы преобразования координат имеют форму:

$$\cos \alpha = N_x, \quad \sin \alpha = N_z,$$

$$\xi = \cos \alpha x + \sin \alpha z, \quad \eta = -\sin \alpha x + \cos \alpha z, \quad (2.10)$$

$$x = \cos \alpha \xi - \sin \alpha \eta, \quad z = \sin \alpha \xi + \cos \alpha \eta.$$

В новой системе координат условия контакта принимают более компактный вид:

$$v_\xi = 0, \quad L_{\eta\xi} = 0.$$

2.5. Энергетические соотношения

Более подробно вывод этих формул изложен в [5]. В данном разделе приведены только основные соотношения.

Баланс электромагнитной энергии в области, соответствующей половине исходного сечения:

$$\frac{d}{dt} \int_G \frac{1}{8\pi} H^2 dS + \int_G \sigma (E_x^2 + E_z^2) dS + \frac{2}{l_y} (I_A \int_{L_2} E_x dx + I_B \int_{L_1} E_x dx) + \int_G F_i v_i dS = 0. \quad (2.11)$$

Закон изменения энергии в цепи:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_A I_A^2 + L_B I_B^2 + C_A U_A^2 + C_B U_B^2) + R_A I_A^2 + R_B I_B^2 - 2I_A \int_{L_2} E_x dx - 2I_B \int_{L_1} E_x dx = 0. \quad (2.12)$$

Сложив уравнения (2.11) и (2.12), запишем закон изменения электромагнитной энергии во всей системе, включая внешнюю цепь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_y} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_A I_A^2 + L_B I_B^2 + C_A U_A^2 + C_B U_B^2) + R_A I_A^2 + R_B I_B^2 \right] + \\ & + \frac{d}{dt} \int_G \frac{1}{8\pi} H^2 dS + \int_G \sigma (E_x^2 + E_z^2) dS + \int_G F_i v_i dS = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Баланс механической и внутренней энергии (U – внутренняя энергия на единицу массы) задается выражением (см. [5]):

$$\frac{d}{dt} \int_G \frac{1}{2} \rho v_i^2 dS + \frac{d}{dt} \int_G \rho U dS - \int_G F_i v_i dS - \int_G \phi dS = 0. \quad (2.14)$$

Если сложить (2.13) и (2.14), учитывая $\phi = \sigma E^2$, то получим закон изменения полной энергии системы:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_y} \left[\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_A I_A^2 + L_B I_B^2 + C_A U_A^2 + C_B U_B^2) + R_A I_A^2 + R_B I_B^2 \right] + \frac{d}{dt} \int_G \frac{1}{8\pi} H^2 dS + \\ & + \frac{d}{dt} \int_G \frac{1}{2} \rho v_i^2 dS + \frac{d}{dt} \int_G \rho U dS = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

3. Метод численного решения

Для численного решения применяем метод конечных элементов (МКЭ). Вводим в области треугольную сетку. Так как напряженность магнитного поля в диэлектрике выражается через токи, то ограничимся 2 сетками для 2 проводников, независимыми друг от друга. Поскольку лайнер движется, то точки соответствующей сетки двигаются вместе с веществом. Разыскиваем неизвестные величины, используя следующие базисы: стандартные кусочно-линейные функции φ_i и кусочно-постоянные функции ψ_i , определенные на ячейках Дирихле (см. [10]). Тогда

$$\hat{H}^{I1}(x, z) = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \varphi_i \quad \text{или} \quad \hat{H}^{I2}(x, z) = \sum_{i=1}^N \hat{H}_i \psi_i,$$

где \hat{H}_i - значение функции с верхнего слоя по времени в i -й точке.

Напряженность магнитного поля, температура и обе составляющие скорости заданы в узлах сетки, а напряженность электрического поля и плотность тока постоянны в пределах каждого сеточного треугольника.

Процесс нахождения решения задачи на каждом временном слое состоит из последовательного выполнения итерационных циклов для группы электродинамических уравнений, группы уравнений, описывающих движение лайнера, и уравнения теплопроводности. Кроме того, проводится цикл внешних итераций (для всей системы), по результатам которого и происходит переход на следующий временной слой.

3.1. Система конечномерных уравнений для напряженности магнитного поля в проводниках

Рассмотрим сначала область, занимаемую лайнером (обозначим ее S_1). В этой области справедливо уравнение (2.3). Если применить к нему метод Галеркина (см. [10]), то после несложных преобразований можно прийти к следующей дискретной задаче:

$$\sum_{j=1}^N \hat{H}_j \left(\int_{S_1} \frac{\tau}{4\pi\sigma} \text{grad}\varphi_j \cdot \text{grad}\varphi_i dS + \delta_{ij} \hat{s}_i \right) = H_i s_i \quad (3.1)$$

для всех i , соответствующих внутренним узлам, а также узлам на границах Γ_1 и Γ_3 . Здесь и далее \hat{s}_i, s_i - площади ячеек Дирихле на новом и старом слое соответственно. Значения искомой функции в узлах сетки на оставшихся границах задаются равенствами:

$$\hat{H}_i + \frac{4\pi}{l_y} \hat{I}_B = 0 \quad \text{на } \Gamma_2,$$

$$\hat{H}_i + \frac{4\pi}{l_y} \hat{I}_A = 0 \quad \text{на } \Gamma_4.$$

Аналогичную процедуру можно проделать для индуктора (соответствующую область обозначим S_2). В итоге получаем, что значения \hat{H}_i определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^N \hat{H}_j \left(\int_{S_2} \frac{\tau}{4\pi\sigma} \text{grad}\varphi_j \text{grad}\varphi_i dS + \delta_{ij} s_i \right) = H_{i,s_i} \quad (3.2)$$

для всех i , соответствующих внутренним узлам, а также узлам на границах Γ_5 и Γ_7 . Значения \hat{H}_i в оставшихся точках задаются равенствами:

$$\hat{H}_i = 0 \text{ на } \Gamma_6, \quad \hat{H}_i + \frac{4\pi}{l_y} \hat{I}_B = 0 \text{ на } \Gamma_8.$$

Итоговая система уравнений включает в себя системы (3.1), (3.2) и уравнения для значений функции в узлах, лежащих на границах $\Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6, \Gamma_8$. Также в нее входят выражения для токов, получаемые стандартной дискретизацией уравнений (2.4) и (2.5) с использованием неявной схемы (см. [11, 12]):

$$\begin{aligned} \hat{I}_B + \frac{\tau}{\delta_B} \sum_{j=1}^N \hat{H}_j \left[- \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2\pi\sigma} \left(- \frac{\partial\varphi_j}{\partial z} dx + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} dz \right) + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_8} \frac{1}{2\pi\sigma} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} dz \right] = \frac{1}{\delta_B} \left[(L_B + \frac{8\pi}{l_y} S_I) I_B + \tau U_B \right], \\ \hat{I}_A + \frac{\tau}{\delta_A} \sum_{j=1}^N \hat{H}_j \int_{\Gamma_4} \frac{1}{2\pi\sigma} \left(- \frac{\partial\varphi_j}{\partial z} dx + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} dz \right) = \frac{1}{\delta_A} \left[(L_A + \frac{8\pi}{l_y} S_{II}) I_A + \tau U_A \right], \end{aligned}$$

$$\text{где } \delta_A = L_A + \frac{8\pi}{l_y} S_{II} + \tau \left(R_A + \frac{\tau}{C_A} \right), \quad \delta_B = L_B + \frac{8\pi}{l_y} S_I + \tau \left(R_B + \frac{\tau}{C_B} \right).$$

3.2. Система конечномерных уравнений для уравнения движения

Движение лайнера описывается уравнением (2.6), которое можно записать в виде системы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = v_i,$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial a_j} + \rho_0' / \rho F_i. \quad (3.3)$$

Дискретизацию системы (3.3) проводим в терминах величины $\bar{v} = v^{(0.5)} = \frac{1}{2}(\hat{v} + v)$. При этом $u_t = v^{(0.5)}$. После нахождения решения происходит переход к искомому значению $\hat{v} = 2\bar{v} - v$. Ко второму уравнению системы (3.3) применяем метод Галеркина (см. [10]). В дальнейшем при выполнении итераций квадратичные слагаемые, входящие в выражение для тензора деформации, берем с предыдущей внутренней итерации. Для аппроксимации температуры в i -м треугольнике используется выражение $\theta_i = (T_k + T_m + T_n)/3 - T_0$ (усреднение по значениям в вершинах). Оно считается известным на данной внешней итерации.

В точках контакта лайнера с поверхностью опоры уравнения движения (2.6) записываются в новой системе координат, задаваемой соотношениями (2.9). Учитывая несложное преобразование

$$\begin{aligned} - \int_{S_1} \left(\frac{\partial L_{\eta\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial L_{\eta\eta}}{\partial \eta} \right) \varphi_i(\xi, \eta) dS &= - \int_{\partial S_1} L_{\eta\xi} \varphi_i(\xi, \eta) d\Gamma + \\ + \int_{S_1} \left(L_{\eta\xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + L_{\eta\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) dS &= \int_{S_1} \left(L_{\eta\xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + L_{\eta\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) dS, \end{aligned}$$

получаем следующие уравнения для граничных точек:

$$\bar{v}_\xi = 0, \quad \int_{S_1} \frac{2\rho_0}{\tau} \bar{v}_\eta \psi_i dS + \int_{S_1} \left(L_{\eta\xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + L_{\eta\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) dS = \int_{S_1} \left(\frac{2\rho_0}{\tau} v_\eta + F_\eta \right) \psi_i dS.$$

Для удобства делаем обратную замену координат, при этом учитываются равенства:

$$v_\xi = \bar{v} \bar{N} = v_x N_x + v_z N_z, \quad v_\eta = \bar{v} \bar{\tau} = -v_x N_z + v_z N_x,$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = N_x \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + N_z \frac{\partial \varphi_i}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} = -N_z \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + N_x \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}.$$

Введение одномерного массива V , такого, что $V_{2i-1} = \bar{v}_{x,i}$ (значение \bar{v}_x в i -м узле) и $V_{2i} = \bar{v}_{z,i}$ (значение \bar{v}_z в i -м узле), позволяет записать систему линейных уравнений в виде матричного уравнения (более подробно см. [5]) $AV = f$.

4. Физические параметры

Все расчеты проводятся в безразмерном виде. Для получения размерной величины f по безразмерной f^* ее необходимо умножить на масштабный коэффициент f_0 (см. [6]). Соответственно для получения безразмерной величины, задаваемой в программе, размерную величину нужно поделить на масштаб f_0 . Всюду далее звездочки у безразмерных величин опущены. Ниже даны масштабные коэффициенты для основных физических величин.

$$x_0 = 10 \text{ см} = 0.1 \text{ м.}$$

$$t_0 = 10^{-3} \text{ сек} = 1 \text{ мс.}$$

$$v_0 = x_0 / t_0 = 10^4 \text{ см/сек} = 0.1 \text{ км/сек} = 100 \text{ м/сек.}$$

$$\rho_0 = 4 \text{ г/см}^3.$$

$$m_0 = 4 \text{ кг} = 4 \cdot 10^3 \text{ г.}$$

$$T_0 = 200 \text{ град К.}$$

$$I_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ а} = 2 \text{ ма.}$$

$$U_0 = 20 \text{ в.}$$

$$R_0 = 10^{-5} \text{ ом.}$$

$$C_0 = 10^2 \text{ ф.}$$

$$L_0 = 10^{-8} \text{ гн.}$$

$$F_0 = 4 \cdot 10^5 \text{ н.}$$

Приведем физические параметры задачи, которые являются общими для всех вариантов расчетов.

Начальная температура $T = 1.45$. Начальная скорость лайнера равна нулю. Размеры конструкции в соответствии с рис. 1.3 (для одной четвертой части):

высота индуктора равна 1.5, его длина – 4, высота лайнера равна 0.02, расстояние между лайнером и индуктором по высоте в начальный момент времени равно 0.02. Радиус цилиндрической части опоры равен 0.96. Угол наклона призмы для всех вариантов расчета брался равным 30° .

Параметры материала индуктора взяты равными соответствующим величинам стали: плотность $\rho = 1.95$, теплоемкость $c_v = 9.21$, теплопроводность $\kappa = 1.998 \cdot 10^{-5}$, электропроводность $\sigma = 52.9$ при 0°C .

Параметры материала лайнера взяты равными соответствующим величинам алюминия: плотность $\rho = 0.63525$, теплоемкость $c_v = 18.037$, теплопроводность $\kappa = 1.035 \cdot 10^{-4}$, электропроводность $\sigma = 40.66$ при 0°C .

Для обоих материалов электропроводность взята в виде функции температуры вида $\sigma = \sigma_s / (1 + \alpha_{\sigma} T)$ с соответствующими параметрами из [13].

Параметры электрической цепи индуктора составили: индуктивность $L_B = 20.0$, емкость $C_B = 3.1 \cdot 10^{-5}$, сопротивление $R_B = 1.2 \cdot 10^2$.

Начальное напряжение на обкладках конденсатора взято равным 2000.0, начальный ток – нулевой.

Параметры электрической цепи лайнера составили: индуктивность $L_A = 2.5$, емкость $C_A = 1000$, сопротивление $R_A = 10^{-5}$.

Начальное напряжение и начальный ток равны нулю.

Во всех трех расчетах момент замыкания цепи лайнера $t_0 = 0.06$.

Число точек сетки в области лайнера составило 5264, при этом получено 8924 соответствующих треугольников. Аналогичные числа для области индуктора – 223/381.

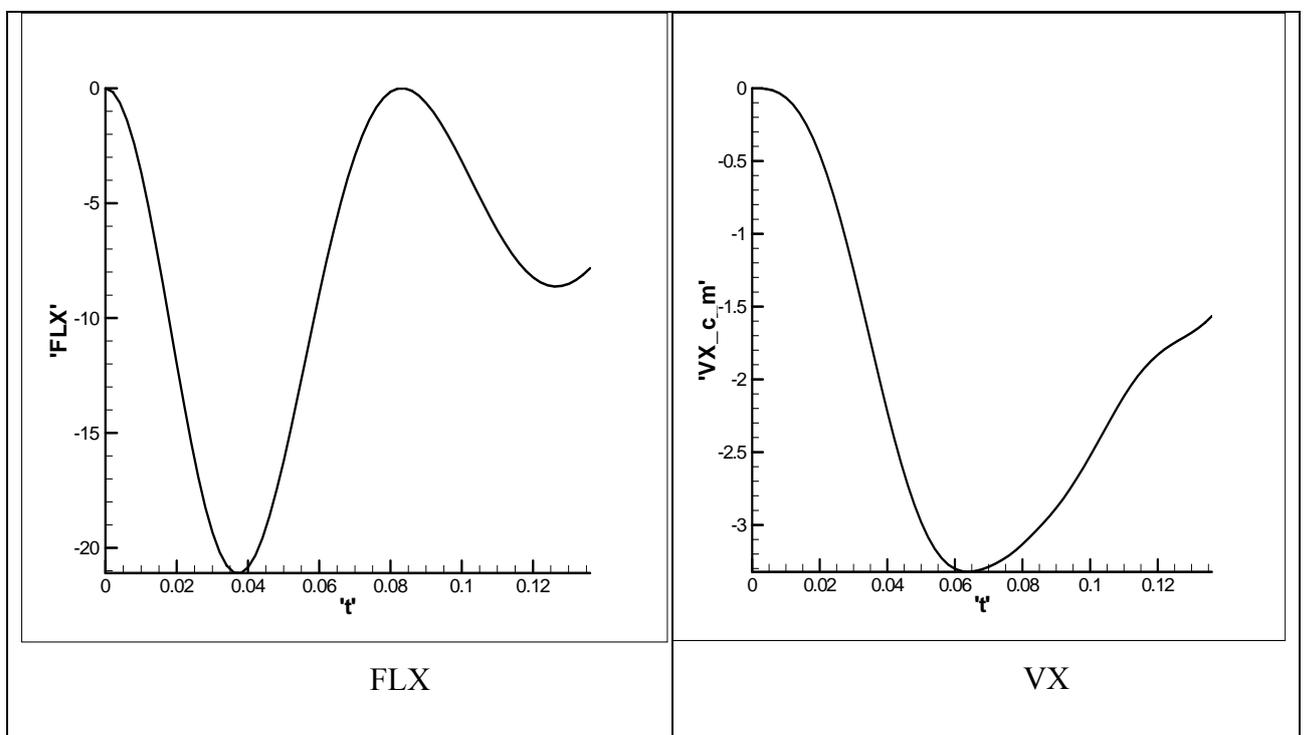
5. Результаты расчетов

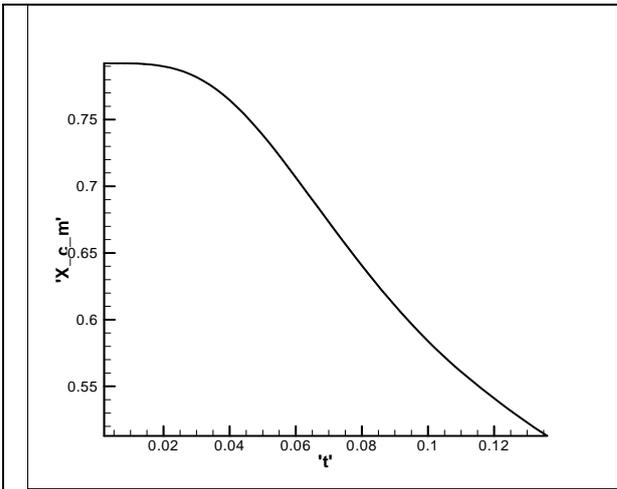
Ниже представлены результаты нескольких расчетов с разными наборами параметров.

5.1. Вариант 1

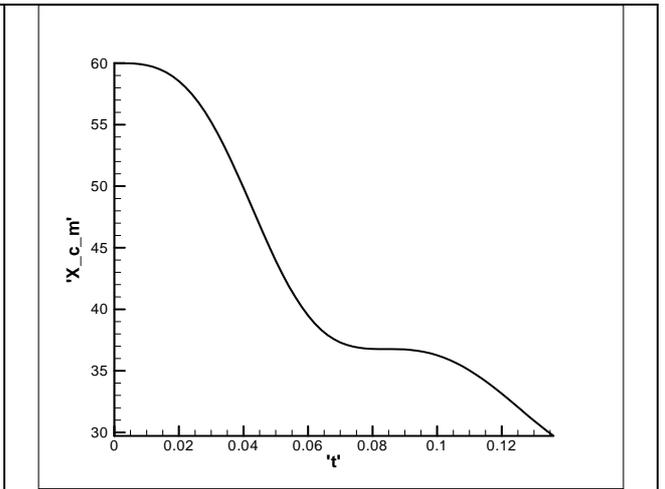
Длина ускоряемого лайнера по направлению $y - l_y = 3.0$. В качестве условия контакта лайнера и его опоры поставлено условие прилипания. Расчет продолжался до момента времени $t = 0.1360$, в который координата центра масс составила $x = 0.5$. Максимальная (по абсолютной величине) скорость центра масс лайнера за время ускорения составила $v_x = -3.3$, максимальная температура - $T = 2.3$, интегральная ускоряющая сила (в направлении x) изменялась от 0 до -21.1, ток в цепи индуктора изменялся в пределах от -1.29 до 2.02, напряжение на обкладках конденсатора в цепи индуктора менялось от -1455 до 2000.0.

На рис. 5.1 представлены графики сосредоточенной информации о расчете, характеризующие процесс в целом. Это, соответственно (слева направо, сверху вниз), зависимости от времени интегральной силы (силы Лоренца, проинтегрированной по площади лайнера), скорости центра масс лайнера, координаты центра масс лайнера, полной энергии, напряжения и силы тока в цепи лайнера и в цепи индуктора.

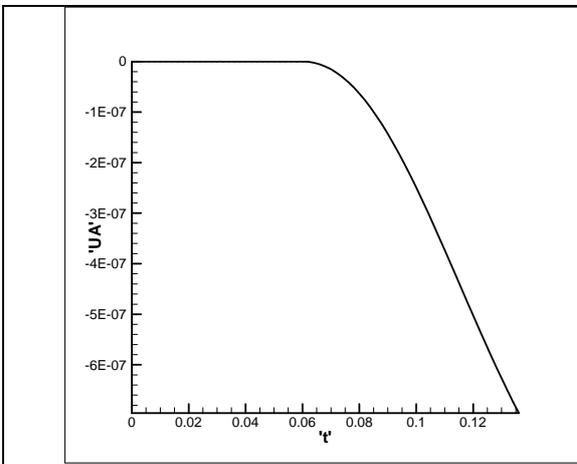




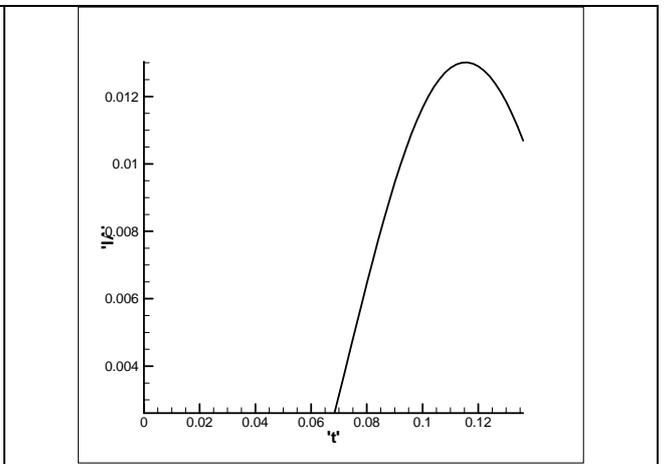
X центра масс



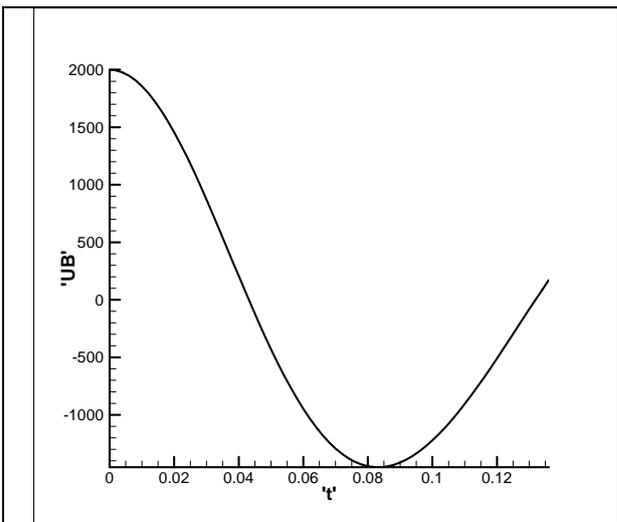
Energy



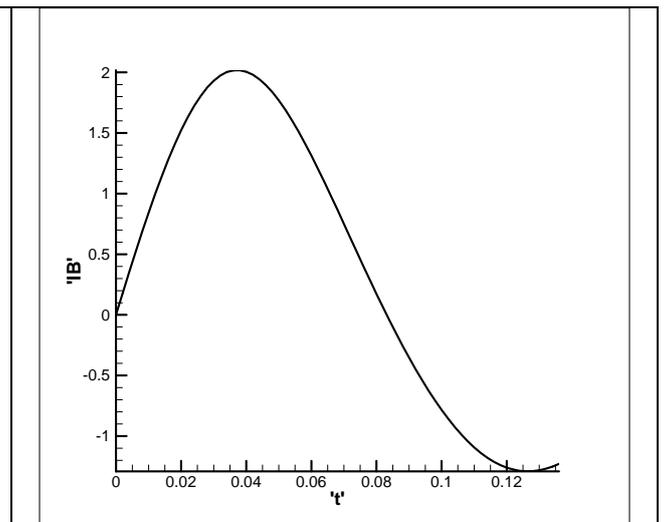
UA



IA



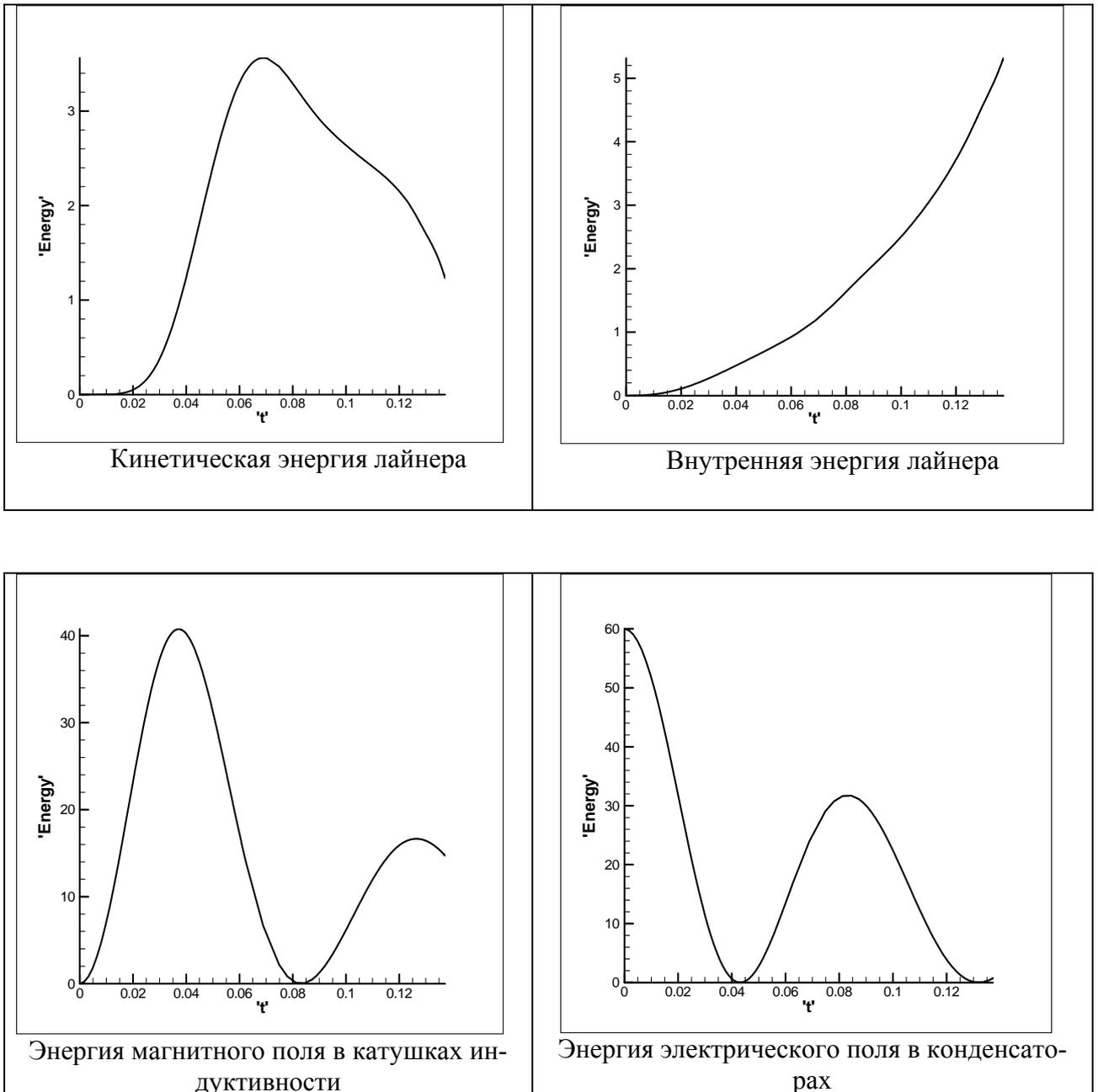
UB



IB

Рис. 5.1. Графики сосредоточенной информации

На рис. 5.2 представлены графики зависимостей энергии от времени. Это, соответственно (слева направо, сверху вниз), зависимости внутренней и кинетической энергии лайнера, энергии магнитного поля в катушках индуктивности, энергии электрического поля в конденсаторах во внешних цепях и энергии магнитного поля в ускорителе. Сумма всех перечисленных энергий составляет полную энергию, график которой представлен на рис. 5.1.



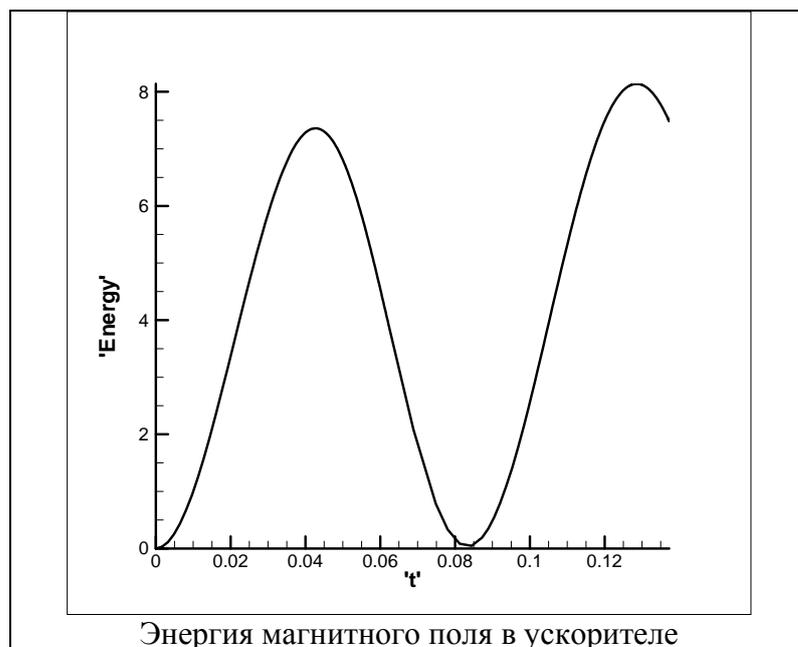
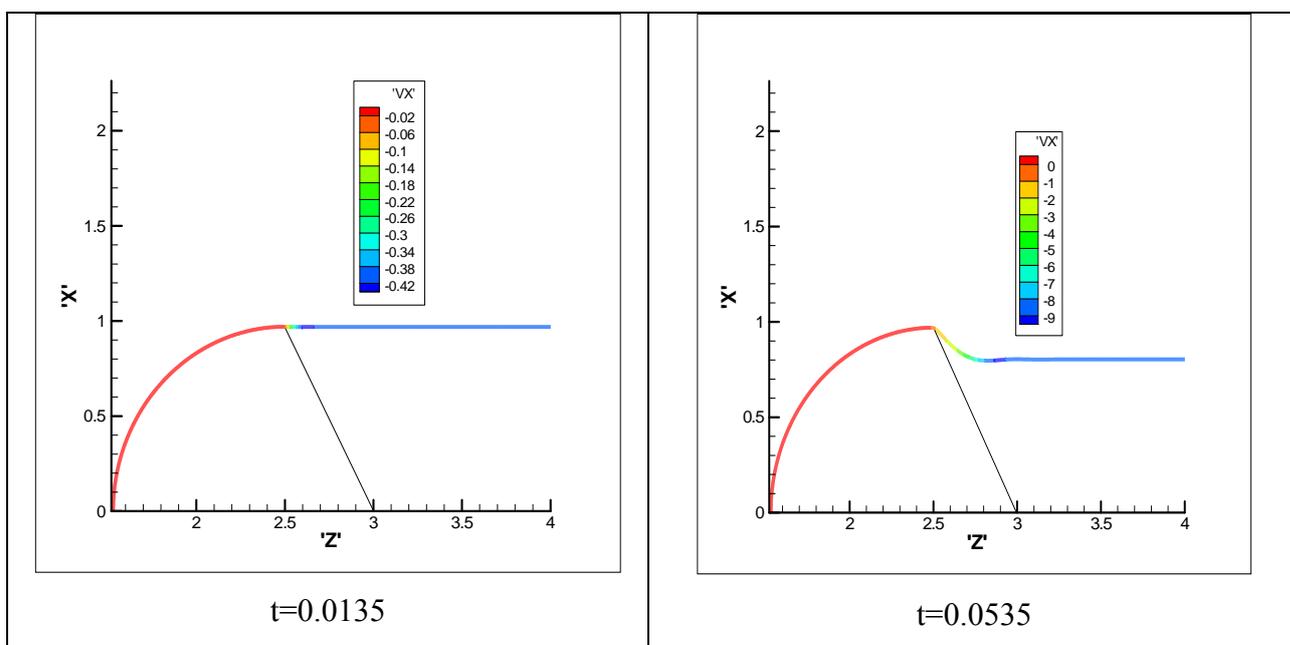
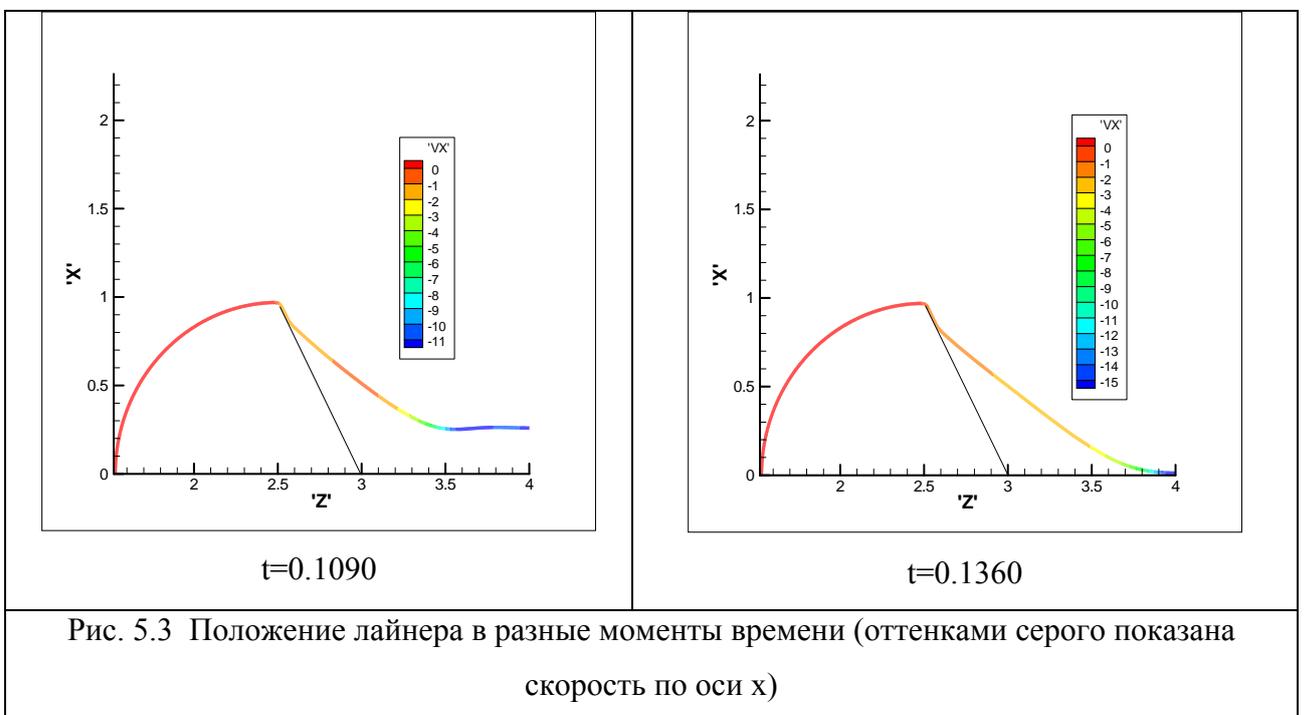
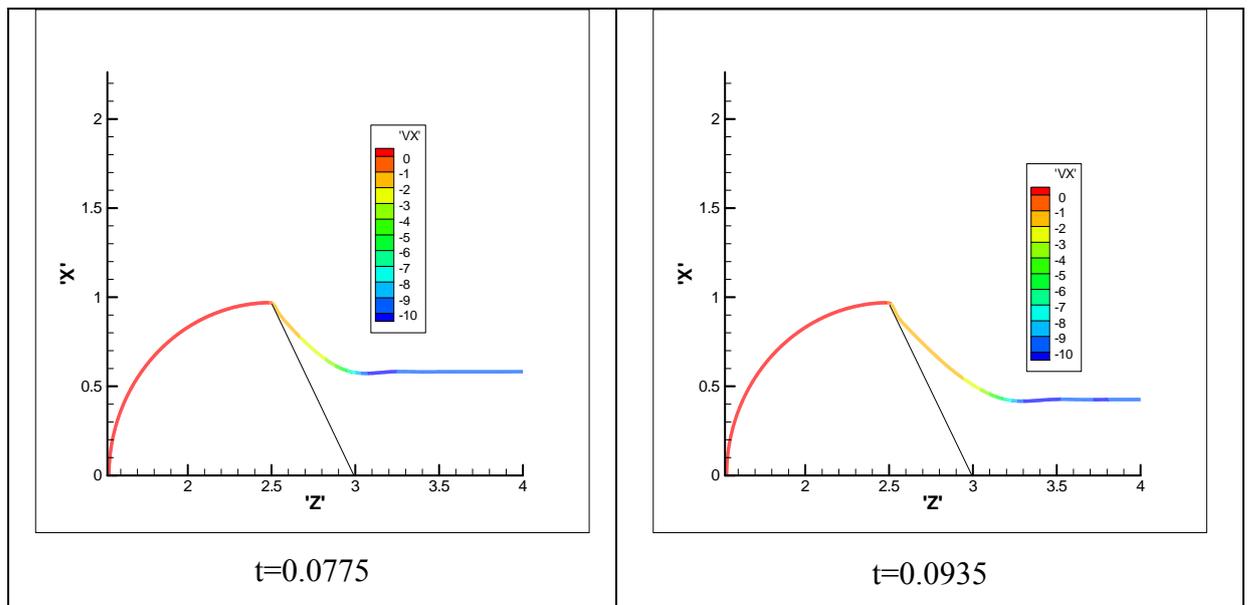


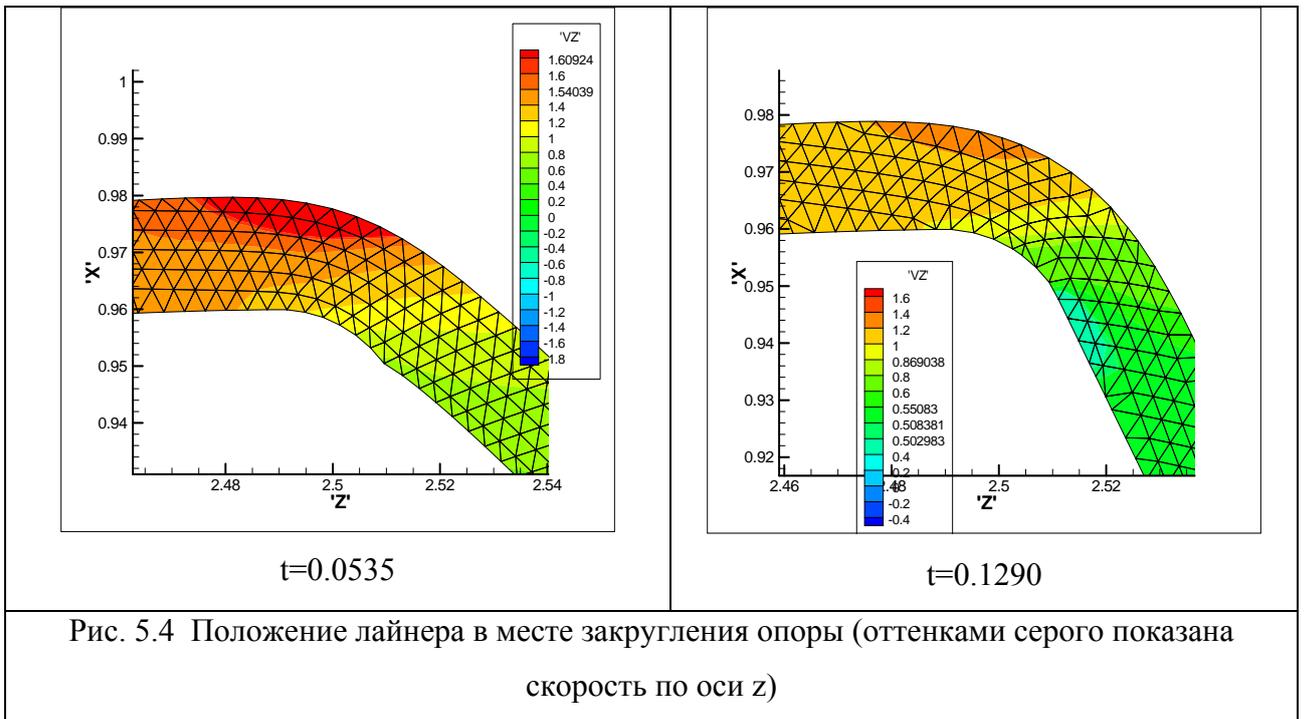
Рис. 5.2 Графики зависимостей энергии от времени

На рис. 5.3 показано положение лайнера в разные моменты времени. Из приведенных графиков видно, что лента достигает призмы и начинает скользить по ней. В процессе движения лайнер растягивается, при этом растяжение происходит достаточно равномерно по всей его длине. Та часть ленты, которая находится левее призмы, перемещается вправо, благодаря силам упругости.





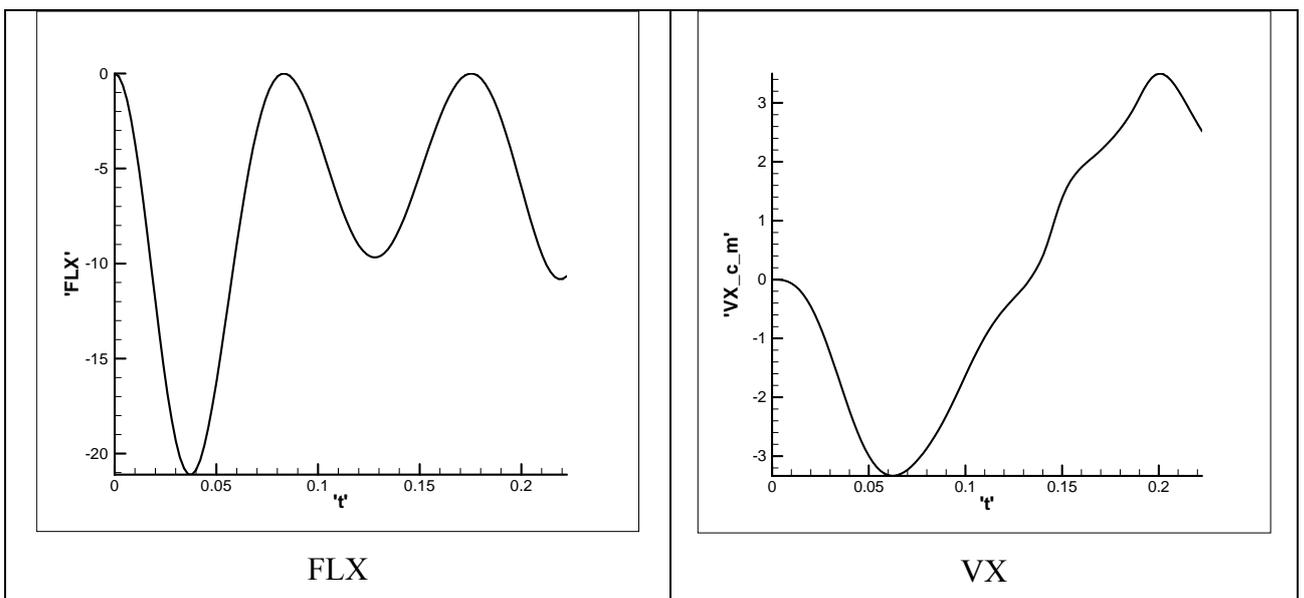
Как видно из рис. 1.1.Б, опора лайнера имеет форму, обеспечивающую гладкий переход цилиндрической части в призму. При отсутствии такой гладкости в точке перехода не определена нормаль к поверхности опоры, вследствие чего в расчетах возникали перевороты ячеек сетки, делающие дальнейшие расчеты невозможными.

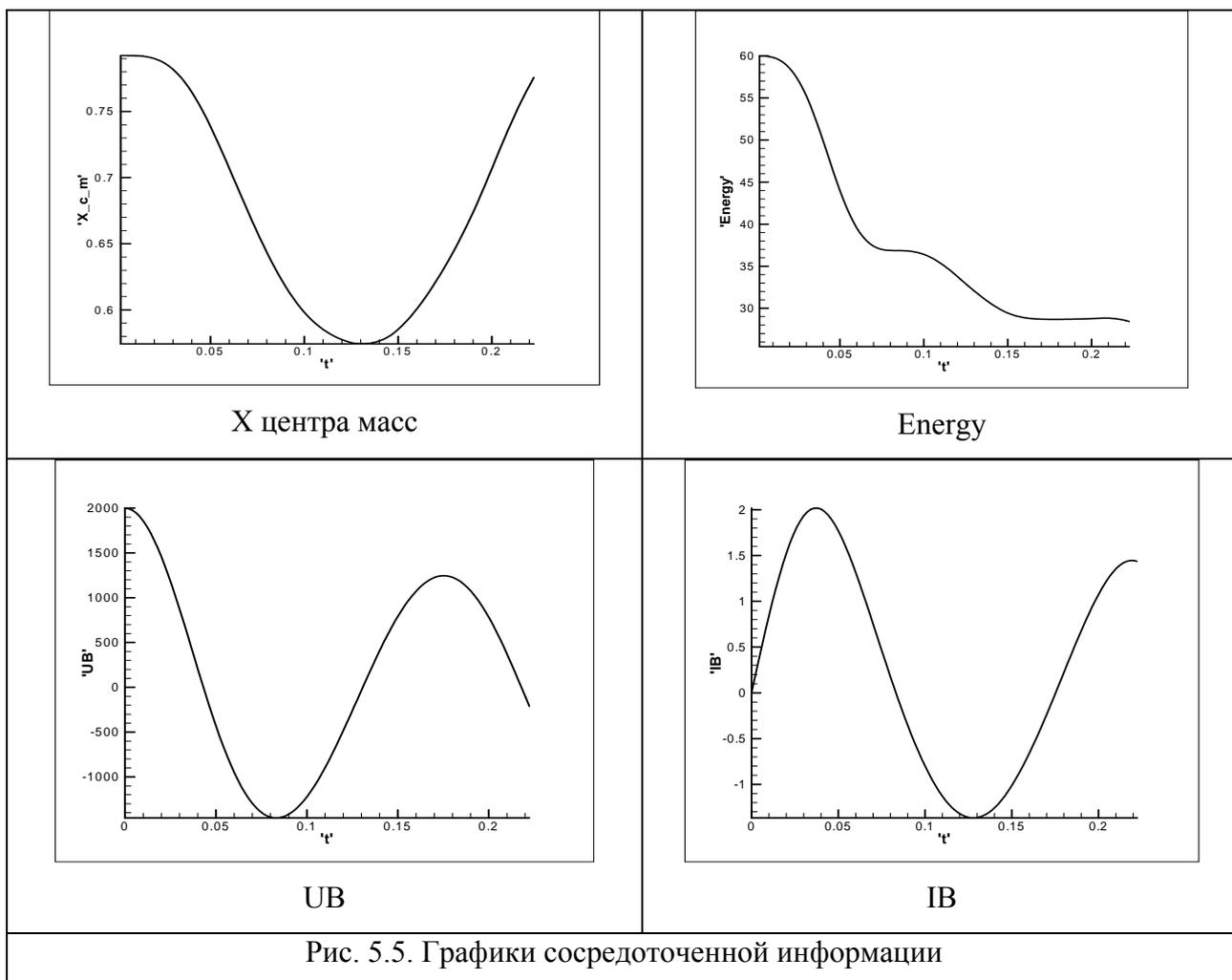


В дальнейших расчетах радиус закругления, обеспечивающего гладкость перехода, брался равным высоте лайнера. На рис. 5.4 изображено, как лента лайнера ложится на данное закругление.

5.2. Вариант 2

Все характеристики варианта аналогичны таковым для варианта 1. В отличие от него в качестве условия контакта лайнера и его опоры поставлено условие прилипания.

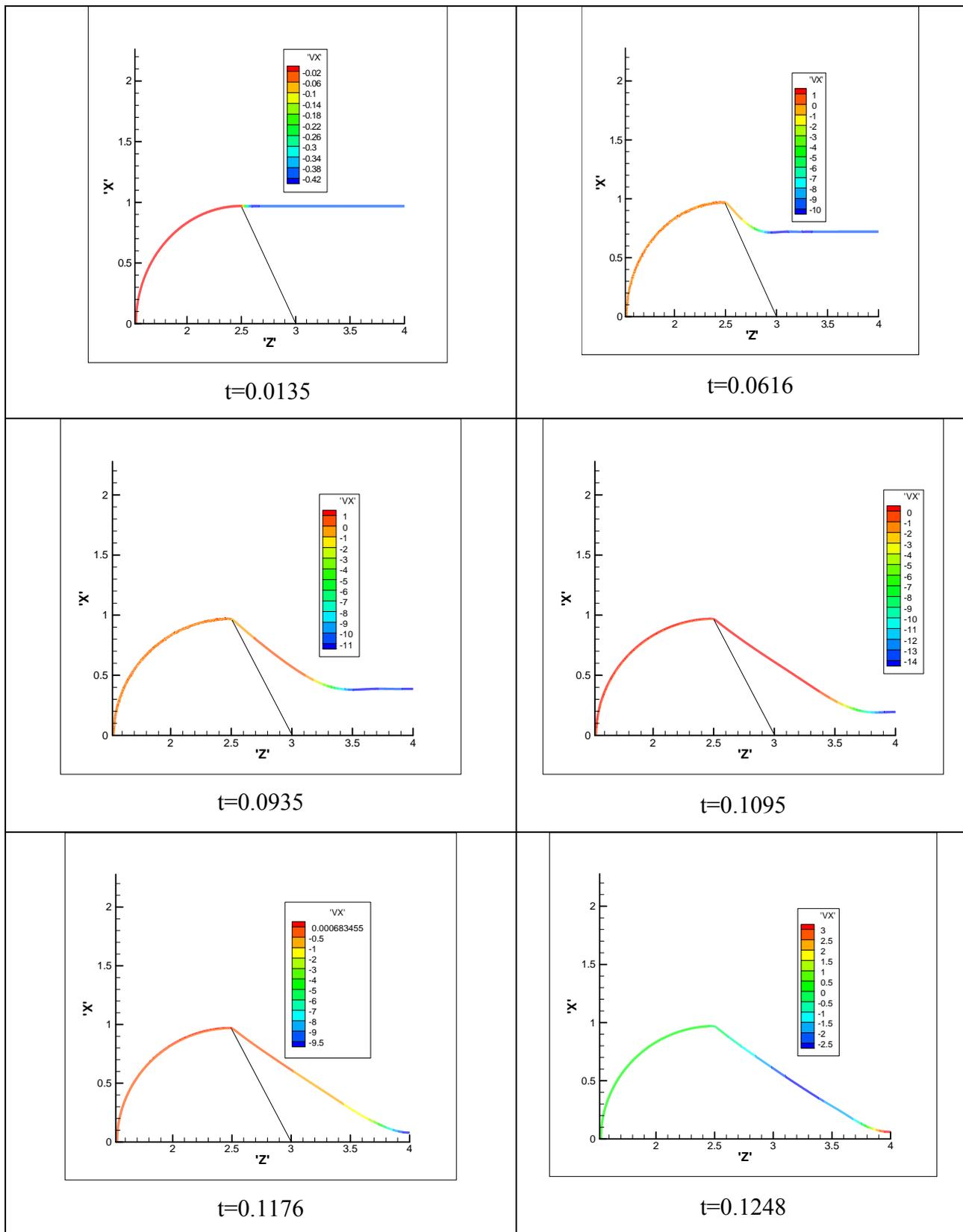


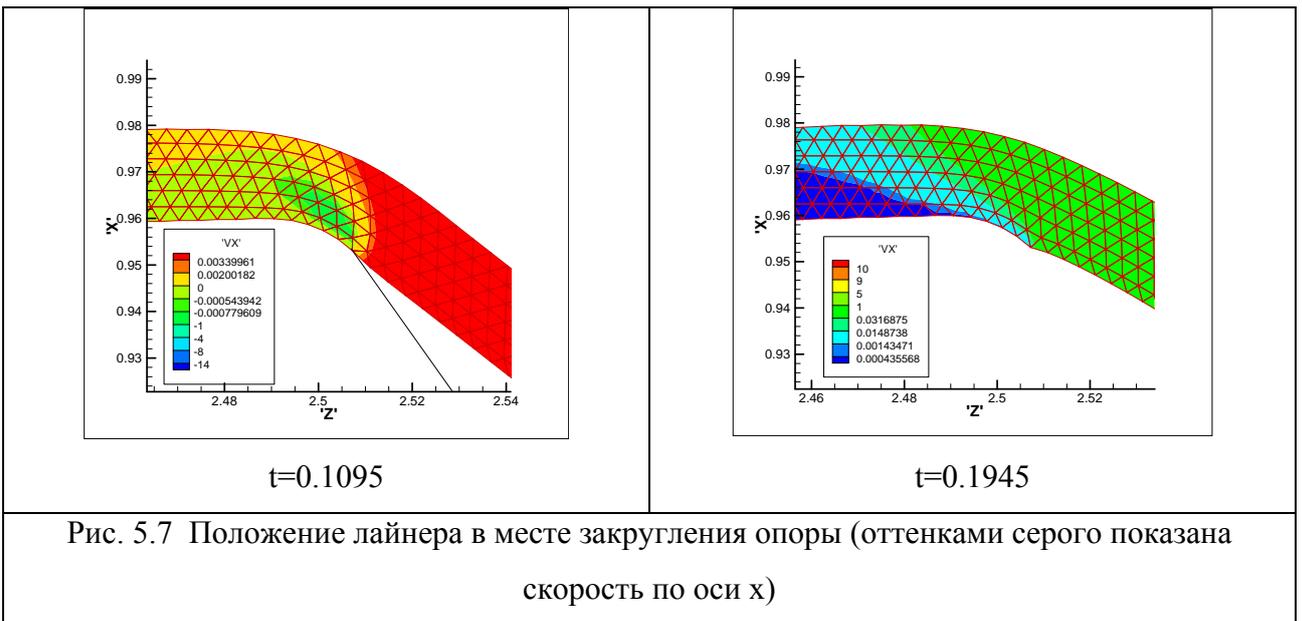
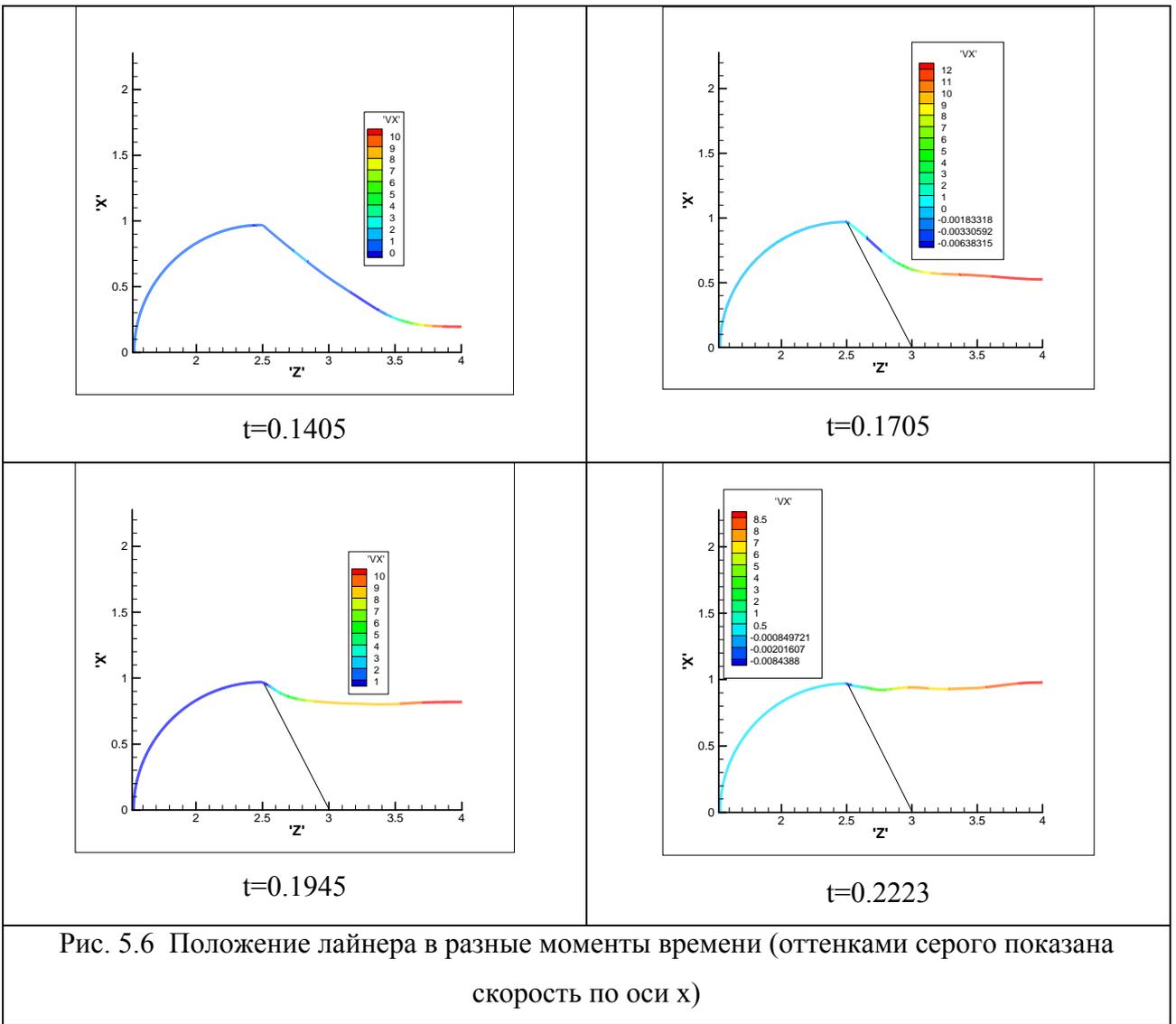


На рис. 5.5 представлены графики сосредоточенной информации о расчете, характеризующие процесс в целом. Способ представления аналогичен таковому для рис. 5.1.

Как видно на рис. 5.6, в отличие от предыдущего варианта лайнер не долетает до нижней границы области, а начинает двигаться вверх. Это вызвано тем, что силы упругости с какого-то момента времени начинают преобладать над силой давления магнитного поля, толкающей лайнер вниз. Поведение магнитного поля осталось практически неизменным по сравнению с вариантом 1. Следовательно, при условии прилипания лайнеру требуется придать большее ускорение для того, чтобы он достиг нижней части расчетной области, чем при условии скольжения. Возможное объяснение такого поведения состоит в том, что часть лайнера, находящаяся на опоре, не дает вклада в растяжение ленты. Поэтому оставшаяся часть растягивается сильнее, в результате чего возникают

большие напряжения. Расчет продолжался до момента времени $t = 0.2223$, в который лента лайнера достигает границы индуктора.

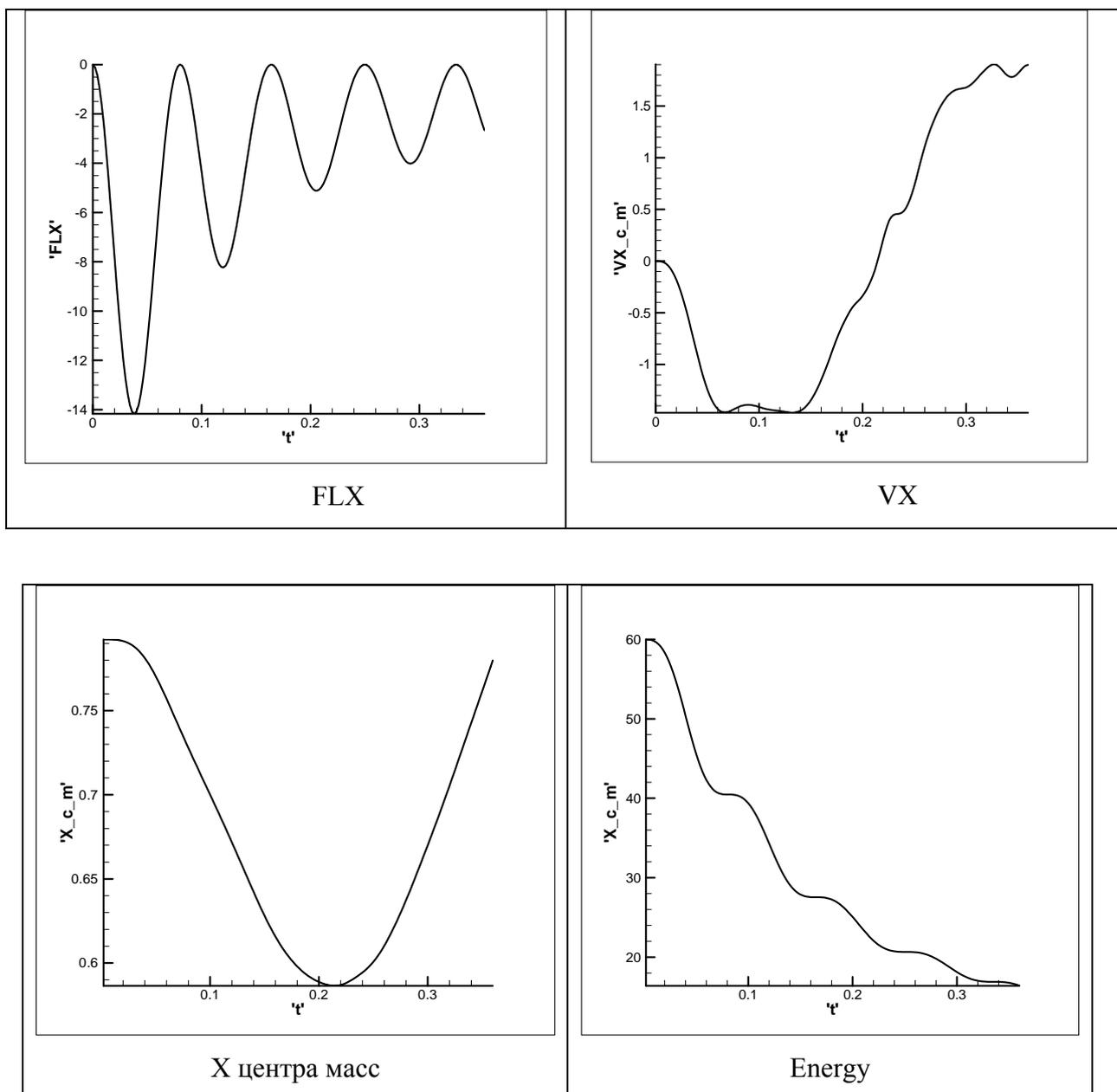


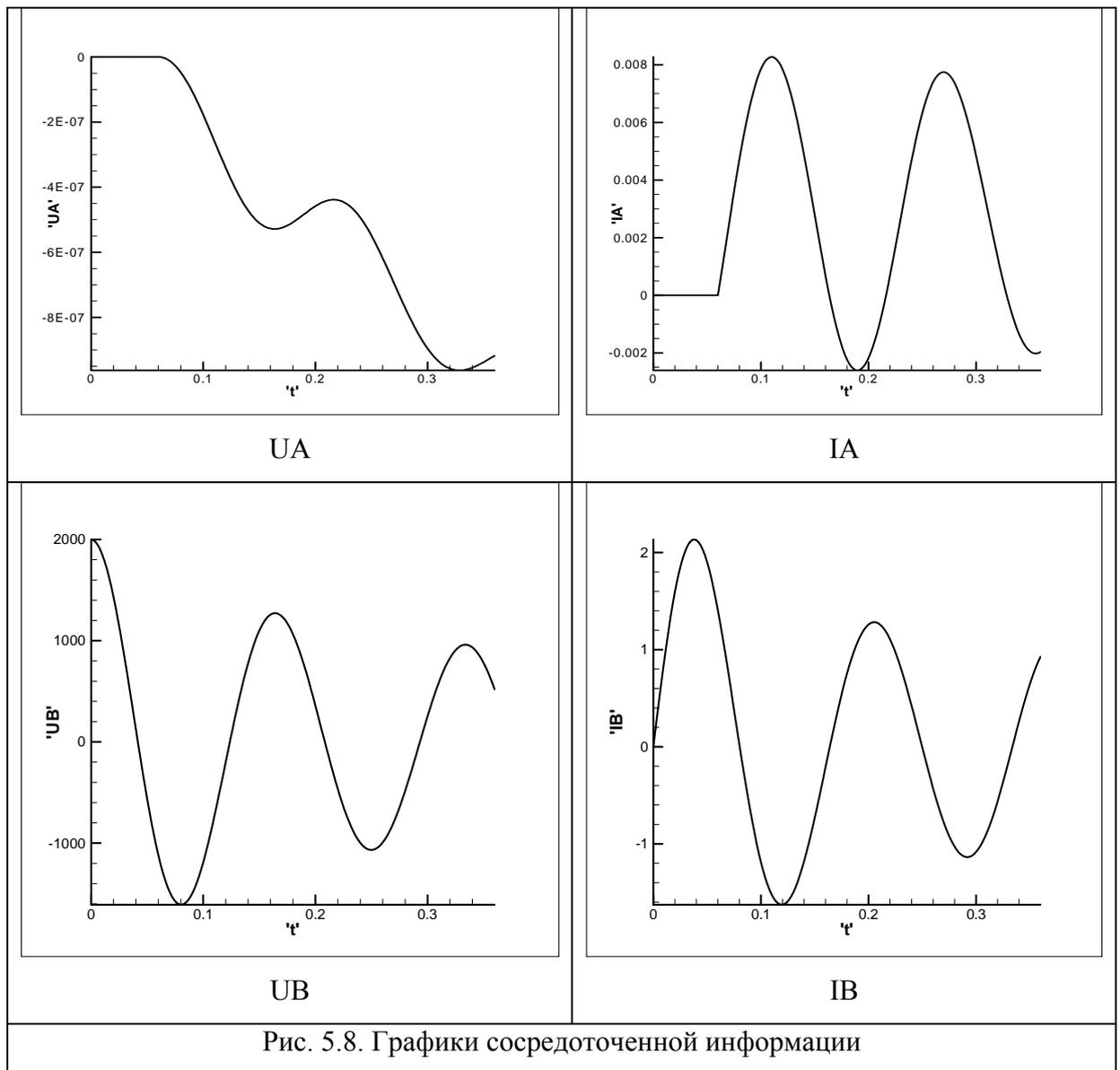


На рис. 5.7 показано, как лента лайнера ложится на поверхность опоры вблизи закругления. В отличие от первого варианта в данном расчете лайнер достигает закругления, прилипает к нему, но в дальнейшем не ложится на призму.

5.3. Вариант 3

В отличие от предыдущих вариантов длина ускоряемого лайнера по направлению $y - l_y = 5.0$. В качестве условия контакта поставлено условие скольжения. Расчет продолжался до момента времени $t = 0.3597$, в который лайнер достигает верхней границы индуктора.



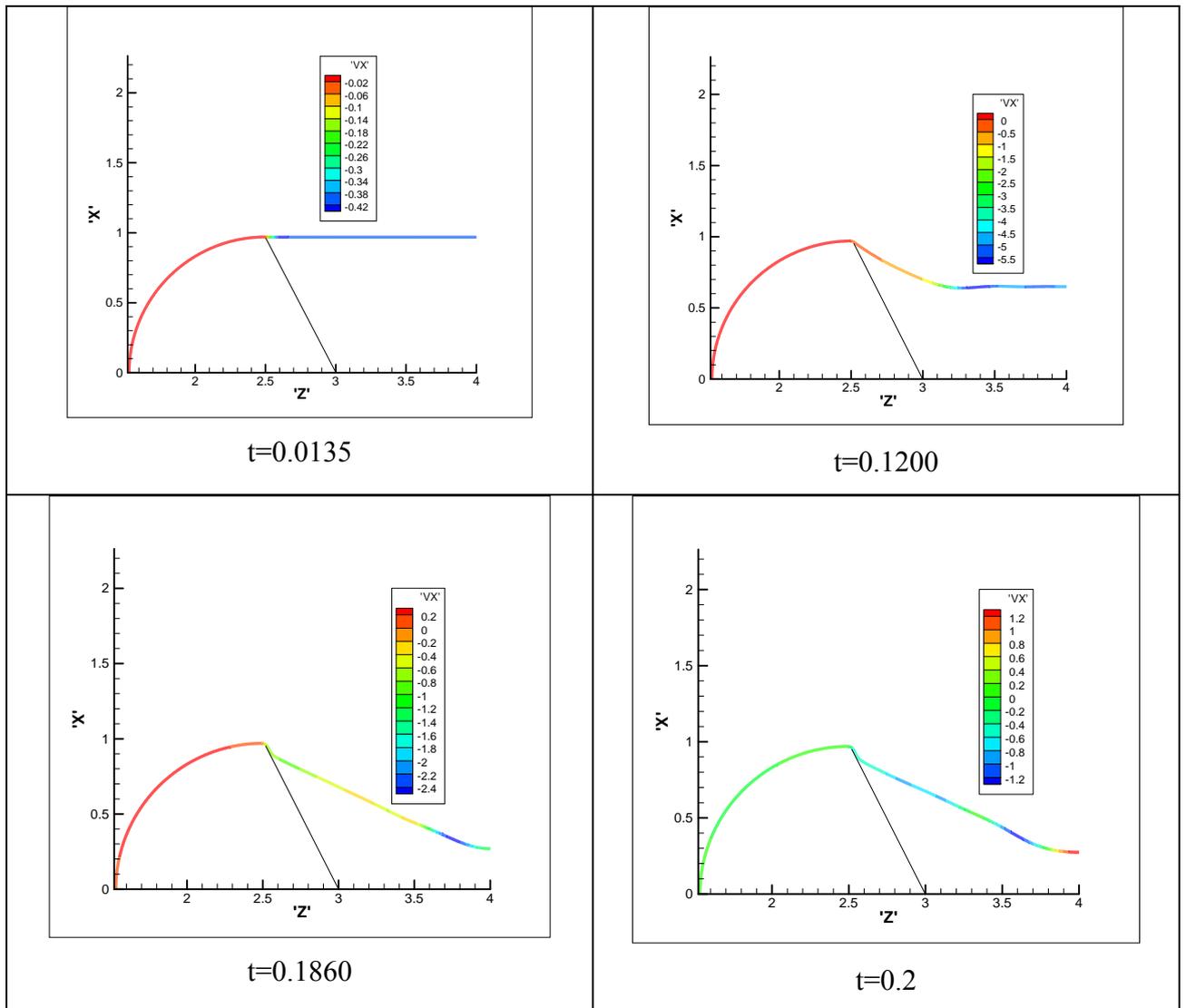


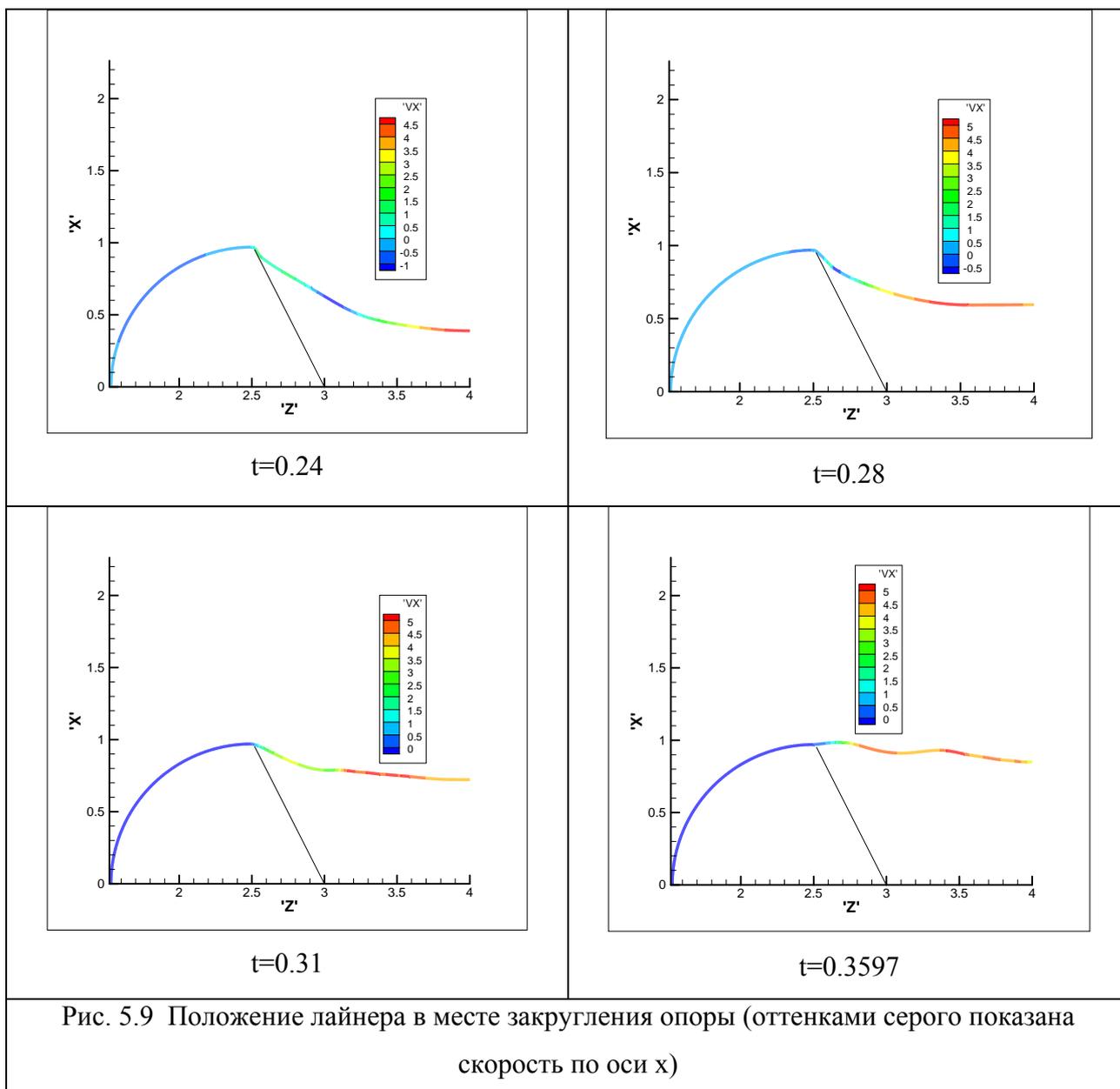
На рис. 5.8 представлены графики сосредоточенной информации о расчете, характеризующие процесс в целом, в виде, аналогичном рис. 5.1, 5.5.

Как и в варианте 2, лайнер не долетает до нижнего края области, а начинает двигаться вверх. Но в этот раз причины такого поведения другие. В [5] приведены зависимости силы давления магнитного поля и скорости центра масс лайнера от протяженности системы в третьем направлении, т.е. массы лайнера. Для задачи с контактом остается справедливым утверждение, что интегральная сила давления магнитного поля обратно пропорциональна l_y (это видно на графиках рис. 5.1 и 5.8). Поэтому скорость центра масс с ростом l_y также уменьшается, но указать точную функциональную зависимость уже затруднительно. Серия проведенных расчетов показала, что существует критическое значение

массы лайнера (т.е. l_y). Если лайнер тяжелее такой критической массы, то давления магнитного поля не хватает для того, чтобы придать ему достаточное ускорение. Для условия прилипания это критическое значение меньше, чем для условия скольжения.

На рис. 5.9 показано положение лайнера в разные моменты времени. Из приведенных графиков видно, что лайнер ложится на опору и начинает скользить по ней. Когда под действием сил упругости лайнер теряет приобретенную скорость и меняет направление движения, то та часть ленты, которая переместилась на призму, двигается назад. В конце расчета лайнер уже не контактирует с призмой и закруглением опоры.





Движение ленты лайнера можно описать следующим образом. До момента времени $t=0.186$ лента летит вниз под действием давления магнитного поля. Затем сила упругости толкает лайнер вверх. В процессе движения вследствие контакта с опорой в лайнере образуются волны возмущения. Скорость их распространения соответствует скорости распространения поперечных волн в термоупругой среде (см. [7]). На оси симметрии (правой границе расчетной области) две волны, которые перемещаются по двум половинам ленты, сталкиваются и отражаются друг от друга. Отраженная волна достигает закругления и, снова отражаясь, опять начинает двигаться вправо. На графиках, соответствующих моментам времени $t=0.31$ и $t=0.3412$, хорошо видна последняя волна.

6. Заключение

В работе описана математическая и численная модели процесса электромагнитного ускорения пластинчатого лайнера в устройствах обострения мощности. Главными ее характеристиками являются пространственная двумерность, представление материала лайнера в виде упругого тела и учет контакта ленты лайнера с опорой, расположенной в торцевой части ускорителя. При моделировании контакта использовались два условия: условие прилипания ленты к поверхности опоры и условие скольжения лайнера по ней.

На основе представленных вычислительных алгоритмов разработан соответствующий программный комплекс. Ряд полученных результатов представлен в работе.

Основной вывод из проведенных расчетов состоит в определяющей поведении лайнера роли давления магнитного поля. Интегральная ускоряющая сила обратно пропорциональна длине системы в направлении оси y - I_y . Существует критическое значение I_y : если длина (значит, и масса) лайнера больше критической, то магнитное поле не придает лайнеру достаточного ускорения. В итоге лайнер, не достигнув нижней границы расчетной области, под действием сил упругости начинает двигаться вверх. Для условия прилипания это критическое значение меньше, чем для условия скольжения.

Литература

1. Э.А. Азизов, С. Г. Алиханов, Е.П. Велихов, М.П. Галанин, В.А. Глухих, Е.В. Грабовский, А. Н. Грибов, Г.И. Долгачев, А.М. Житлухин, Ю.Г. Калинин, А.С. Кингсеп, А.И. Кормилицын, В.П. Ковалев, М.К. Крылов, В.Г. Кучинский, В.А. Левашов, А.П. Лотоцкий, С.Л. Недосеев, О.П. Печерский, В.Д. Письменный, Ю.П. Попов, Г.П. Рыкованов, В.П. Смирнов, Ю.А. Халимуллин, В.И. Четвертков. Проект «Байкал». - Отработка схемы генерации электрического импульса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез. 2001. №. 3. С.с. 3 - 17.
2. М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий. Моделирование разгона и торможения лайнера в устройствах обострения мощности // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. №2. С. 256 - 264.
3. М.П. Галанин, Е. В. Грабовский, А. П. Лотоцкий, Т. Г. Суфиев. Математическое моделирование электромагнитного ускорения проводящей пластины в компрессоре потока // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2005. № 138. 29 с.

4. М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, В.Ф. Левашов. Расчет электродинамического ускорения плоских пластин в лабораторном магнитокумулятивном генераторе // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2001. № 3. 30 с.
5. М.П. Галанин, А.П. Лотоцкий, А.С. Родин. Математическое моделирование электромагнитного ускорения лайнера в различных двумерных приближениях // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2007. № 4. 32 с.
6. М.П. Галанин, Ю.П. Попов. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. Математическое моделирование. М.: Наука, Физматлит. 1995. 320 с.
7. В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин. Математические модели термомеханики. М.: Физматлит. 2002. 168 с.
8. И.Е. Тамм. Основы теории электричества. М.: Наука. 1989. 504 с.
9. Д. Бленд. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир. 1972. 184 с.
10. В.К. Агошков, Г.И. Марчук. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, Физматлит. 1981. 416 с.
11. А.А. Самарский. Теория разностных схем. М.: Наука. 1983. 280 с.
12. А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы. М.: Наука. 1989. 438 с.
13. Физические величины. Справочник. Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлахова. М.: Энергоатомиздат. 1991. 1232 с.
14. М.П. Галанин, С.С. Храмцовский. Решение пространственно трехмерных задач электромагнитного ускорения в системе длинных проводников // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 1998. № 29. 20 с.