РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША

Э. П. КАЗАНДЖАН

Газодинамическое обтекание пары профилей

МОСКВА, 2008 г.

Казанджан Э.П.
Газодинамическое обтекание пары профилей.

Аннотация. В работе [3] рассматривалось обтекание несжимаемой жидкостью двусвязной области с гладкими контурами. Разработанный алгоритм применён к двусвязной области с угловыми точками, а именно к паре профилей Жуковского (биплан).

Kazandjan E.P.
The gasdynamic flow of two profiles.

Annotation. The algorithm of preprint [3] is used for a double-connected domain with angular points: two profiles Jukovskogo.

1.Введение.

В работах [1]-[2] рассматривались численные методы конформного отображения двусвязных областей с гладкими контурами. В работе [3] полученные результаты были использованы для решения задачи обтекания несжимаемой жидкостью двусвязной области с гладкими контурами. Было бы интересно применить разработанный алгоритм к двусвязной области с угловыми точками.

Возьмём простейший случай: пара параллельных профилей Жуковского (ПЖ) без угла атаки. Напомним, как строится ПЖ (см., например, [4], с.281-283).

Пусть в плоскости ζ задана пара окружностей:
1) первая радиуса R_0 с центром на мнимой оси; она пересекает положительную действительную ось в точке C;
2) вторая радиуса $R_0 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, она проходит через ту же точку C и касается в ней первой окружности (см. Рис. 1).

Рис. 1.

Тогда функция Жуковского

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \quad (c = OC)$$

переводит эту пару окружностей в ПЖ на плоскости z (см. Рис. 2).

Рис. 2.

Параметрическое задание ПЖ:

$$\zeta = k\,i - \varepsilon^{-\beta\,i} + (R_0 + \varepsilon)e^{i\theta}\ . \tag{1}$$

Здесь k - координата на мнимой оси центра первой окружности, $\beta = \arctan\frac{k}{c}$, $-\beta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \beta$.

Пара ПЖ создаётся, например, сдвигом полученного профиля по мнимой оси вверх и вниз на некоторую величину $d > 0$:

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \pm d\,i\ .$$

План действий таков:
1. Разгибаем верхний ПЖ (предварительно вернув его на "эталонное" место), для чего применяем обратную функцию Жуковского

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 4c^2}\right) \qquad (2)$$

(вопрос выбора ветви обсудим позже).
2. Второй контур как-то преобразуется, сохраняя при этом угловую точку. Сдвигаем его на "эталонное" место (соответственно переместится и первый контур).
3. Разгибаем второй контур с помощью той же обратной функции Жуковского. В итоге получаем двусвязную область с гладкими границами.
Оказалось, что главные технические трудности заключаются в вычислении координат полученных областей. Дело в том, что программы конформного отображения требуют вычисления не только координат контуров, но и их производных по параметру до 3-го порядка включительно. Формулы при этом получаются довольно громоздкие.

2. Разгибание верхнего контура.

В плоскости ζ строим пару окружностей по формулам (1):
величины $c > 0$, $k > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$ должны быть заданы (для внутренней окружности $\varepsilon = 0$); вычисляем

$$R_0 = \sqrt{k^2 + c^2},\ tg\,\beta = \frac{k}{c}\ .$$

Преобразование

$$t = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \pm d\,i$$

(величина $d > 0$ должна быть задана) даёт пару ПЖ в плоскости t выше и ниже действительной оси ($\pm$ соответствует верхнему и нижнему контуру).
Сдвигаем верхний контур на $d\,i$ вниз (на "эталонное" место) и применяем обратную функцию Жуковского:

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(t - d\,i \pm \sqrt{(t - d\,i)^2 - 4c^2}\right)$$

(знак $\pm$ означает выбор ветви). Используем обозначение ζ, так как возвращаемся на ту же плоскость.
Тогда

$$\zeta_{\text{В}} = \zeta\ , \quad \zeta_{\text{Н}} = \frac{1}{2}\left(t_{\text{Н}} - d\,i \pm \sqrt{(t_{\text{Н}} - d\,i)^2 - 4c^2}\right)\ .$$

(Нижние индексы "в"и "н"относятся к верхнему и нижнему контурам соответственно.)

3. Преобразование нижнего контура.

Что происходит с нижним контуром?
Угловая точка, конечно, сохранится. Посмотрим, куда переходят концы дуги нижнего профиля

$$t^r_{\text{Н}} = 2c - 2d\,i \quad \text{и} \quad t^l_{\text{Н}} = -2c - 2d\,i \quad \text{(r-right (правый), l-left (левый))}.$$

После несложных вычислений получим:

$$\zeta^r_{\text{Н}} = c - d\,i \pm 2i\sqrt{d}\sqrt{d + c\,i}$$

$$\zeta^l_{\text{Н}} = -c - d\,i \pm 2i\sqrt{d}\sqrt{d - c\,i}$$

Пусть $d + c\,i = \rho e^{i\alpha}$ (ρ, α - модуль и аргумент соответственно), тогда $d - c\,i = \rho e^{-i\alpha}$.

$$\zeta^r_{\text{Н}} = c - d\,i \pm 2i\sqrt{\rho d} e^{i\alpha/2}$$

$$\zeta^l_{\text{Н}} = -c - d\,i \pm 2i\sqrt{\rho d} e^{-i\alpha/2}$$

Нетрудно убедиться, что

$$Re\,\zeta^r_{\text{Н}} = -Re\,\zeta^l_{\text{Н}}\,, \quad Im\,\zeta^r_{\text{Н}} = Im\,\zeta^l_{\text{Н}}\ .$$

Таким образом, нижний ПЖ остался горизонтальным и крайние точки его симметричны относительно мнимой оси (см. Рис. 3).

Рис. 3.

4. Разгибание нижнего контура.

Переводим нижний контур на "эталонное" место и применяем обратную функцию Жуковского.
Обозначим $c_h = \frac{1}{2} Re\, \zeta^r_{\text{Н}},\ h = Im\, \zeta^r_{\text{Н}}$.
Применяем к обоим контурам формулу

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta - h\,i \pm \sqrt{(\zeta - h\,i)^2 - 4c_h^2}\right)\ . \tag{3}$$

Получаем двусвязную область с гладкими контурами (см. Рис.4).

Рис. 4.

5. Формулы для координатных блоков.

Итак, по формулам (1), (3) мы можем вычислить координаты обоих контуров. Но помимо $z_{\text{В},\ \text{Н}}$ нужно вычислить их производные по параметру θ до 3-го порядка включительно. Эти производные проще всего вычислять как производные сложной функции.

1) Формулы для верхнего контура (индекс "в" опущен).

$$z'_\theta = z'_\zeta \cdot \zeta'_\theta$$

$$z''_\theta = z''_\zeta \cdot (\zeta'_\theta)^2 + z'_\zeta \cdot \zeta''_\theta$$

$$z'''_\theta = z'''_\zeta \cdot (\zeta'_\theta)^3 + 3z''_\zeta \cdot \zeta''_\theta + z'_\zeta \cdot \zeta'''_\theta$$

Теперь надо выписать производные $\zeta'_\theta, \zeta''_\theta, \zeta'''_\theta$ и $z'_\theta, z''_\theta, z'''_\theta$.

$$\begin{aligned} \zeta'_\theta &= (R_0 + \varepsilon) i\, e^{i\theta} \\ \zeta''_\theta &= -(R_0 + \varepsilon)\, e^{i\theta} \\ \zeta'''_\theta &= -(R_0 + \varepsilon) i\, e^{i\theta} = -\zeta'_\theta \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим $q = \sqrt{(\zeta - h\,i)^2 - 4c_h^2}$.

$$z'_\zeta = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\zeta - h\,i}{\sqrt{(\zeta - h\,i)^2 - 4c_h^2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\zeta - h\,i}{q}\right)$$

$$z''_\zeta = \mp \frac{2c_h^2}{q^3}$$

$$z'''_\zeta = \pm \frac{6c_h^2(\zeta - h\,i)}{q^5}$$

Кстати, о выборе знака перед корнем, т.е. о выборе ветви двузначной функции. При вычислении подкоренного выражения для очередной точки, его аргумент сравнивается с аргументом для предыдущей точки: если они разных знаков, то произошёл переход на другую ветвь, и тогда знак перед корнем меняется на противоположный.

2) Формулы для нижнего контура (индекс "н" опущен).
Эти формулы более громоздкие, так как цепочка преобразований длиннее. Координаты: вычисляем ζ по формуле (1), затем

$$t = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} - d\,i$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(t - d\,i \pm \sqrt{(t - d\,i)^2 - 4c^2}\right)$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\eta - h\,i \pm \sqrt{(\eta - h\,i)^2 - 4c_h^2}\right)$$

Теперь выпишем формулы для производных.

$$z'_\theta = z'_\eta \cdot \eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta$$

$$z''_\theta = z''_\eta \cdot (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)^2 + z'_\eta \cdot (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)'_\theta$$

Обозначим

$$A_1 = (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)'_\theta = \eta''_t \cdot (t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)^2 + \eta'_t \cdot t''_\zeta \cdot (\zeta'_\theta)^2 + \eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta''_\theta$$

Тогда

$$z''_\theta = z''_\eta \cdot (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)^2 + z'_\eta \cdot A_1$$

Теперь третья производная:

$$z'''_\theta = z'''_\eta \cdot (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)^3 + 3z''_\eta \cdot (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta) \cdot A_1 + z'_\eta \cdot (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)''_\theta$$

Обозначим

$$A_2 = (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)''_\theta = (\eta'''_t \cdot (t'_\zeta)^3 + 3\eta''_t \cdot t'_\zeta \cdot t''_\zeta + \eta'_t \cdot t'''_\zeta)(\zeta'_\theta)^3 + 3(\eta''_t \cdot (t'_\zeta)^2 + \eta'_t \cdot t''_\zeta) \cdot \zeta'_\theta \cdot \zeta''_\theta + \eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'''_\theta$$

Тогда

$$z'''_\theta = z'''_\eta \cdot (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta)^3 + 3z''_\eta \cdot (\eta'_t \cdot t'_\zeta \cdot \zeta'_\theta) \cdot A_1 + z'_\eta \cdot A_2$$

Выпишем промежуточные производные.
Производные $\zeta'_\theta, \zeta''_\theta, \zeta'''_\theta$ те же, что для верхнего контура, т.е вычисляются по формулам (4).
Производные $t'_\theta, t''_\theta, t'''_\theta$:

$$t'_\zeta = 1 - \frac{c^2}{\zeta^2}$$

$$t''_\zeta = \frac{2c^2}{\zeta^3}$$

$$t'''_\zeta = -\frac{6c^2}{\zeta^4}$$

Производные $\eta'_t, \eta''_t, \eta'''_t$.
Обозначим $q_1 = \sqrt{(t - d\,i)^2 - 4c^2}$. Тогда

$$\eta'_t = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{t - d\,i}{q_1}\right)$$

$$\eta''_t = \mp\frac{2c^2}{q_1^3}$$

$$\eta'''_t = \pm\frac{6c^2(t - d\,i)}{q_1^5}$$

Производные $z'_\eta, z''_\eta, z'''_\eta$.
Обозначим $q_2 = \sqrt{(\eta - h\,i)^2 - 4c_h^2}$. Тогда

$$z'_\eta = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\eta - h\,i}{q_2}\right)$$

$$z''_\eta = \mp\frac{2c_h^2}{q_2^3}$$

$$z'''_\eta = \pm\frac{6c_h^2(\eta - h\,i)}{q_2^5}$$

6. Параметры расчётов.

Для расчётов были взяты следующие величины:

$$k = 0.1;\ c = 0.5;\ \varepsilon = 0.05;\ d = 0.4\ .$$

Тогда $R_0 = \sqrt{c^2 + k^2} = \sqrt{0.26} \approx 0.5099$; $\sin\beta = \frac{k}{R_0} \approx 0.1961$.

В дальнейшем были проведены расчёты для серии значений d:

$$d = 0.4;\ 0.6;\ 0.8;\ 1.;\ 3.;\ 5.;\ 10.;\ 50.;\ 100.;\ 500.$$

С ростом d взаимовлияние профилей должно ослабевать. Расчёты показали, что значения циркуляции Γ и подъёмной силы Y стремятся к теоретическим значениям для одного профиля Жуковского.

$$\Gamma = -4\pi\,(R_0 + \varepsilon)\,\sin\beta \approx -1.3799; \quad Y = |\Gamma|$$

Для $d = 500.$ получилось $\Gamma_1 = -\Gamma_2 \approx -1.3793$.

Список литературы

1. Л. Р. Волевич, Э. П. Казанджан. *Численный метод конформного отображения двусвязной области на круговое кольцо.* М., препринт ИПМ АН СССР № 82, 1993 г.
2. Л. Р. Волевич, Э. П. Казанджан. *Численный метод конформного отображения кругового кольца на двусвязную область.* М., препринт ИПМ АН СССР № 101, 1994 г.
3. Л. Р. Волевич, Э. П. Казанджан, В. И. Парусников. *Численная реализация точного решения задачи обтекания двусвязной области несжимаемой жидкостью.* М., препринт ИПМ АН СССР № 24, 1996 г.
4. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963 г.