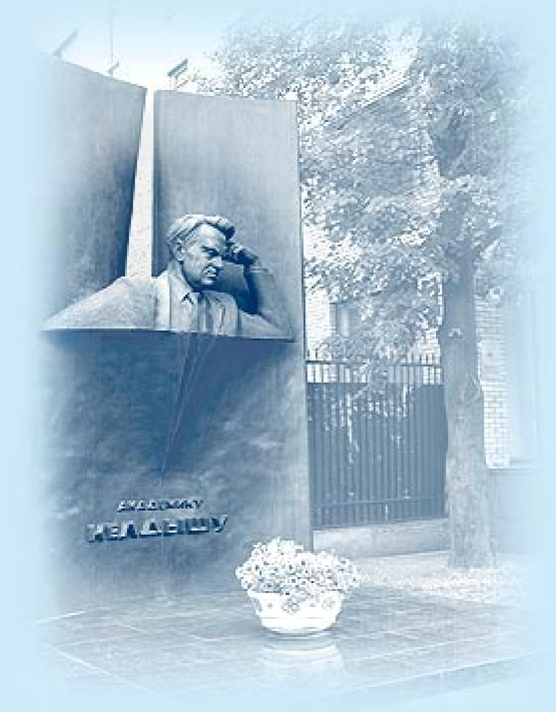

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А. Д. Брюно, И. В. Горючкина

Все асимптотические разложения решений уравнения P6, полученные из базовых.

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А. Д., Горючкина И. В. Все асимптотические разложения решений уравнения P6, полученные из базовых. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 77. 28 с.
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-77

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

ВСЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ P6, ПОЛУЧЕННЫЕ ИЗ БАЗОВЫХ

Москва, 2007 г.

УДК 517.91

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Все асимптотические разложения решений уравнения P6, полученные из базовых. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

С помощью первых двух симметрий уравнения P6 из базовых разложений решений в случае $a \cdot b \neq 0$ (Препринт №62 института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2007) получаем все остальные разложения решений вблизи особых точек уравнения $x = 0$ и $x = \infty$, существующие в этом случае. Асимптотические разложения решений уравнения P6 вблизи его особой точки $x = 1$ вычислены с помощью его третьей симметрии из разложений решений вблизи другой его особой точки $x = 0$.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. All asymptotic expansions of solutions to the equation P6 are obtained from base ones. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

By means of two symmetries of the equation P6 from base expansions of solutions in the case $a \cdot b \neq 0$ (Preprint №62 of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, 2007) we obtain all other expansions of solutions near singular points of equation $x = 0$ and $x = \infty$ existed in this case. Asymptotic expansions of solutions to the equation P6 near its singular point $x = 1$ computed by means its third symmetry from expansions of solutions near other its singular point $x = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00050).

e-mail: abruno@keldysh.ru, chukhareva@yandex.ru

Продолжение главы II. [63]

§ 4. Разложения вблизи нуля, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$

Семейства разложений $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_i^\tau$, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$, получим из семейств разложений $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}_i^\tau$, соответствующих ребру $\Gamma_4^{(1)}$, используя симметрию (2.1.9) [63]. Для этого в разложения, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$, делается подстановка (2.1.9), вычисляются разложения с птичками, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$, и птички опускаются. При этом три случая: $a \neq c \neq 0$; $a = c \neq 0$ и $a \neq 0$, $c = 0$, рассмотренные для ребра $\Gamma_4^{(1)}$, перейдут соответственно в три случая: $b \neq d - 1/2 \neq 0$; $b = d - 1/2 \neq 0$ и $b \neq 0$, $d = 1/2$ для ребра $\Gamma_1^{(1)}$.

2.4.1. Разложения решений при $b \neq d - 1/2 \neq 0$. Рассмотрим разложения $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}_i^\tau$, $i = 1, 2$, соответствующие ребру $\Gamma_4^{(1)}$, и с помощью симметрии (2.1.9) переведем их в разложения $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{H}_i^\tau$, $i = 1, 2$, соответствующие ребру $\Gamma_1^{(1)}$.

Положим $\check{\theta}_i = \sqrt{1-2d} + (-1)^i\sqrt{-2b}$, $i = 1, 2$. Для каждого фиксированного i возможен один из трех случаев.

Случай 1. $\operatorname{Re}\check{\theta}_i = 0$. В этом случае разложения $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$ определяет формула (2.3.11). Подставим в нее $x = \check{x}$, $y = \check{x}/\check{y}$ и выражая $\check{y}$, получаем дробь

$$\check{y} = \check{x}/(c_{0i} + \sum_s c_{si}\check{x}^s). \tag{2.4.1}$$

Так как $\left|\sum_s \frac{c_{si}}{c_{0i}}\check{x}^s\right| < 1$ при $\check{x} \to 0$, то (2.4.1) можно разложить в ряд

$$\check{y} = \frac{\check{x}}{c_{0i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\sum_s \frac{c_{si}}{c_{0i}}\,\check{x}^s\right)^n. \tag{2.4.2}$$

Выписывая первые два члена ряда (2.4.2), получаем разложение

$$\check{y} = \frac{\check{x}}{c_{0i}} - \sum_s \frac{c_{si}}{c_{0i}^2}\,\check{x}^{s+1} + \ldots. \tag{2.4.3}$$

Положим

$$\check{c}_{1i} = 1/c_{0i},\ \ \check{c}_{\check{s}i} = -c_{si}/c_{0i}^2,\ \ \check{s} = s + 1. \tag{2.4.4}$$

Таким образом, для каждого значения i получаем два семейства экзотических разложений

$$\mathcal{H}_i^\tau:\ \check{y} = \check{c}_{1i}\check{x} + \sum_{\check{s}} \check{c}_{\check{s}i}\check{x}^{\check{s}} + \ldots,\ i = 1, 2,\ \tau = \pm 1, \tag{2.4.5}$$

где согласно (2.3.10) и (2.4.4) $\check{s}$ пробегает множество $\{1+l+m\tau\check{\theta}_i,\ l,m\in\mathbb{Z},\ l,m\geq 0,\ l+m>0\}$, комплексные коэффициенты: $\check{c}_{1i}$ получаем из (2.1.9), (2.3.3) [63] и (2.4.4)

$$\check{c}_{1i}=\frac{2b+(-1)^i\sqrt{4bd-2b}}{2b-2d+1}, \tag{2.4.6}$$

$\check{c}_{\check{s}i}$ с $\check{s}=1+\tau\check{\theta}_i$ – произвольная постоянная, остальные комплексные коэффициенты $\check{c}_{\check{s}i}$ постоянны и однозначно определены.

В случае $\check{c}_{\check{s}i}=0$ с $\check{s}=1+\tau\check{\theta}_i$ второе приближение разложений решений (2.4.5) есть $\check{y}=\check{c}_{1i}\check{x}+\check{c}_{2i}\check{x}^2$. Согласно (2.1.9) и (2.3.13) [63] коэффициент

$$\check{c}_{2i}=(-1)^i\sqrt{\frac{1-2d}{-2b}}\,\frac{\left(\sqrt{-2b}+(-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2-2a+2c-1}{2-2\left(\sqrt{-2b}+(-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2}. \tag{2.4.7}$$

Разложения (2.4.5) являются экзотическими, если $\check{c}_{\check{s}i}$ с $\check{s}=1+\tau\check{\theta}_i$ – ненулевая произвольная постоянная.

В случае $\check{c}_{\check{s}i}=0$ с $\check{s}=1+\tau\check{\theta}_i$ разложения (2.4.5) являются разложениями по целым степеням x. Семейства таких разложений обозначим $\mathcal{H}_i,\ i=1,2$.

Положим $k_i=1+\check{\theta}_i$, если $\operatorname{Re}\check{\theta}_i>0$ и $k_i=1-\check{\theta}_i$, если $\operatorname{Re}\check{\theta}_i<0$.

С л у ч а й 2. $\operatorname{Re}\check{\theta}_i\neq 0$, $\check{\theta}_i\notin\mathbb{Z}$. Аналогично из (2.3.15) с помощью (2.1.9) и (2.4.4) получаем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_i:\ \check{y}=\check{c}_{1i}\check{x}+\sum_{\check{s}}\check{c}_{\check{s}i}\check{x}^{\check{s}}+\ldots,\ i=1,\,2, \tag{2.4.8}$$

где $\check{s}\in\{1+l+mk_i,\ l,m\in\mathbb{Z},\ l,m\geq 0,\ l+m>0\}$, комплексные коэффициенты таковы: $\check{c}_{1i}$ определен формулой (2.4.6), $\check{c}_{k_ii}$ – произвольный, остальные $\check{c}_{\check{s}i}$ постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложения решения (2.4.8) зависит от расположения числа $\operatorname{Re}k_i$. Если $\operatorname{Re}k_i>2$, тогда второе приближение решений имеет вид $\check{y}=\check{c}_{1i}\check{x}+\check{c}_{2i}\check{x}^2$, что аналогично случаю $\operatorname{Re}\check{\theta}_i=0$. Если $1<\operatorname{Re}k_i<2$, то второе приближение решений будет иметь вид $\check{y}=\check{c}_{1i}\check{x}+\check{c}_{k_ii}\check{x}^{k_i}$, где коэффициент $\check{c}_{k_ii}$ – произвольный. Если $\operatorname{Re}k_i=2$, то второе приближение решений будет иметь вид $\check{y}=\check{c}_{1i}\check{x}+\check{c}_{2i}\check{x}^2+\check{c}_{k_ii}\check{x}^{k_i}$, где коэффициенты таковы: $\check{c}_{k_ii}$ – произвольный, $\check{c}_{2i}$ определен формулой (2.4.7).

С л у ч а й 3. $\check{\theta}_i\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Имеем однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{H}_i:\ \check{y}=\check{c}_{1i}\check{x}+\sum_{\check{s}=2}^{\infty}\check{c}_{\check{s}i}(\ln\check{x})\check{x}^{\check{s}}+\ldots,\ i=1,\,2, \tag{2.4.9}$$

где коэффициент $\check{c}_{1i}$ определен формулой (2.4.6), коэффициент $\check{c}_{k_ii}=\check{\alpha}_{k_ii}+\check{\beta}_{k_ii}\ln\check{x}$, $\check{\alpha}_{k_ii}$ – произвольная постоянная, коэффициент $\check{\beta}_{k_ii}$ постоянный и однозначно определенный, остальные $\check{c}_{\check{s}i}$ – многочлены от $\ln\check{x}$, которые однозначно определяются.

Второе приближение разложения решения (2.4.9) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = 2$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = \check{c}_{1i}\check{x} + \check{c}_{2i}\check{x}^2$. Согласно (2.1.9) и (2.3.17) [63] коэффициент

$$\check{c}_{2i} = \check{\alpha}_{2i} + (-1)^i\sqrt{\frac{1-2d}{-2b}}\,\frac{\left(\sqrt{-2b}+(-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2 - 2a + 2c - 1}{4}\,\ln\check{x}, \tag{2.4.10}$$

где $\check{\alpha_{2i}}$ – произвольная постоянная.

Если $\left(\sqrt{-2b}+(-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2 - 2a + 2c - 1 = 0$, то выполнено условие совместности и в разложении (2.4.9) отсутствуют логарифмы.

Аналогично с помощью симметрии (2.1.9) из (2.3.27) [63] получаем однопараметрическое семейство сложных разложений

$$\mathcal{H}_3: \ \check{y} = \check{\varphi}_1\check{x} + \sum_{\check{\sigma}=2}^{\infty}\check{\varphi}_{\check{\sigma}}\check{x}^{\check{\sigma}}, \tag{2.4.11}$$

где

$$\check{\varphi}_1 = \frac{1+2b-2d}{4}\ln^2\check{x} + \check{c}_1\ln\check{x} + \sum_{\check{s}=0}^{\infty}\check{c}_{-\check{s}}\ln^{-\check{s}}\check{x}, \tag{2.4.12}$$

комплексные коэффициенты таковы: $\check{c}_1$ – произвольный, остальные $\check{c}_{-\check{s}}$ – постоянны и однозначно определены; $\check{\varphi}_{\check{\sigma}}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

2.4.2. Разложения решений при $b = d - 1/2 \neq 0$. Из разложений (2.3.55) получаем два однопараметрических семейства сложных разложений

$$\mathcal{H}_{3+j}: \ \check{y} = \check{\phi}_{1j}\check{x} + \sum_{\check{\sigma}=2}^{\infty}\check{\phi}_{\check{\sigma}j}\check{x}^{\check{\sigma}},\ j = 1, 2, \tag{2.4.13}$$

где

$$\check{\phi}_{1j} = (-1)^j\sqrt{-2b}\ln\check{x} + \check{c}_{0j} + \sum_{\check{s}=1}^{\infty}\check{c}_{-\check{s}j}\ln^{-\check{s}}\check{x},\ j = 1, 2, \tag{2.4.14}$$

где комплексные коэффициенты таковы: $\check{c}_{0j}$ – произвольная постоянная, остальные $\check{c}_{-\check{s}j}$ – постоянны и однозначно определены; $\check{\phi}_{\check{\sigma}j}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейства разложений $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_2^{\tau}$ сохраняются из случая $b \neq d - 1/2 \neq 0$. В качестве значения $\check{\theta}_2$ берем $2\sqrt{-2b}$ с $\operatorname{Re}\check{\theta}_2 \geq 0$. В зависимости от которого возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re}\check{\theta}_2 = 0$, семейства экзотических разложений $\mathcal{H}_2^{\tau}$ определяются формулой (2.4.5)), случай 2 ($\operatorname{Re}\check{\theta}_2 \neq 0$, $\check{\theta}_2 \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений

$\mathcal{H}_2$ определяется формулой (2.4.8)), случай 3 ($\check{\theta}_2 \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений $\mathcal{H}_2$ определяется формулой (2.4.9)).

2.4.3. Разложения решений при $d = 1/2$, $b \neq 0$. В случае $\operatorname{Re}\sqrt{-2b} > 0$ имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{H}_6:\ \check{y} = \check{x} + \check{c}_{\check{\rho}}\check{x}^{\check{\rho}} + \sum_{\check{s}} \check{c}_{\check{s}}\check{x}^{\check{s}}, \tag{2.4.15}$$

где $\check{c}_{\check{\rho}} \neq 0$, $\check{c}_{\check{\rho}}$ – произвольная постоянная, $\check{\rho} = 1 + \sqrt{-2b}$, $\check{s}$ пробегает множество $\{\check{\rho} + l(\check{\rho}-1) + m;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$, остальные комплексные коэффициенты $\check{c}_{\check{s}}$ постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re}\check{\rho} > 2$ третье приближение разложения (2.4.15) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_{\check{\rho}}\check{x}^{\check{\rho}} + \check{c}_{\check{\rho}+1}\check{x}^{\check{\rho}+1}$. Коэффициент

$$\check{c}_{\check{\rho}+1} = -\check{c}_{\check{\rho}}\frac{2b + 2a - 2c + 1}{2\check{\rho}}. \tag{2.4.16}$$

Если $1 < \operatorname{Re}\check{\rho} < 2$ третье приближение разложения (2.4.15) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_{\check{\rho}}\check{x}^{\check{\rho}} + \check{c}_{2\check{\rho}-1}\check{x}^{2\check{\rho}-1}$. Коэффициент

$$\check{c}_{2\check{\rho}-1} = -\check{c}_{\check{\rho}}^2. \tag{2.4.17}$$

Если $\operatorname{Re}\check{r} = 2$, $\operatorname{Im}\rho \neq 0$ третье приближение разложения (2.4.15) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_{\check{\rho}}\check{x}^{\check{\rho}} + \check{c}_{\check{\rho}+1}\check{x}^{\check{\rho}+1} + \check{c}_{2\check{\rho}-1}\check{x}^{2\check{\rho}-1}$, где коэффициенты $\check{c}_{\check{\rho}+1}$, и $\check{c}_{2\check{\rho}-1}$ определены формулами (2.4.16) и (2.4.17) соответственно. В случае $\check{\rho} = 2$ третье приближение разложения (2.4.15) имеет вид $\check{y} = \check{x} + \check{c}_2\check{x}^2 + \check{c}_3\check{x}^3$. Коэффициенты $\check{c}_2$ – ненулевая произвольная постоянная, $\check{c}_3 = -\check{c}_2\,(2b + 2a - 2\check{c} + 1 + 4\check{c}_2)/4$ есть сумма выражений (2.4.16) и (2.4.17).

В случае $\operatorname{Re}\sqrt{-2b} = 0$ имеем два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{H}_6^{\tau}:\ \check{y} = \check{x} + \check{c}_{\check{\rho}}\check{x}^{\check{\rho}} + \sum_{\check{s}} \check{c}_{\check{s}}\check{x}^{\check{s}},\ \tau = \pm 1, \tag{2.4.18}$$

где $\check{\rho} = 1 + \sqrt{-2b}$, $\check{s}$ пробегает множество $\{\check{\rho} + l(\check{\rho}-1) + m;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коффициенты: $\check{c}_{\check{\rho}}$ – ненулевая произвольная постоянная, остальные $\check{c}_{\check{s}}$ постоянны и однозначно определены.

Здесь имеется также однопараметрическое семейство $\mathcal{H}_3$, которое определяется формулами (2.4.11), (2.4.12).

2.4.4. Сводка результатов и их обсуждение.

Теорема 2.4.1. *Ребру* $\Gamma_1^{(1)}$ *соответствуют 6 семейств разложений решений типов* $1-3$*:*

$\mathcal{H}_1 = \check{\mathcal{B}}_1$, которое существует при $b \neq d - 1/2 \neq 0$, определяется формулами (2.4.5), (2.4.8), (2.4.9) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{H}_2 = \check{\mathcal{B}}_2$, которое существует при $d \neq 1/2$, определяется формулами (2.4.5), (2.4.8), (2.4.9) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{H}_3 = \check{\mathcal{B}}_3$, которое существует при $b \neq d - 1/2$, определяется формулами (2.4.11), (2.4.12) *и имеет 1 параметр;*
$\mathcal{H}_4 = \check{\mathcal{B}}_4$ и $\mathcal{H}_5 = \check{\mathcal{B}}_5$ существуют при $b = d - 1/2$, определяются формулами (2.4.13), (2.4.14) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{H}_6 = \check{\mathcal{B}}_6$ существует при $d = 1/2$, определяется формулой (2.4.15) *и имеет 1 параметр;*

и 6 семейств экзотических разложений решений с $\tau = \pm 1$:

$\mathcal{H}_1^\tau = \check{\mathcal{B}}_1^\tau$, которые существуют при $b \neq d - 1/2 \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{1-2d} - \sqrt{-2b}) = 0$, определяются формулой (2.4.5) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{H}_2^\tau = \check{\mathcal{B}}_2^\tau$, которые существуют при $b \neq 0$, $d \neq 1/2$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{1-2d} + \sqrt{-2b}) = 0$, определяются формулой (2.4.5) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{H}_6^\tau = \check{\mathcal{B}}_6^\tau$, которые существуют при $b \neq 0$, $d = 1/2$, $\mathrm{Re}\sqrt{-2b} = 0$, определяются формулой (2.4.18) *и имеют 1 параметр;*

$\check{\mathcal{B}}_i$ означает семейство, полученное из $\mathcal{B}_i$ симметрией (2.1.9) [63].

Семейства $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_4$, $\mathcal{H}_5$ сложные, семейства $\mathcal{H}_1^\tau, \mathcal{H}_2^\tau, \mathcal{H}_6^\tau$ экзотические, остальные – типов 1 и 2.

§5. Разложения вблизи бесконечности

С помощью симметрии (2.1.7) из разложений решений уравнения (2.1.1) при $x \to 0$ получим разложения его решений при $x \to \infty$. Для этого в разложения, найденные при $x \to 0$, делается подстановка (2.1.7), вычисляются новые разложения со звездочками при $x \to \infty$, и звездочки опускаются.

Подробно рассмотрим преобразование разложения, соответствующего вершине $\Gamma_4^{(0)}$, в разложение, соответствующее вершине $\Gamma_2^{(0)}$. Остальные разложения вблизи бесконечности, соответствующие ребрам $\Gamma_2^{(1)}$ и $\Gamma_3^{(1)}$, перечислим.

2.5.1. Разложения, соответствующие вершине $\Gamma_2^{(0)}$, получим из разложений, образующих семейства $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{01}^\tau$, соответствующих вершине $\Gamma_4^{(0)}$ и определяемых формулой (2.2.6), где r – произвольный и удовлетворяет условиям $\mathrm{Re}\,r = 0$, $r \neq 0$ (семейства $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\tau = \mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}\,r)$), $0 < \mathrm{Re}\,r < 1$ (семейство $\mathcal{A}_0$) и $\mathrm{Re}\,r = 1$, $r \neq 1$ (семейства $\mathcal{A}_{01}^\tau$, $\tau = \mathrm{sgn}\,(\mathrm{Im}\,r)$), s пробегает множество (2.2.5), комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, остальные c_s постоянны и однозначно определены.

Подставляя в (2.1.2) выражения $x = 1/x^*$, $y = 1/y^*$ и выражая y^*, получаем дробь

$$y^* = 1/(c_r x^{*-r} + \sum_s c_s x^{*-s}), \tag{2.5.1}$$

где $c_r \neq 0$ – произвольная постоянная, остальные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены, показатель степени r – произвольный, $0 \leq \operatorname{Re} r \leq 1$, $r \neq 0$, $r \neq 1$, s пробегает множество (2.2.5). Так как $\left|\sum_s \frac{c_s}{c_r} x^{*-s+r}\right| < 1$ при $x^* \to \infty$, то (2.5.1) можно разложить в ряд

$$y^* = \frac{x^{*r}}{c_r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\sum_s \frac{c_s}{c_r} \, x^{*-s+r} \right)^n . \tag{2.5.2}$$

Выписывая первые два члена ряда (2.5.2), получаем разложение

$$y^* = \frac{1}{c_r} x^{*r} - \sum_s^{\infty} \frac{c_s}{c_r^2} \, x^{*-s+2r} + \ldots . \tag{2.5.3}$$

Положим

$$c_r^* = 1/c_r, \;\; c_{s^*}^* = -c_s/c_r^2, \;\; s^* = -s + 2r. \tag{2.5.4}$$

Наконец, учитывая (2.2.5) и (2.5.4), получаем разложение

$$y^* = c_r^* x^{*r} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* \, x^{*s^*}, \tag{2.5.5}$$

где показатель степени r – произвольный, $\operatorname{Re} r = 0, r \neq 0$ ($\mathcal{A}_{\infty 0}^{\tau}$), $0 < \operatorname{Re} r < 1$ ($\mathcal{A}_{\infty}$), $\operatorname{Re} r = 1$, $r \neq 1$ ($\mathcal{A}_{\infty 1}^{\tau}$), $s^* \in \{r - lr + m(r-1);\; l, m \geq 0;\; l + m > 0;\; l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты c_r^* – ненулевая произвольная постоянная, остальные $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Таким образом, при $x^* \to \infty$ имеем пять двупараметрических (по c_r^* и r) семейств разложений, определенных формулой (2.5.5). А именно: четыре семейства экзотических разложений $\mathcal{A}_{\infty 0}^{\tau}$ и $\mathcal{A}_{\infty 1}^{\tau}$ и одно семейство степенных разложений $\mathcal{A}_{\infty}$.

В случае $\operatorname{Re} r \in (0, 1)$ вычислим второе приближение решения. Рассмотрим четыре случая.

В случае $1/2 < \operatorname{Re} r < 1$ второе приближение решения есть $y^* = c_r^* x^{*r} + c_{2r-1}^* x^{*2r-1}$. Коэффициент

$$c_{2r-1}^* = c_r^{*2} \, \frac{2(a+d) + (r-1)^2 - 1}{2(r-1)^2}. \tag{2.5.6}$$

В случае $0 < \operatorname{Re} r < 1/2$ второе приближение решения есть $y^* = c_r^* x^{*r} + c_0^*$. Коэффициент

$$c_0^* = \frac{2(b+c) - r^2}{2r^2}. \tag{2.5.7}$$

В случае $r = 1/2$ второе приближение решения есть $y^* = c^*_{1/2}\sqrt{x^*} + c^*_0$, где $c^*_{1/2}$ – произвольная постоянная, коэффициент $c^*_0 = (-1 + 8(b+c) - 3c^{*2}_{1/2} + 8c^{*2}_{1/2}(a+d))/2$.

В случае $\operatorname{Re} r = 1/2, \operatorname{Im} r \neq 0$ второе приближение решения есть $y^* = c^*_r x^{*r} + c^*_0 + c^*_{2r-1}x^{*2r-1}$, где коэффициенты c^*_{2r-1} и c^*_0 определены ранее формулами (2.5.6) и (2.5.7) соответственно.

2.5.2. Разложения решений, соответствующие ребру $\Gamma^{(1)}_2$. Здесь рассматриваем три случая: $-b \neq c \neq 0$, $-b = c \neq 0$ и $b \neq 0$, $c = 0$.

Разложения решений при $-b \neq c \neq 0$. Положим $\theta^*_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{-2b}$, $i = 1, 2$. Для каждого фиксированного i, в зависимости от значения θ^*_i возможен один из трех случаев.

Случай 1. $\operatorname{Re}\theta^*_i = 0$. Имеем два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{D}^\tau_i: \quad y^* = c^*_{0i} + \sum_{s^*} c_{s^*i}x^{*s}, \ \tau = \pm 1, \tag{2.5.8}$$

где $s^* \in \{-l + m\tau\theta^*_i;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: $c^*_{s^*i}$ с $s^* = \tau\theta^*_i$ – произвольная постоянная, c^*_{0i} получается из (2.1.7), (2.3.3) [63] и (2.5.4)

$$c^*_{0i} = \frac{b + (-1)^i\sqrt{-bc}}{b+c}, \ i = 1, 2, \tag{2.5.9}$$

остальные $c^*_{s^*i}$ постоянны и однозначно определены.

Если $c^*_{s^*i} = 0$ с $s^* = \tau\theta^*_i$, то второе приближение разложений решений (2.5.8) есть $y^* = c^*_{0i} + c^*_{-1i}x^{*-1}$. Из (2.1.7), (2.3.13) [63] и (2.5.4) следует, что коэффициент

$$c^*_{-1i} = (-1)^i\sqrt{-\frac{c}{b}}\,\frac{\left(\sqrt{-b} + (-1)^i\sqrt{c}\right)^2 - a - d}{1 - 2\left(\sqrt{-b} + (-1)^i\sqrt{c}\right)^2}. \tag{2.5.10}$$

В случае $c^*_{s^*i} = 0$ с $s^* = \tau\theta^*_i$ разложения (2.5.8) являются разложениями по целым степеням x. Семейства таких разложений обозначим $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$.

Положим $k_i = \theta^*_i$, если $\operatorname{Re}\theta^*_i < 0$ и $k_i = -\theta^*_i$, если $\operatorname{Re}\theta^*_i > 0$.

Случай 2. $\operatorname{Re}\theta^*_i \neq 0$, $\theta^*_i \notin \mathbb{Z}$. Имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{D}_i: \ y^* = c^*_{0i} + \sum_{s^*} c^*_{s^*i}x^{*s^*}, \ i = 1, 2, \tag{2.5.11}$$

где $s^* \in \{-l + mk_i;\ l, m \in \mathbb{Z};\ l, m \geq 0;\ l+m > 0\}$, комплексные коэффициенты таковы: c^*_{0i} определен формулой (2.5.9), $c^*_{k_ii}$ – произвольный, остальные $c^*_{s^*i}$ постоянны и однозначно определены. Второе приближение разложений решений (2.5.11) зависит от расположения числа

$\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i < -1$, тогда второе приближение решений имеет вид $y^* = c^*_{0i} + c^*_{-1i} x^{*-1}$, коэффициент c^*_{-1i} определен формулой (2.5.10). Если $-1 < \operatorname{Re} k_i < 0$, то второе приближение решения будет иметь вид $y^* = c^*_{0i} + c^*_{k_i i} x^{*k_i}$, где коэффициент $c^*_{k_i i}$ – произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = -1$, то второе приближение решения будет иметь вид $y^* = c^*_{0i} + c^*_{-1i} x^{*-1} + c^*_{k_i i} x^{*k_i}$, где коэффициенты таковы: $c^*_{k_i i}$ – произвольный, c^*_{-1i} определен формулой (2.5.10).

С л у ч а й 3. $\theta^*_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Имеем однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{D}_i: \ y^* = c^*_{0i} + \sum_{s^*=1}^{+\infty} c^*_{-s^* i} (\ln x^*) x^{*-s^*}, \ i = 1, 2, \tag{2.5.12}$$

где коэффициенты таковы: c^*_{0i} определен формулой (2.3.3); $c^*_{k_i i} = \alpha^*_{k_i i} + \beta^*_{k_i i} \ln x^*$, где $\alpha^*_{k_i i}$ – произвольная постоянная, коэффициент $\beta^*_{k_i i}$ постоянный и однозначно определенный; комплексные коэффициенты $c^*_{s^* i}$ многочлены от $\ln x^*$, которые однозначно определяются. Второе приближение разложения решения (2.5.12) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = -1$, тогда второе приближение решения имеет вид $y^* = c^*_{0i} + c^*_{-1i} x^{*-1}$. Коэффициент

$$c^*_{-1i} = \alpha^*_{-1i} + (-1)^i \sqrt{-\frac{c}{b}}\, \frac{\left(\sqrt{-b} + (-1)^i \sqrt{c}\right)^2 - a - d}{2} \ln x^*, \tag{2.5.13}$$

где α^*_{-1i} – произвольная постоянная.

Также имеется однопараметрическое семейство сложных разложений

$$\mathcal{D}_3: \ y^* = \varphi^*_0 + \sum_{\sigma^*=1}^{\infty} \varphi^*_{-\sigma^*} x^{-*\sigma^*}, \tag{2.5.14}$$

где

$$\varphi^*_0 = \frac{b+c}{2} \ln^2 x^* + c^*_1 \ln x^* + \sum_{s^*=0}^{\infty} c^*_{-s^*} \ln^{-s^*} x^*, \tag{2.5.15}$$

комплексные коэффициенты таковы: c^*_1 – произвольная постоянная, $c^*_{-s^*}$ – постоянны и однозначно определены; $\varphi^*_{-\sigma^*}$ ряды по убывающим степеням $\ln x^*$.

Разложения решений при $-b = c \neq 0$. В этом случае существуют два однопараметрических семейства сложных разложений

$$\mathcal{D}_{3+j}: \ y^* = \phi^*_{0j} + \sum_{\sigma^*=1}^{\infty} \phi^*_{-\sigma^* j} x^{*-\sigma^*}, \ j = 1, 2, \tag{2.5.16}$$

где

$$\phi_{0j}^* = (-1)^j \sqrt{-2b} \ln x^* + c_{0j}^* + \sum_{s^*=1}^{\infty} c_{-s^*j}^* \ln^{-s^*} x^*, \ j = 1, \, 2, \qquad (2.5.17)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{0j}^* – произвольная постоянная, $c_{-s^*j}^*$ – постоянны и однозначно определены; $\phi_{-\sigma^*j}^*$ ряды по убывающим степеням $\ln x^*$.

Семейства разложений $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_2^\tau$ сохраняются из случая $-b \neq c \neq 0$. В качестве θ_2^* берем $2\sqrt{-2b}$ с $\operatorname{Re}\sqrt{-2b} \leq 0$. В зависимости от его значения возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re}\theta_2^* = 0$, два однопараметрических семейства экзотических разложений $\mathcal{D}_2^\tau$ определяются формулой (2.5.8)), случай 2 ($\operatorname{Re}\theta_2^* \neq 0$, $\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений $\mathcal{D}_2$ определяется формулой (2.5.11)), случай 3 ($\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений $\mathcal{D}_2$ определяется формулой (2.5.12)).

Разложения решений при $b \neq 0$, $c = 0$. При $\operatorname{Re}\sqrt{-2b} < 0$ имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{D}_6 : \ y^* = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \qquad (2.5.18)$$

где $\rho^* = \sqrt{-2b}$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l\rho^* - m; \, l, \, m \geq 0; \, l + m > 0; \, l, \, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: $c_{\rho^*}^*$ – ненулевая произвольная постоянная, остальные $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re}\rho^* < -1$, то третье приближение разложения (2.5.18) имеет вид $y = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{\rho^*-1}^* x^{*\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c_{\rho^*-1}^* = c_\rho^* \frac{a + b + d}{\rho^* - 1}. \qquad (2.5.19)$$

Если $-1 < \operatorname{Re}\rho^* < 0$, то третье приближение разложения (2.5.18) имеет вид $y^* = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{2\rho^*}^* x^{*2\rho^*}$. Коэффициент

$$c_{2\rho^*}^* = -c_\rho^{*2}. \qquad (2.5.20)$$

Если $\operatorname{Re}\rho^* = -1$, $\operatorname{Im}\rho^* \neq 0$, то третье приближение разложения (2.5.18) имеет вид $y^* = 1 + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + c_{\rho^*-1}^* x^{*\rho^*-1} + c_{2\rho^*}^* x^{*2\rho^*}$, где коэффициенты $c_{\rho^*-1}^*$, и $c_{2\rho^*}^*$ определены формулами (2.5.19) и (2.5.20) соответственно. Если $\rho^* = -1$, то третье приближение разложения (2.5.18) имеет вид $y^* = 1 + c_{-1}^* x^{*-1} + c_{-2}^* x^{*-2}$. Коэффициенты c_{-1}^* – ненулевая произвольная постоянная, $c_{-2}^* = -c_{-1}^* \, (a + b + d + 2c_{-1}^*)/2$ есть сумма выражений (2.5.19) и (2.5.20).

Если $\operatorname{Re}\sqrt{-2b} = 0$ существуют два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{D}_6^\tau: \; y^* = 1 + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c^*_{s^*} x^{s^*}, \tag{2.5.21}$$

где $\rho^* = \sqrt{-2b}$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l\rho^* - m;\, l,\, m \geq 0;\, l + m > 0;\, l,\, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \pm 1$, комплексные коэффициенты: $c^*_{\rho^*}$ – ненулевая произвольная постоянная, все $c^*_{s^*}$ постоянны и однозначно определены.

Также здесь имеется однопараметрическое семейство сложных разложений $\mathcal{D}_3$, которое определяется формулами (2.5.14), (2.5.15).

2.5.3. Разложения решений, соответствующие ребру $\Gamma_3^{(1)}$. Здесь также рассматриваем три случая: $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, $a = -d + 1/2 \neq 0$ и $d = 1/2,\; a \neq 0$.

Разложения решений при $a \neq -d + 1/2 \neq 0$. Положим $\theta_i^* \overset{\text{def}}{=} \sqrt{1-2d} + (-1)^i\sqrt{2a},\; i = 1,\, 2$. Для каждого фиксированного i, в зависимости от значения θ_i^* возможен один из трех случаев.

С л у ч а й 1. $\operatorname{Re}\theta_i^* = 0$. Имеем два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{G}_i^\tau: \; y^* = c^*_{1i} x^* + \sum_{s^*} c^*_{s^* i} x^{*s^*}, \; i = 1,\, 2, \; \tau = \pm 1, \tag{2.5.22}$$

где $s* \in \{1 - l + m\tau\theta_i^*;\; l{,}m \geq 0;\; l + m > 0;\; l{,}m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты: $c^*_{s^* i}$ с $s^* = 1 + \tau\theta_i^*$ – произвольная постоянная, c_{1i} получается из (2.1.7), (2.4.6) и (2.5.4)

$$c^*_{1i} = 1 + (-1)^i\sqrt{\frac{1-2d}{2a}}, \tag{2.5.23}$$

остальные $c^*_{s^* i}$ постоянны и однозначно определены.

Если $c^*_{s^* i} = 0$ с $s^* = 1 + \tau\theta_i^*$ второе приближение разложений решений (2.5.22) есть $y^* = c^*_{1i}x^* + c^*_{0i}$. Из (2.1.7), (2.4.7) [63] и (2.5.4) следует, что коэффициент

$$c^*_{0i} = (-1)^i\sqrt{\frac{1-2d}{2a}}\, \frac{\left(\sqrt{2a} + (-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2 + 2b + 2c - 1}{2 - 2\left(\sqrt{2a} + (-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2}. \tag{2.5.24}$$

В случае $c^*_{s^* i} = 0$ с $s^* = 1 + \tau\theta_i^*$ разложения (2.5.22) являются разложениями по целым степеням x. Семейства таких разложений обозначим $\mathcal{G}_i,\; i = 1, 2$.

Положим $k_i = 1 + \theta_i^*$, если $\operatorname{Re}\theta_i^* < 0$ и $k_i = 1 - \theta_i^*$, если $\operatorname{Re}\theta_i^* > 0$.

С л у ч а й 2. $\operatorname{Re}\theta_i^* \neq 0,\ \ \theta_i^* \notin \mathbb{Z}$. Здесь имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{G}_i:\ y^* = c_{1i}^* x^* + \sum_{s^*} c_{s^*i}^* x^{*s^*},\ \ i = 1,\, 2, \tag{2.5.25}$$

где комплексные коэффициенты таковы: c_{1i}^* определен формулой (2.5.23), $c_{k_i i}^*$ – произвольный, остальные $c_{s^*i}^*$ постоянны и однозначно определены, s^* пробегает множество $\{1 - l + mk_i;\ \ l,\, m \in \mathbb{Z};\ \ l,\, m \geq 0;\ \ l + m > 0\}$. Второе приближение разложений решений (2.5.25) зависит от расположения числа $\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i < 0$, тогда второе приближение решений имеет вид $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{0i}^*$, коэффициент c_{0i}^* определен формулой (2.5.24). Если $0 < \operatorname{Re} k_i < 1$, то второе приближение решений будет иметь вид $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{k_i i}^* x^{*k_i}$, где коэффициент $c_{k_i i}^*$ – произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = 0$, то второе приближение решений есть $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{0i}^* + c_{k_i i}^* x^{*k_i}$, где коэффициенты таковы: $c_{k_i i}^*$ – произвольный, c_{0i}^* определен формулой (2.5.24).

С л у ч а й 3. $\theta_i^* \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ Имеем однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений

$$\mathcal{G}_i:\ y^* = c_{1i}^* x^* + \sum_{s^*=0}^{+\infty} c_{s^*i}^*(\ln x^*) x^{*s^*},\ \ i = 1,\, 2, \tag{2.5.26}$$

где коэффициенты таковы: c_{1i}^* определен формулой (2.5.23), коэффициент $c_{k_i i}^* = \alpha_{k_i i}^* + \beta_{k_i i}^* \ln x^*$, $\alpha_{k_i i}^*$ – произвольная постоянная, коэффициент $\beta_{k_i i}^*$ постоянный и однозначно определенный, остальные $c_{s^*i}^*$ – многочлены от $\ln x^*$, которые однозначно определяются. Второе приближение разложения решения (2.5.22) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = 0$, тогда второе приближение решения имеет вид $y^* = c_{1i}^* x^* + c_{0i}^*$. Коэффициент

$$c_{0i}^* = \alpha_{0i}^* + (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{2a}}\, \frac{\left(\sqrt{2a} + (-1)^i\sqrt{1-2d}\right)^2 + 2b + 2c^* - 1}{4} \ln x^*, \tag{2.5.27}$$

где α_{0i}^* – произвольная постоянная.

Здесь имеется также однопараметрическое семейство

$$\mathcal{G}_3:\ y^* = \varphi_1^* x^* + \sum_{\sigma^*=0}^{\infty} \varphi_{-\sigma^*}^* x^{*-\sigma^*}, \tag{2.5.28}$$

где

$$\varphi_1^* = \frac{4}{1-2a-2d}\, \frac{1}{\ln^2 x^*} + \frac{c_{-3}^*}{\ln^3 x^*} + \sum_{s^*=4}^{\infty} \frac{c_{-s^*}^*}{\ln^{s^*} x^*}, \tag{2.5.29}$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-3}^* – произвольная постоянная, $c_{-s^*}^*$ – постоянны и однозначно определены; $\varphi_{\sigma^*}^*$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

Разложения решений при $a = -d + 1/2 \neq 0$**.** Имеем два однопараметрических семейства сложных разложений

$$\mathcal{G}_{3+j}: \; y^* = \phi^*_{1j} x^* + \sum_{\sigma^*=0}^{\infty} \phi^*_{-\sigma^* j} x^{*-\sigma^*}, \; j = 1, \, 2, \tag{2.5.30}$$

где

$$\phi^*_{1j} = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x^*} + \frac{c^*_{-2j}}{\ln^2 x^*} + \sum_{s^*=3}^{\infty} \frac{c^*_{-s^* j}}{\ln^{s^*} x^*}, \tag{2.5.31}$$

комплексные коэффициенты таковы: c^*_{-2j} – произвольная постоянная, $c^*_{-s^*j}$ – постоянны и однозначно определены; $\phi^*_{\sigma^* j}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейства разложений $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_2^\tau$ сохраняются из случая $a \neq -d + 1/2 \neq 0$. В качестве θ_2^* берем $2\sqrt{2a}$ с $\operatorname{Re}\sqrt{2a} \leq 0$. В зависимости от его значения возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re}\theta_2^* = 0$, однопараметрические семейства экзотических разложений $\mathcal{G}_2^\tau$ определяются формулой (2.5.22)), случай 2 ($\operatorname{Re}\theta_2^* \neq 0$, $\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений $\mathcal{G}_2$ определяется формулой (2.5.25)), случай 3 ($\theta_2^* \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений $\mathcal{G}_2$ определяется формулой (2.5.26)).

Разложения решений при $d = 1/2, \;\; a \neq 0$**.** Если $\operatorname{Re}\sqrt{2a} < 0$ имеем однопараметрическое семейство степенных разложений

$$\mathcal{G}_6: \; y^* = x^* + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c^*_{s^*} x^{*s^*}, \tag{2.5.32}$$

где $\rho^* = 1 + \sqrt{2a}$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l(\rho^* - 1) - m; \; l, \, m \geq 0; \; l + m > 0; \; l, \, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: $c^*_{\rho^*}$ – ненулевая произвольная постоянная, остальные $c^*_{s^*}$ постоянны и однозначно определены.

Если $\operatorname{Re}\rho^* < 0$, то третье приближение разложения (2.5.32) имеет вид $y = x^* + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + c^*_{\rho^*-1} x^{*\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c^*_{\rho^*-1} = c^*_{\rho^*} \frac{1 - 2(a + b + c)}{2(\rho^* - 2)}. \tag{2.5.33}$$

Если $0 < \operatorname{Re}\rho^* < 1$, то третье приближение разложения (2.5.32) имеет вид $y^* = x^* + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + c^*_{2\rho^*-1} x^{*2\rho^*-1}$. Коэффициент

$$c^*_{2\rho^*-1} = c^{*2}_{\rho^*}. \tag{2.5.34}$$

Если $\operatorname{Re}\rho^* = 0$, $\operatorname{Im}\rho^* \neq 0$, то третье приближение разложения (2.5.32) имеет вид $y^* = x^* + c^*_{\rho^*} x^{*\rho^*} + c^*_{\rho^*-1} x^{*\rho^*-1} + c^*_{2\rho^*-1} x^{*2\rho^*-1}$, где коэффициенты $c^*_{\rho^*-1}$, и $c^*_{2\rho^*-1}$ определены формулами (2.5.33) и (2.5.34) соответственно. Если $\rho^* = 0$, то третье приближение разложения (2.5.32) имеет вид

$y^* = x^* + c_0^* + c_{-1}^* x^{*-1}$. Коэффициенты c_0^* – ненулевая произвольная постоянная, $c_{-1}^* = c_0^*(-1 + 2(a+b+c) + 4c_0^*)/4$ есть сумма выражений (2.5.33) и (2.5.34).

Если $\operatorname{Re}\sqrt{2a} = 0$ существуют два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{G}_6^\tau : \; y^* = x^* + c_{\rho^*}^* x^{*\rho^*} + \sum_{s^*} c_{s^*}^* x^{*s^*}, \tag{2.5.35}$$

где $\rho^* = 1 + \sqrt{2a}$, s^* пробегает множество $\{\rho^* + l(\rho^* - 1) - m;\, l,\, m \geq 0;\, l + m > 0;\, l,\, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \pm 1$, комплексные коэффициенты: $c_{\rho^*}^*$ – ненулевая произвольная постоянная, все $c_{s^*}^*$ постоянны и однозначно определены.

Здесь имеется однопараметрическое семейство сложных разложений $\mathcal{G}_3$. Оно сохраняется из случая $a \neq 1/2 - d \neq 0$ и определяется формулой (2.5.28).

2.5.4. Сводка результатов.

Теорема 2.5.1. *При* $x \to \infty$ *и* $a \cdot b \neq 0$ *уравнение* (2.1.1) *имеет 13 семейств разложений решений типов* $1 - 3$*:*

$\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_0^*$ *определяется формулой* (2.5.5) *и имеет 2 параметра;*

$\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}_1^*$, *которое существует при* $-b \neq c \neq 0$, *определяется формулами* (2.5.8), (2.5.11), (2.5.12) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{D}_2 = \mathcal{B}_2^*$, *которое существует при* $c \neq 0$, *определяется формулами* (2.5.8), (2.5.11), (2.5.12) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{D}_3 = \mathcal{B}_3^*$, *которое существует при* $-b \neq c$, *определяется формулами* (2.5.14), (2.5.15) *и имеет 1 параметр;*
$\mathcal{D}_4 = \mathcal{B}_4^*$ *и* $\mathcal{D}_5 = \mathcal{B}_5^*$ *существуют при* $-b = c \neq 0$, *определяются формулами* (2.5.16), (2.5.17) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{D}_6 = \mathcal{B}_6^*$ *существует при* $c = 0$, *определяется формулой* (2.5.18) *и имеет 1 параметр;*

$\mathcal{G}_1 = \mathcal{H}_1^*$, *которое существует при* $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, *определяется формулами* (2.5.22), (2.5.25), (2.5.26) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{G}_2 = \mathcal{H}_2^*$, *которое существует при* $d \neq 1/2$,*определяется формулами* (2.5.22), (2.5.25), (2.5.26) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{G}_3 = \mathcal{H}_3^*$, *которое существует при* $a \neq -d + 1/2 \neq 0$,*определяется формулами* (2.5.28), (2.5.29) *и имеет 1 параметр;*
$\mathcal{G}_4 = \mathcal{H}_4^*$ *и* $\mathcal{G}_5 = \mathcal{H}_5^*$ *существуют при* $a = -d + 1/2 \neq 0$, *определяются формулами* (2.5.30), (2.5.31) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{G}_6 = \mathcal{H}_6^*$ *существует при* $d = 1/2$, *определяется формулой* (2.5.32) *и имеет 1 параметр;*

и 16 семейств экзотических разложений решений с $\tau = \pm 1$*:*

$\mathcal{A}^\tau_{\infty 0} = \mathcal{A}^{\tau *}_{00}$ *определяется формулой* (2.5.5) *и имеет 2 параметра;*
$\mathcal{A}^\tau_{\infty 1} = \mathcal{A}^{\tau *}_{01}$ *определяется формулой* (2.5.5) *и имеет 2 параметра;*
$\mathcal{D}^\tau_1 = \mathcal{B}^{\tau *}_1$, *которые существуют при* $-b \neq c \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{2c} - \sqrt{-2b}) = 0$, *определяются формулой* (2.5.8) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{D}^\tau_2 = \mathcal{B}^{\tau *}_2$, *которые существуют при* $b \neq 0,\ c \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{2c} + \sqrt{-2b}) = 0$, *определяются формулой* (2.5.8) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{D}^\tau_6 = \mathcal{B}^{\tau *}_6$, *которые существуют при* $b \neq 0,\ c = 0$, $\mathrm{Re}\,\sqrt{-2b} = 0$, *определяются формулой* (2.5.21) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{G}^\tau_1 = \mathcal{H}^{\tau *}_1$, *которые существуют при* $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{1-2d} - \sqrt{2a}) = 0$, *определяются формулой* (2.5.22) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{G}^\tau_2 = \mathcal{H}^{\tau *}_2$, *которые существуют при* $a \neq 0,\ d \neq 1/2$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{1-2d} + \sqrt{2a}) = 0$, *определяются формулой* (2.5.22) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{G}^\tau_6 = \mathcal{H}^{\tau *}_6$, *которые существуют при* $a \neq 0,\ d = 1/2$, $\mathrm{Re}\,\sqrt{2a} = 0$, *определяются формулой* (2.5.35) *и имеют 1 параметр;*

$\mathcal{A}^*_0$, $\mathcal{B}^*_i$ и $\mathcal{H}^*_i$ означают семейства, полученные из $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_i$ и $\mathcal{H}_i$ симметрией (2.1.7) [63].

Семейства $\mathcal{A}^\tau_{\infty 0}$, $\mathcal{A}^\tau_{\infty 1}$, $\mathcal{D}^\tau_1$, $\mathcal{D}^\tau_2$, $\mathcal{D}^\tau_6$, $\mathcal{G}^\tau_1$, $\mathcal{G}^\tau_2$, $\mathcal{G}^\tau_6$ – экзотические, семейства $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$, $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$, $\mathcal{G}_5$ – сложные, остальные – типов 1 и 2.

V. Асимптотические разложения решений уравнения P6 вблизи единицы

С помощью симметрии (2.1.10) из разложений решений при $x \to 0$ получаем разложения решений при $x \to 1$. Здесь приведены только результаты без выводов.

§1. Разложения вблизи единицы при $a \cdot c \neq 0$

5.1.1. Двупараметрические семейства разложений. Одно двупараметрическое семейство степенных разложений решений

$$\mathcal{A}_1: \quad y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \tag{5.1.1}$$

где показатель степени r – произвольный и удовлетворяет неравенствам $0 < \mathrm{Re}\, r < 1$, а $s \in \{r + lr + m(1-r);\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$, $c_r \neq 0$, c_r – произвольная комплексная постоянная, остальные комплексные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены.

Если $1 > \mathrm{Re}\, r > 1/2$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_1(1-x)$.

$$c_1 = \frac{2(c+d) + (r-1)^2 - 1}{2(r-1)^2}. \tag{5.1.2}$$

Если $0 < \operatorname{Re} r < 1/2$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_r(1 - x)^r + c_{2r}(1-x)^{2r}$

$$c_{2r} = -c_r^2 \frac{2(a+b)+r^2}{2r^2}. \tag{5.1.3}$$

Если $\operatorname{Re} r = 1/2, \operatorname{Im} r \neq 0$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_1(1-x) + c_{2r}(1-x)^{2r}$, где коэффициенты c_1 и c_{2r} определены ранее формулами (5.1.2) и (5.1.3) соответственно. Если $r = 1/2$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_{1/2}\sqrt{1-x} + c_1(1-x)$, где $c_{1/2}$ – произвольная постоянная, коэффициент $c_1 = (-3+8(c+d)-c_{1/2}^2-8c_{1/2}^2(a+b))/2$.

Имеем четыре двупараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{A}_{1i}^{\tau}: \quad y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, i = 0, 1,\ \tau = \pm 1, \tag{5.1.4}$$

где $x \to 1$, комплексные показатели степени таковы: r – произвольный и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} r = i,\ r \neq i\ \ (\mathcal{A}_{1i}^{\tau},\ \tau = (-1)^i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)),\ i = 0,\, 1, \tag{5.1.5}$$

$s \in \{r + lr + m(1-r);\ l,m \geq 0;\ l + m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

5.1.2. Разложения решений при $a \neq -b \neq 0$**.** Положим $\theta_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2a} + (-1)^i\sqrt{-2b}$, где $i = 1,\, 2$. Для каждого фиксированного i, в зависимости от значения θ_i возможен один из трех случаев.

С л у ч а й 1. $\operatorname{Re}\theta_i = 0$ имеем однопараметрические семейства экзотических разложений

$$\mathcal{E}_i^{\tau}: \quad y = c_{0i} + \sum_s c_{si}(1-x)^s, i = 1,\, 2,\ \tau = \pm 1 \tag{5.1.6}$$

где $s \in \{l + m\tau\theta_i;\ l,m \geq 0;\ l + m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты:

$$c_{0i} = (-1)^i \sqrt{-\frac{b}{a}}, \tag{5.1.7}$$

c_{si} с $s = \tau\theta_i$ – произвольная постоянная, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены.

Если $c_{si} = 0$ с $s = \tau\theta_i$ семейство степенных разложений (5.1.6) обозначаем $\mathcal{E}_i$.

В случае $c_{si} = 0$ с $s = \tau\theta_i$ второе приближение разложений решений (5.1.6) есть $y = c_{0i} + c_{1i}(1-x)$, где

$$c_{1i} = (-1)^i \sqrt{\frac{-b}{a}}\, \frac{c + d - (\sqrt{a} + (-1)^i\sqrt{-b})^2}{1 - 2(\sqrt{a} + (-1)^i\sqrt{-b})^2}. \tag{5.1.8}$$

Пусть $k_i = \theta_i$, если $\operatorname{Re}\theta_i > 0$ и $k_i = -\theta_i$, если $\operatorname{Re}\theta_i < 0$.

С л у ч а й 2. $\operatorname{Re}\theta_i \neq 0$, $\theta_i \notin \mathbb{Z}$. Здесь имеем семейство степенных разложений решений

$$\mathcal{E}_i: \quad y = c_{0i} + \sum_s c_{si}(1-x)^s,\ i = 1,\ 2, \tag{5.1.9}$$

где $s \in \{l + mk_i,\ l,m \in \mathbb{Z},\ l,m \geq 0,\ l+m > 0\}$. Комплексные коэффициенты таковы: c_{0i} определен формулой (5.1.7), $c_{k_i i}$ – произвольный, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены. Второе приближение разложения решения (5.1.9) зависит от расположения числа $\operatorname{Re} k_i$. Если $\operatorname{Re} k_i > 1$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = c_{0i} + c_{1i}(1-x)$, что аналогично случаю $\operatorname{Re}\theta_i = 0$. Если $0 < \operatorname{Re} k_i < 1$, то второе приближение решения будет иметь вид $y = c_{0i} + c_{k_i i}(1-x)^{k_i}$, где коэффициент $c_{k_i i}$ – произвольный. Если $\operatorname{Re} k_i = 1$, то второе приближение решения будет иметь вид $y = c_{0i} + c_{1i}(1-x) + c_{k_i i}(1-x)^{k_i}$, где коэффициенты $c_{k_i i}$ – произвольный, c_{1i} определен формулой (5.1.8).

С л у ч а й 3. $\operatorname{Re}\theta_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Здесь имеем семейство степенно-логарифмических разложений решений

$$\mathcal{E}_i: \quad y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}(\ln(1-x))(1-x)^s,\ i = 1,\ 2, \tag{5.1.10}$$

Коэффициент $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i}\ln(1-x)$, где $\alpha_{k_i i}$ – произвольная постоянная, коэффициент $\beta_{k_i i}$ постоянный и однозначно определенный, коэффициент c_{0i} определен формулой (5.1.7), остальные c_{si} – многочлены от $\ln(1-x)$, которые однозначно определяются. Здесь разложение (5.1.10) образует однопараметрическое (по $\alpha_{k_i i}$) семейство $\mathcal{E}_i$. Второе приближение разложения решения (5.1.10) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = 1$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = c_{0i} + c_{1i}(1-x)$. Коэффициент

$$c_{1i} = \alpha_{1i} + (-1)^i\sqrt{\frac{-b}{a}}\,\frac{c + d - (\sqrt{a} + (-1)^i\sqrt{-b})^2}{2}\ln(1-x), \tag{5.1.11}$$

где α_{1i} – произвольная постоянная.

Имеем семейство сложных разложений

$$\mathcal{E}_3: \quad y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty}\varphi_\sigma(1-x)^\sigma, \tag{5.1.12}$$

где $\varphi_0 = 1 + \dfrac{2}{a+b}\ln^{-2}(1-x) + c_{-3}\ln^{-3}(1-x) + \displaystyle\sum_{s=4}^{\infty} c_{-s}\ln^{-s}(1-x)$, комплексные коэффициенты таковы: c_{-3} – произвольная постоянная, c_{-s} – постоянны и однозначно определены, φ_σ ряды по убывающим степеням логарифмов.

5.1.3. Разложения решений при $a = -b \neq 0$. Имеем два однопараметрических семейства сложных разложений

$$\mathcal{E}_{3+j}: \quad y = \varphi_{0j} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_{\sigma j}(1-x)^{\sigma}, \tag{5.1.13}$$

где

$$\varphi_{0j} = 1+(-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \ln^{-1}(1-x)+c_{-2j} \ln^{-2}(1-x)+\sum_{s=3}^{\infty} c_{-sj} \ln^{-s}(1-x), j = 1,\ 2,$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-2j} – произвольная постоянная, c_{-sj} – постоянны и однозначно определены, $\varphi_{\sigma j}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейства разложений $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_2^{\tau}$ сохраняются из случая $a \neq b \neq 0$. В качестве значения θ_2 берем $2\sqrt{2a}$ с $\operatorname{Re}\theta_2 \geq 0$. В зависимости от которого возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re}\theta_2 = 0$, однопараметрические семейства экзотических разложений $\mathcal{E}_2^{\tau}$ определяются формулой (5.1.6)), случай 2 ($\operatorname{Re}\theta_2 \neq 0$, $\check{\theta}_2 \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений $\mathcal{E}_2$ определяется формулой (5.1.9)), случай 3 ($\theta_2 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений $\mathcal{E}_2$ определяется формулой (5.1.10)).

5.1.4. Разложения решений при $b = 0$. В этом случае имеем исключительное решение согласно теореме (2.1.4).

$$\mathcal{I}_2: \ y = 1.$$

Имеем одно семейство степенных разложений

$$\mathcal{E}_6: \quad y = c_{\rho}(1-x)^{\rho} + \sum_{s} c_s(1-x)^s, \tag{5.1.14}$$

где коэффициенты таковы: $c_{\rho} \neq 0$, c_{ρ} – произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены, $\rho = \sqrt{2a}$, $\operatorname{Re}\sqrt{2a} > 0$, $s \in \{\rho + l\rho + m;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\operatorname{Re}\rho > 1$, то второе приближение решения есть $y = c_{\rho}(1-x)^{\rho} + c_{\rho+1}(1-x)^{\rho+1}$. Коэффициент

$$c_{\rho+1} = c_{\rho}\,\frac{a-c-d}{\rho+1}. \tag{5.1.15}$$

Если $0 < \operatorname{Re}\rho < 1$, то второе приближение решения есть $y = c_{\rho}(1-x)^{\rho} + c_{2\rho}(1-x)^{2\rho}$. Коэффициент

$$c_{2\rho} = -c_{\rho}^2. \tag{5.1.16}$$

Если $\operatorname{Re}\rho = 1$, $\operatorname{Im}\rho \neq 0$, то второе приближение решения есть $y = c_\rho(1-x)^\rho + c_2(1-x)^2 + c_{2\rho}(1-x)^{2\rho}$, коэффициенты $c_{2\rho}$ и c_2 определены формулами (5.1.15) и (5.1.16) соответственно. Если $\rho = 1$, то второе приближение решения есть $y = c_1(1-x) + c_2(1-x)^2$. Коэффициенты c_1 – произвольная постоянная,

$$c_2 = c_1 \frac{a - c - d - 2c_1}{2}$$

есть сумма (5.1.15) и (5.1.16).

Здесь существуют два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{E}_6^\tau : \quad y = c_\rho(1-x)^\rho + \sum_s c_s(1-x)^s, \tag{5.1.17}$$

где $\rho = \pm\sqrt{2a}$, $\operatorname{Re}\rho = 0$, s пробегает множество $\{\rho + l\rho + m;\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Имеется также однопараметрическое семейство сложных разложений $\mathcal{E}_3$, которое определяется формулой (5.1.12).

5.1.5. Разложения решений при $-c \neq d - 1/2 \neq 0$. Положим $\theta_i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1-2d} + (-1)^i\sqrt{2c}$, где $i = 1, 2$. Для каждого фиксированного i, в зависимости от значения θ_i возможен один из трех случаев.
С л у ч а й 1. $\operatorname{Re}\theta_i = 0$. Имеем однопараметрические семейства экзотических разложений решений

$$\mathcal{J}_i^\tau : \quad y = 1 + c_{1i}(1-x) + \sum_s^\infty c_{si}(1-x)^s,\ i = 1, 2,\ \tau = \pm 1, \tag{5.1.18}$$

где $s \in \{1 + l + m\tau\theta_i;\ l,m \geq 0;\ l + m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$; комплексные коэффициенты:

$$c_{1i} = \frac{-2c - (-1)^i\sqrt{-4cd + 2c}}{2c + 2\check{d} - 1}, \tag{5.1.19}$$

c_{si} с $s = 1 + \tau\theta_i$ – произвольная постоянная, c_{si} – постоянны и однозначно определены.

Если $c_{si} = 0$ с $s = 1 + \tau\theta_i$ семейство степенных разложений (5.1.18) обозначаем $\mathcal{J}_i$.

В случае $c_{si} = 0$ с $s = 1 + \tau\theta_i$ третье приближение разложения решений (5.1.18) есть $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{2i}(1-x)^2$, где

$$c_{2i} = (-1)^i\sqrt{\frac{1-2d}{2c}}\,\frac{2(a+b) + 1 - (\sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{1-2d})^2}{2 - 2(\sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{1-2d})^2}. \tag{5.1.20}$$

Положим $k_i = 1 + \theta_i$, если $\operatorname{Re}\theta_i > 0$ и $k_i = 1 - \theta_i$, если $\operatorname{Re}\theta_i < 0$.

С л у ч а й 2. $\mathrm{Re}\,\theta_i \neq 0$, $\theta_i \notin \mathbb{Z}$. Имеем семейство степенных разложений решений

$$\mathcal{J}_i: \quad y = 1 + c_{1i}(1-x) + \sum_s c_{si}(1-x)^s, \tag{5.1.21}$$

где $s \in \{1 + l + mk_i;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты таковы: c_{1i} определен формулой (5.1.19), $c_{k_i i}$ – произвольный, остальные c_{si} постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложения решения (5.1.21) зависит от расположения числа $\mathrm{Re}\,k_i$. Если $\mathrm{Re}\,k_i > 2$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{2i}(1-x)^2$, что аналогично случаю $\mathrm{Re}\,\theta_i = 0$. Если $1 < \mathrm{Re}\,k_i < 2$, то второе приближение решения будет иметь вид $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{k_i i}(1-x)^{k_i}$, где коэффициент c_{k_i} – произвольный. Если $\mathrm{Re}\,k_i = 2$, то второе приближение решения будет иметь вид $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{2i}(1-x)^2 + c_{k_i i}(1-x)^{k_i}$, где коэффициенты $c_{k_i i}$ – произвольный, c_{2i} определен формулой (5.1.20).

С л у ч а й 3. $\mathrm{Re}\,\theta_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Имеем семейство степенно-логарифмических разложений решений

$$\mathcal{J}_i: \quad y = 1 + c_{1i}(1-x) + \sum_{s=2}^{\infty} c_{si}(\ln(1-x))(1-x)^s, \tag{5.1.22}$$

где комплексные коэффициенты таковы: c_{1i} определен формулой (5.1.19), $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i}\ln(1-x)$, где $\alpha_{k_i i}$– произвольная постоянная, остальные $\beta_{k_i i}$, c_{si} постоянны и однозначно определены.

Второе приближение разложения решения (5.1.22) зависит от расположения числа k_i. Если $k_i = 2$, тогда второе приближение решения имеет вид $y = 1 + c_{1i}(1-x) + c_{2i}(1-x)^2$, где коэффициент

$$c_{2i} = \alpha_{2i} + (-1)^i \sqrt{\frac{1-2d}{2c}}\, \frac{2(a+b) + 1 - (\sqrt{2c} + (-1)^i\sqrt{1-2d})^2}{4} \ln(1-x), \tag{5.1.23}$$

где α_{2i}– произвольная постоянная.

Здесь имеем семейство сложных разложений

$$\mathcal{J}_3: \quad y = 1 + \varphi_1(1-x) + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \varphi_\sigma (1-x)^\sigma, \tag{5.1.24}$$

где

$$\varphi_1 = -\frac{1-2c-2d}{4}\ln^2(1-x) + c_1\ln(1-x) + \sum_{s=0}^{\infty} c_{-s}\ln^{-s}(1-x), \tag{5.1.25}$$

комплексные коэффициенты таковы: c_1 – произвольная постоянная, остальные c_{-s} – постоянны и однозначно определены; φ_σ ряды по убывающим степеням логарифмов.

5.1.6. Разложения решений при $-c = d - 1/2 \neq 0$. Имеем два семейства сложных разложений

$$\mathcal{J}_{3+j}: \quad y = 1 + \varphi_{1j}(1-x) + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \varphi_{\sigma j}(1-x)^{\sigma}, \tag{5.1.26}$$

где

$$\varphi_{1j} = (-1)^j \sqrt{2c} \ln(1-x) + c_{0j} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{-sj} \ln^{-s}(1-x), j = 1, 2, \tag{5.1.27}$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{0j} – произвольная постоянная, остальные c_{-sj} – постоянны и однозначно определены; $\varphi_{\sigma j}$ ряды по убывающим степеням логарифмов.

Семейства разложений $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_2^{\tau}$ сохраняются из случая $c \neq 1/2 - d \neq 0$. В качестве θ_2 берем $2\sqrt{2c}$ с $\operatorname{Re}\theta_2 \geq 0$. В зависимости от его значения возможны три случая. А именно: случай 1 ($\operatorname{Re}\theta_2 = 0$, однопараметрические семейства экзотических разложений $\mathcal{J}_2^{\tau}$ определяются формулой (5.1.18)), случай 2 ($\operatorname{Re}\theta_2 \neq 0$, $\theta_2 \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенных разложений $\mathcal{J}_2$ определяется формулой (5.1.21)), случай 3 ($\theta_2 \notin \mathbb{Z}$, однопараметрическое семейство степенно-логарифмических разложений $\mathcal{J}_2$ определяется формулой (5.1.22)).

5.1.7. Разложения решений при $d = 1/2$. Имеем одно семейство степенных разложений

$$\mathcal{J}_6: \quad y = x + c_{\rho}(1-x)^{\rho} + \sum_{s} c_s(1-x)^s, \tag{5.1.28}$$

где $c_{\rho} \neq 0$, c_{ρ} – произвольная постоянная, $\rho = 1 + \sqrt{2c}$, $\operatorname{Re}\sqrt{2c} > 0$, s пробегает множество $\{\rho + l(\rho-1) + m;\ l,m \geq 0;\ l+m > 0;\ l,m \in \mathbb{Z}\}$, остальные комплексные коэффициенты c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re}\rho > 2$ третье приближение разложения (5.1.28) имеет вид $y = x + c_{\rho}(1-x)^{\rho} + c_{\rho+1}(1-x)^{\rho+1}$. Коэффициент

$$c_{\rho+1} = -c_{\rho}\frac{-2c + 2a + 2b + 1}{2\rho}. \tag{5.1.29}$$

В случае $1 < \operatorname{Re}\rho < 2$ третье приближение разложения (5.1.28) имеет вид $y = x + c_{\rho}(1-x)^{\rho} + c_{2\rho-1}(1-x)^{2\rho-1}$. Коэффициент

$$c_{2\rho-1} = c_{\rho}^2. \tag{5.1.30}$$

В случае $\operatorname{Re}\rho = 2$, $\operatorname{Im}\rho \neq 0$ третье приближение разложения (5.1.28) имеет вид $y = x + c_{\rho}(1-x)^{\rho} + c_{\rho+1}(1-x)^{\rho+1} + c_{2\rho-1}(1-x)^{2\rho-1}$, где коэффициенты $c_{\rho+1}$, и $c_{2\rho-1}$ определены формулами (5.1.29) и (5.1.30) соответственно. В случае $\rho = 2$ третье приближение разложения (5.1.28) имеет вид

$y = x + c_2(1-x)^2 + c_3(1-x)^3$. Коэффициенты c_2 – ненулевая произвольная постоянная, $c_3 = -c_2\,(-2c + 2a + 2b + 1 - 4c_2)/4$ есть сумма выражений (5.1.29) и (5.1.30).

Два однопараметрических семейства экзотических разложений

$$\mathcal{J}_6^\tau: \quad y = x + c_\rho(1-x)^\rho + \sum_s c_s(1-x)^s, \tag{5.1.31}$$

где $\rho = 1 \pm \sqrt{2c}$, $\operatorname{Re}\rho = 1$, s пробегает множество $\{\rho + l(\rho-1) + m;\ l, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\rho)$, комплексные коэффициенты: c_ρ – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Исключительное решение согласно теореме (2.1.4).

$$\mathcal{I}_3:\ y = x.$$

Также имеется однопараметрическое семейство сложных разложений $\mathcal{J}_3$, которое определяется формулами (5.1.23), (5.1.25).

§2 . Разложения вблизи единицы при $a \cdot c = 0$

Здесь в случае $a = 0,\ c \neq 0$ из случая $a \cdot c \neq 0$ сохраняются семейства $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_{10}^\tau$, $\mathcal{A}_{11}^\tau$, $\mathcal{J}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, $\mathcal{J}_1^\tau$, $\mathcal{J}_2^\tau$ и $\mathcal{J}_6^\tau$, $\tau = \pm 1$. В случае $a \neq 0,\ c = 0$ из случая $a \cdot c \neq 0$ сохраняются семейства $\mathcal{A}_1$, , $\mathcal{A}_{10}^\tau$, $\mathcal{A}_{11}^\tau$, $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, $\mathcal{E}_1^\tau$, $\mathcal{E}_2^\tau$ и $\mathcal{E}_6^\tau$.

5.2.1. Однопараметрические семейства разложений вблизи единицы, симметричные семействам $\mathcal{B}_7$, $\mathcal{B}_7^\tau$, $\mathcal{H}_7$ и $\mathcal{H}_7^\tau$. При $a = 0$ имеем разложения решений

$$y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \tag{5.2.1}$$

где $r = -\sqrt{-2b}$, удовлетворяет условию $\operatorname{Re}\sqrt{-2b} > 0$ (для семейства $\mathcal{E}_7$) и $\operatorname{Re}\sqrt{-2b} = 0$ (для семейства $\mathcal{E}_7^\tau$, $s \in \{r - lr + m,\quad l, m \geq 0,\ l + m > 0,\ l,\ m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

Если $0 < \operatorname{Re}\sqrt{-2b} \leq 1$, второе приближение решения имеет вид $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_{r+1}x^{r+1}$, где

$$c_{r+1} = \frac{c_r(c + d - b - r)}{r - 1}.$$

Если $\operatorname{Re}\sqrt{-2b} > 1$, то третье приближение решения есть $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_0$, где $c_0 = 0$.

При $c=0$ имеем разложения решений

$$y = 1 + c_r(1-x)^r + \sum_s c_s(1-x)^s, \qquad (5.2.2)$$

где $r = 1+\sqrt{1-2d}$, удовлетворяет условию $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} > 0$ (для семейства $\mathcal{J}_7$) и $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} = 0$ (для семейства $\mathcal{J}_7^\tau$, $s \in \{r + l(r-1) + m,\ l, m > 0,\ l+m \geq 0,\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, c_s постоянны и однозначно определены.

В случае $\operatorname{Re}\sqrt{1-2d} \geq 1$ третье приближение решения $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_{2r-1}(1-x)^{r+1}$, $c_{r+1} = c_r\dfrac{a+b-d+r}{r}$ в случае $0 < \operatorname{Re}\sqrt{1-2d} < 1$ третье приближение решения $y = 1 + c_r(1-x)^r + c_{2r-1}(1-x)^{2r-1}$, $c_{2r-1} = 0$.

5.2.2. Разложения решений при $a = b = 0,\ c \neq 0$.

$$\mathcal{E}_8: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} c_s(1-x)^s, \qquad (5.2.3)$$

где комплексный коэффициент $c_0 \neq 0, 1$ – произвольная постоянная, остальные комплексные коэффициенты c_s – постоянные и однозначно определенные.

Третье приближение решения уравнения есть $y = 1 + c_0 + c_1(1-x)$, где

$$c_1 = -c_0(c+d). \qquad (5.2.4)$$

5.2.3. Разложения решений при $a \neq 0,\ c = 0,\ d = 1/2$. Имеем однопараметрическое семейство разложений

$$\mathcal{J}_8: \quad y = 1 + c_1(1-x) + \sum_{s=2}^{+\infty} c_s(1-x)^s, \qquad (5.2.5)$$

где c_1 – комплексная произвольная постоянная, $c_1 \neq 0, 1$, $c_2 = -c_1(c_1+1)(1+2a+2b)$, остальные c_s однозначно определенные комплексные постоянные.

5.2.4. Разложения решений при $a = c = 0$. В этом случае при $x \to 1$ уравнение (2.1.1) имеет 15 семейств разложений решений. Из них 7 семейств $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_{10}^\tau$, $\mathcal{A}_{11}^\tau$, $\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{J}_3$ сохраняются из случая $a \cdot c \neq 0$. Еще 8 семейств $\mathcal{E}_7$, $\mathcal{E}_7^\tau$, $\tau = \pm 1$, $\mathcal{E}_8$, $\mathcal{J}_7$, $\mathcal{J}_7^\tau$ и $\mathcal{J}_8$ сохраняются из случаев $a = 0,\ c \neq 0$ и $a \neq 0,\ c = 0$.

§ 3 . Сводка результатов

Теорема 5.3.1. *При $x \to 1$ уравнение* (2.1.1) *имеет 17 семейств разложений решений типов* $1-3$*:*

$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0^\circ$ *определяется формулой* (5.1.1) *и имеет 2 параметра;*
$\mathcal{E}_1 = \mathcal{B}_1^\circ$, *которое существует при* $a \neq -b \neq 0$, *определяется формулами* (5.1.6), (5.1.9), (5.1.10) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{E}_2 = \mathcal{B}_2^\circ$, *которое существует при* $b \neq 0$, *определяется формулами* (5.1.6), (5.1.9), (5.1.10) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{E}_3 = \mathcal{B}_3^\circ$, *которое существует при* $a \neq -b$, *определяется формулой* (5.1.12) *и имеет 1 параметр;*
$\mathcal{E}_4 = \mathcal{B}_4^\circ$ *и* $\mathcal{E}_5 = \mathcal{B}_5^\circ$ *существуют при* $a = -b \neq 0$, *определяются формулой* (5.1.13) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{E}_6 = \mathcal{B}_6^\circ$ *существует при* $b = 0$, *определяется формулой* (5.1.14) *и имеет 1 параметр.*
$\mathcal{E}_7 = \mathcal{B}_7^\circ$ *существует при* $a = 0$, *определяется формулой* (5.2.1) *и имеет 1 параметр.*
$\mathcal{E}_8 = \mathcal{B}_8^\circ$ *существует при* $a = b = 0$, *определяется формулой* (5.2.3) *и имеет 1 параметр.*
$\mathcal{J}_1 = \mathcal{H}_1^\circ$, *которое существует при* $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, *определяется формулами* (5.1.18), (5.1.21), (5.1.22) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{J}_2 = \mathcal{H}_2^\circ$, *которое существует при* $d \neq 1/2$, *определяется формулами* (5.1.18), (5.1.21), (5.1.22) *и имеет 1 или 0 параметров;*
$\mathcal{J}_3 = \mathcal{H}_3^\circ$, *которое существует при* $a \neq -d + 1/2 \neq 0$, *определяется формулой* (5.1.24) *и имеет 1 параметр;*
$\mathcal{J}_4 = \mathcal{H}_4^\circ$ *и* $\mathcal{J}_5 = \mathcal{H}_5^\circ$ *существуют при* $a = -d + 1/2 \neq 0$, *определяются формулой* (5.1.26) *и имеют 1 параметр.*
$\mathcal{J}_6 = \mathcal{H}_6^\circ$ *существует при* $d = 1/2$, *определяется формулой* (5.1.28) *и имеет 1 параметр;*
$\mathcal{J}_7 = \mathcal{H}_7^\circ$ *существует при* $c = 0$, *определяется формулой* (5.2.2) *и имеет 1 параметр.*
$\mathcal{J}_8 = \mathcal{H}_8^\circ$ *существует при* $c = 0$, $d = 1/2$, *определяется формулой* (5.2.5) *и имеет 1 параметр.*

и 20 семейств экзотических разложений решений с $\tau = \pm 1$*:*

$\mathcal{A}_{1i}^\tau = \mathcal{A}_{1i}^{\tau\circ}$, $i = 0, 1$, *определяются формулой* (5.1.1) *и имеют 2 параметра;*
$\mathcal{E}_1^\tau = \mathcal{B}_1^{\tau\circ}$, *которые существуют при* $a \neq -b \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{2a} - \sqrt{-2b}) = 0$, *определяются формулой* (5.1.6) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{E}_2^\tau = \mathcal{B}_2^{\tau\circ}$, *которые существуют при* $a \neq 0$, $-b \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{2a} + \sqrt{-2b}) = 0$, *определяются формулой* (5.1.6) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{E}_6^\tau = \mathcal{B}_6^{\tau\circ}$, *которые существуют при* $\mathrm{Re}\,\sqrt{2a} = 0$, $b = 0$, *определяются формулой* (5.1.17) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{E}_7^\tau = \mathcal{B}_7^{\tau\circ}$, *которые существуют при* $\mathrm{Re}\,\sqrt{-2b} = 0$, $a = 0$, *определяются формулой* (5.2.1) *и имеют 1 параметр;*

$\mathcal{J}_1^\tau = \mathcal{H}_1^{\tau\circ}$, *которые существуют при* $-c \neq d - 1/2 \neq 0$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{1-2d} - \sqrt{2c}) = 0$, *определяются формулой* (5.1.18) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{J}_2^\tau = \mathcal{H}_2^{\tau\circ}$, *которые существуют при* $c \neq 0,\ d \neq 1/2$, $\mathrm{Re}\,(\sqrt{1-2d} + \sqrt{2c}) = 0$, *определяются формулой* (5.1.18) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{J}_6^\tau = \mathcal{H}_6^{\tau\circ}$, *которые существуют при* $\mathrm{Re}\,\sqrt{2c} = 0,\ d = 1/2$, *определяются формулой* (5.1.31) *и имеют 1 параметр;*
$\mathcal{J}_7^\tau = \mathcal{J}_7^{\tau\circ}$, *которые существуют при* $\mathrm{Re}\,\sqrt{1-2d} = 0,\ c = 0$, *определяются формулой* (5.2.2) *и имеют 1 параметр;*

$\mathcal{A}_0^\circ$, $\mathcal{B}_i^\circ$ и $\mathcal{H}_i^\circ$ означают семейства, полученные из семейств $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_i$ и $\mathcal{H}_i$ симметрией (2.1.10). Семейства $\mathcal{A}_{10}^\tau$, $\mathcal{A}_{11}^\tau$, $\mathcal{E}_1^\tau$, $\mathcal{E}_2^\tau$, $\mathcal{E}_6^\tau$, $\mathcal{E}_7^\tau$, $\mathcal{J}_1^\tau$, $\mathcal{J}_2^\tau$, $\mathcal{J}_6^\tau$, $\mathcal{J}_7^\tau$ – экзотические, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_5$, $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_4$, $\mathcal{J}_5$ – сложные, остальные – типов 1 и 2.

Литература

11. *Брюно А.Д.* , *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2004.

16. *Брюно А.Д.*, *Чухарева И.В.* Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. №49.

27. *Розов Н.Х.* Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1984. **4**. 233–234.

42. *Gromak I.V.*, *Laine I.*, *Shimomura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002.

43. *Guzzetti D.* On the critical behavior, the connection problem and elliptic representation of a Painlevé 6 equation // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2001. **4**. 293-377.

46. *Kimura H.* The construction of a general solution of a Hamiltonian system with the singularity and its application to Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1983. **134**. 363–392.

47. *Mazzocco M.* Picard and Chazy solutions to the Painleve VI equation // Math. Ann. 2001. **321**. 157–195.

48. *Okamoto K.* Studies on the Painleve equations I. The six Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. **146**. 337–381.

52. *Picard E.* Démonstration dún théoréme générale sur les founctions uniformes liées par une relation algébrique // Acta Math. 1887. **11**. 1–12.

56. *Shimomura S.* Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular points // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 163–184.

57. *Shimomura S.* Series expansions of Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular point // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 185–197.

58. *Shimomura S.* Supplement to "Series expansions of Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular point"// Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 363–371.

59. *Shimomura S.* A family of solutions of a nonlinear ordinary differential equation and its application to Painlevé equations (III), (V), (VI) // J. Math. Soc. Japan. 1987. **39**. 649–662.

62. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Методы, используемые при исследовании асимптотических разложений решений уравнения P6. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. №61.

63. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Все базовые асимптотические разложения решений уравнения P6 в случае $a \cdot b \neq 0$. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. №62.

64. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Все асимптотические разложения решений уравнения P6 в случае $a \cdot b = 0$. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. №70.