ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 71 за 2007 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

В.Н. Сорокин

О модели Козлова-Никишина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сорокин В.Н. О модели Козлова-Никишина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 71. 38 с.
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-71

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М.В.КЕЛДЫША

В.Н.СОРОКИН

О МОДЕЛИ КОЗЛОВА-НИКИШИНА

МОСКВА, 2007 г.

Сорокин В.Н. [1]

О модели Козлова-Никишина

Аннотация

В рамках релятивистской модели Козлова-Никишина изучаются задача рассеяния на кулоновском потенциале, а также волновые функции дискретного спектра для частицы, движущейся в коническом цилиндре. Работа носит научно-методический характер. Она может быть использована как дополнение к спецкурсу по теории специальных функций.

Sorokin V.N.

On Kozlov-Nikishin model

Abstract

In framework of Kozlov-Nikishin relativity model there are investigated the scattering problem on Columb potential and wavefunctions of discret spectrum for particular in the conic cylinder. The paper has scientific-methodic character. It may be used as supplement to lectures on the theory of special functions.

[1]

Работа частично поддержана грантами:
1) РФФИ 05-01-00697,
2) НШ 4466.2006.1.

1. Введение.

Хорошо известны трудности в описании взаимодействия релятивистских частиц [1]. В 1986 г. В.В.Козлов и Е.М.Никишин предложили новую гамильтонову модель взаимодействия, инвариантную относительно симплектического действия группы Лоренца-Пуанкаре [2]. Они применили этот подход к изучению одной из наиболее важных физических моделей – теории водородоподобного атома. К сожалению, в последующие двадцать лет эти результаты не получили дальнейшего развития. Однако, в настоящее время интерес к результатам В.В.Козлова и Е.М.Никишина резко возрос. В работах [3], [4] в дополнение к работе [2] были вычислены волновые функции в импульсном представлении, исследовано асимптотическое поведение информационной энтропии Больцмана-Шеннона. В работе [5] мы рассмотрели релятивистскую задачу рассеяния на кулоновском потенциале и на невозбужденном атоме.

В §2 настоящей работы приводится краткое описание модели Козлова-Никишина. В §3 обсуждается постановка задачи рассеяния. В §4 приводятся полученные в [5] результаты. В цитируемой работе задача рассеяния была решена в борновском приближении. Задача рассеяния не является центрально-симметричной,
она обладает аксиальной симметрией. Формула Борна реагирует на эту симметрию и с необходимостью требует разбиения пространства Минковского не только на конические пространственноподобную и времениподобные области, но и на соответствующие цилиндрические области. Основные результаты настоящей работы относятся к изучению движения частиц в таких цилиндрических областях. В §5 мы решаем в борновском приближении задачу рассеяния на кулоновском потенциале, ограниченным пространственноподобным цилиндром. Для этой же модели в §6 мы явно находим волновую функцию рассеяния и сравниваем полученный результат с борновским приближением. В §7 вычисляем дискретный спектр и находим связанные состояния частицы, движущейся в цилиндре. Эту модель называем цилиндрическим атомом. Волновые функции связанных состояний вычислены в параболических координатах с целью дальнейшего изучения расщепления энергетических уровней при включении однородного электрического поля. В §8 волновые функции цилиндрического атома вычислены в сферических координатах, которые соответствуют законам сохранения момента.

Настоящая работа носит научно-методический характер и может быть использована как дополнение к спецкурсам по теории специальных функций.

2. Модель Козлова-Никишина.

В работе [2] была предложена модель взаимодействия двух релятивистских частиц, которая после перехода к системе с началом в центре масс сводится к описанию движения одной частицы во внешнем поле. Мы приводим эту модель взаимодействия в таком виде. Также мы пользуемся атомной системой единиц.

Конфигурационное пространство системы – это четырехмерное пространство Минковского

$$\mathsf{Q} = \mathbb{R}^4 = \{\mathbf{s} = (t, x, y, z)\}$$

с индефинитной метрикой

$$\mathbf{s}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Мы используем обозначение t вместо ct, где c – скорость света в вакууме. Таким образом, время t, также как пространственные координаты x, y, z, имеет размерность длины.

В конфигурационном пространстве определим пространственноподобный конус

$$\mathsf{K} = \{\mathbf{s} \in \mathsf{Q} : \mathbf{s}^2 < 0\},$$

два времениподобных конуса, а именно: конус абсолютно будущего

$$\mathsf{K}_+ = \{\mathbf{s} \in \mathsf{Q} : \mathbf{s}^2 > 0,\ t > 0\}$$

и конус абсолютно прошедшего

$$\mathsf{K}_- = \{\mathbf{s} \in \mathsf{Q} : \mathbf{s}^2 > 0,\ t < 0\},$$

а также световой конус

$$\mathsf{K}_0 = \{\mathbf{s} \in \mathsf{Q} : \mathbf{s}^2 = 0\}.$$

Состояние системы определяет волновая функция

$$\psi : \mathsf{K} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Выбор пространственноподобного конуса объясняется тем, что величины t и x, y, z не являются собственным временем и собственными координатами частицы. Это – рассогласование собственных времен двух взаимодействующих частиц и разности их координат соответственно. Таким образом, условие

$$t^2 < x^2 + y^2 + z^2$$

означает, что рассогласование времен достаточно мало для того, чтобы частицы могли взаимодействовать.

Волновая функция удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера

$$(\Box + U)\psi = E\psi.$$

Здесь

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

оператор Даламбера. Он играет роль оператора кинетической энергии. Потенциальная энергия U – это произвольная функция вида

$$U : \mathsf{K} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Спектральный параметр E назовем энергией. Это – энергия частицы, не включающая внутреннюю энергию покоя и энергию движения центра масс.

Потенциал назовем центрально-симметричным, если он зависит только от длины вектора

$$U(\mathbf{s}) = \mathcal{U}(\rho),$$

где

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 > 0, \qquad \rho > 0,$$

а $\mathcal{U}$ – функция вида

$$\mathcal{U} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Важным примером центрально-симметричного потенциала служит кулоновский потенциал притяжения

$$\mathcal{U}(\rho) = -\frac{2}{\rho}.$$

В работе [2] был исследован дискретный и непрерывный спектр гамильтониана

$$\mathcal{H} = \Box - \frac{2}{\rho}.$$

Дискретный спектр состоит из отрицательных уровней энергии, определяемых формулой Бора:

$$E_{\mathtt{n}} = -\frac{1}{\mathtt{n}^2}, \qquad \mathtt{n} = 1, 2, 3, \ldots.$$

Каждый уровень бесконечно вырожден, т.е. соответствующее пространство собственных функций бесконечномерно. Дискретному спектру соответствуют связанные состояния системы, т.е. волновые функции, принадлежащие гильбертову пространству $L_2(\mathsf{K})$ такие, что

$$\int\limits_{\mathsf{K}} |\psi(\mathbf{s})|^2 dv(\mathbf{s}) < +\infty.$$

Здесь

$$dv(\mathbf{s}) = dt\, dx\, dy\, dz$$

элемент объема.

Связанные состояния были найдены методом разделения переменных в псевдосферических координатах

$$\begin{cases} t = \rho\ \mathrm{sh}\,\tau \\ z = \rho\ \mathrm{ch}\,\tau\ \cos\theta \\ y = \rho\ \mathrm{ch}\,\tau\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ x = \rho\ \mathrm{ch}\,\tau\ \sin\theta\ \cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant \rho < +\infty \\ -\infty < \tau < +\infty \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Элемент объема в этих координатах равен

$$dv = \rho^3 d\rho\ \mathrm{ch}^2\,\tau d\tau\ \sin\theta d\theta\, d\varphi.$$

В работах [3], [4] были вычислены соответствующие волновые функции в импульсном представлении, исследовано асимптотическое поведение их энтропии.

3. Задача рассеяния.

Рассмотрим движение свободной частицы. Другими словами, исследуем решения уравнения Шредингера

$$\Box\psi = E\psi. \tag{3.1}$$

В частности, этому уравнению удовлетворяют так называемые плоские волны

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{s}) = e^{i\mathbf{ks}}.$$

Здесь

$$\mathbf{k} = (k_t,\, k_x,\, k_y,\, k_z)$$

волновой вектор. Через $\mathbf{ks}$ мы обозначаем индефинитное скалярное произведение

$$\mathbf{ks} = k_t \cdot t - k_x \cdot x - k_y \cdot y - k_z \cdot z.$$

Предполагаем, что вектор $\mathbf{k}$ принадлежит пространственноподобному конусу в пространстве импульсов, т.е.

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_t^2 > 0, \quad k > 0.$$

Итак, имеем

$$\Box \psi_{\mathbf{k}} = k^2 \psi_{\mathbf{k}}.$$

Плоская волна $\psi_{\mathbf{k}}$ описывает поток частиц, движущихся равномерно и прямолинейно в направлении вектора $\mathbf{k}$ с импульсом величины k.

С другой стороны, будем искать центрально-симметричные решения уравнения (3.1), т.е. решения, зависящие только от переменной ρ. Запишем оператор Даламбера в псевдосферических координатах

$$\Box = -\nabla_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\nabla_\tau^2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\tau}\Big(\nabla_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\nabla_\varphi^2\Big)\right],$$

где

$$\begin{aligned}
\nabla_\varphi^2 &= \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \\
\nabla_\theta^2 &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\nabla_\tau^2 &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\,\operatorname{ch}^2\tau\,\frac{\partial}{\partial\tau} \\
\nabla_\rho^2 &= \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial}{\partial\rho}\,\rho^3\,\frac{\partial}{\partial\rho}.
\end{aligned}$$

Тогда для функции $\psi = \psi(\rho)$ получим уравнение

$$\nabla_\rho^2\psi + k^2\psi = 0.$$

Делая замену переменной $x = k\rho$ и подстановку

$$\psi(\rho) = \frac{w(x)}{x},$$

приходим к уравнению Бесселя

$$x^2 w'' + x w' + (x^2 - 1) w = 0.$$

Это уравнение имеет два линейно независимых решения, в качестве которых можно взять функции Бесселя третьего рода – первую и вторую функции Ганкеля

$$C^{(1)} H_1^{(1)}(x) \qquad C^{(2)} H_1^{(2)}(x),$$

где $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ – произвольные постоянные. Таким образом, мы имеем два линейно независимых центрально-симметричных решения

$$\psi_k^{(1)}(\rho) = C^{(1)}\,\frac{H_1^{(1)}(k\rho)}{k\rho} \qquad \psi_k^{(2)}(\rho) = C^{(2)}\,\frac{H_1^{(2)}(k\rho)}{k\rho}.$$

Учитывая асимптотическое поведение функций Ганкеля

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\{\pm(4x - 2\nu\pi - \pi)/4\}[1 + O(1/x)], \quad x \to +\infty,$$

при соответствующем выборе постоянных получим

$$\psi_k^{(1)}(\rho) \sim \frac{e^{ik\rho}}{\rho^{3/2}} \qquad \psi_k^{(2)}(\rho) \sim \frac{e^{-ik\rho}}{\rho^{3/2}} \qquad \rho \to +\infty.$$

Назовем волновые функции $\psi_k^{(1)}$ и $\psi_k^{(2)}$ расходящейся и сходящейся сферической волной соответственно. Функция $\psi_k^{(1)}$ описывает поток частиц, равномерно по всем направлениям уходящих от начала координат на бесконечность.

Вероятностный смысл имеет величина

$$|\psi_k^{(1)}|^2 dv = d\rho\ \mathrm{ch}^2\,\tau d\tau\ \sin\theta d\theta\, d\varphi.$$

В отличие от нерелятивистской ситуации полный интеграл по всем углам, т.е. объем псевдосферы, равен бесконечности

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{ch}^2\,\tau d\tau \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = +\infty.$$

По аналогии с нерелятивистским случаем под задачей рассеяния на потенциале U мы понимаем нахождение волновой функции рассеяния, т.е. решения уравнения Шредингера

$$(\Box + U)\psi = k^2\psi,$$

удовлетворяющего следующему асимптотическому условию

$$\psi = e^{ikz} + f\cdot\frac{e^{ik\rho}}{\rho^{3/2}} + o(1/\rho^{3/2}), \quad \rho \to +\infty.$$

При этом предполагаем, что функция f не зависит от ρ. Смысл этого условия состоит в следующем. "До момента рассеяния"мы имеем поток частиц, движущихся равномерно и прямолинейно (без ограничения общности вдоль оси z) с импульсом k. Функция f называется амплитудой рассеяния. Величина $|f|^2$ является относительной вероятностью рассеяния частиц по различным направлениям.

4. Приближение Борна.

В соответствии с предложенной выше постановкой задачи рассеяния волновой вектор частицы, падающей на рассеивающий центр, имеет вид

$$\mathbf{k}^{(0)} = (0, 0, 0, k), \quad k > 0.$$

Обозначим

$$\mathbf{k} = (k_t, k_x, k_y, k_z)$$

волновой вектор "рассеянной"частицы. Мы изучаем упругое рассеяние, при котором сохраняется длина волнового вектора

$$\mathbf{k}^2 = k_t^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = -k^2. \tag{4.1}$$

В 1926 г. Максом Борном была предложена приближенная формула для вычисления амплитуды рассеяния, основанная на стационарной теории возмущений. Релятивистский аналог этой формулы выглядит следующим образом

$$f = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathsf{K}} \psi_{\mathbf{k}^{(0)}}(\mathbf{s}) U(\mathbf{s}) \overline{\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{s})} dv(\mathbf{s}).$$

Конечно, даже в нерелятивистской теории формула Борна имеет ограниченную область применения. Она дает хороший результат лишь для быстро убывающих потенциалов. Однако, предполагая уникальность потенциала Кулона мы в работе [5] применили эту формулу к указанному потенциалу. Ниже мы процитируем и обсудим полученный в [5] результат.

Рассмотрим разность волновых векторов

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}^{(0)},$$

т.е. переданный импульс. Тогда формула Борна сводится к вычислению интеграла Фурье

$$\hat{U}(\mathbf{q}) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)^4 \int\limits_{\mathsf{K}} U(\mathbf{s}) e^{-i\mathbf{qs}} dv(\mathbf{s}).$$

Напомним, что мы изучаем потенциал Кулона

$$U(\mathbf{s}) = -\frac{1}{\rho}, \quad \rho^2 = -\mathbf{s}^2, \quad \rho > 0.$$

Формула Борна дает зависимость амплитуды рассеяния f от волнового вектора $\mathbf{k}$. Другими словами, она определяет амплитуду рассеяния в импульсном представлении. Функция $\hat{U}(\mathbf{q})$ является нерегулярной обобщенной функцией. Она имеет сингулярность на световом конусе. Ограничения этой функции на пространственноподобный конус и на времениподобные конусы суть регулярные обобщенные функции.

Если $\mathbf{q}^2 < 0$, то $\hat{U}(\mathbf{q}) = 0$. Это специфика кулоновского потенциала.

Если $\mathbf{q}^2 = q^2 > 0$, где $q > 0$, то

$$\hat{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{q^3}.$$

Носитель функции $f(\mathbf{k})$ устроен следующим образом. Уравнение (4.1) определяет в пространстве импульсов

$$\mathsf{Q}^* = \mathbb{R}^4 = \{\mathbf{k} = (k_t, k_x, k_y, k_z)\}$$

трехмерный однополостный гиперболоид $\mathbf{\Gamma}$. Условие

$$\mathbf{q}^2 = (\mathbf{k} - \mathbf{k}^{(0)})^2 = k_t^2 - k_x^2 - k_y^2 - (k_z - k)^2 > 0$$

вместе с уравнением (4.1) равносильно условию

$$k_z > k.$$

Это полупространство отсекает от гиперболоида $\mathbf{\Gamma}$ поверхность $\mathring{\mathbf{\Gamma}}$, на которой только и возможно рассеяние. На границе $\mathring{\mathbf{\Gamma}}$ функция f имеет сингулярную составляющую.

На поверхности $\mathring{\mathbf{\Gamma}}$ можно ввести следующие криволинейные координаты:

$$\begin{cases} k_z = k \operatorname{ch} \tau \\ k_t = \pm k \operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \theta \\ k_y = k \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \theta \sin \varphi \\ k_x = k \operatorname{sh} \tau \operatorname{sh} \theta \cos \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant \tau < +\infty \\ 0 \leqslant \theta < +\infty \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Гиперболические углы τ и θ будем называть углами рассеяния. Обозначим $d\omega$ нормированную меру Лебега на поверхности $\mathring{\mathbf{\Gamma}}$. В новых координатах она имеет вид

$$d\omega = \operatorname{sh}^2 \tau d\tau \ \operatorname{sh} \theta d\theta \, d\varphi.$$

Далее,

$$q^2 = 2k^2(\operatorname{ch} \tau - 1) = 4k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2}$$

или

$$q = 2k \operatorname{sh} \frac{\tau}{2}.$$

Таким образом, для кулоновского потенциала амплитуда рассеяния зависит только от одного угла рассеяния. Дифференциальное сечение рассеяния равно

$$d\sigma = \frac{4\pi^2}{(2k \operatorname{sh} \frac{\tau}{2})^6} d\omega.$$

Эта формула аналогична формуле Резерфорда. Как и в нерелятивистском случае полное сечение рассеяния для кулоновского потенциала бесконечно

$$\sigma = \int\limits_{\overset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}} d\sigma = +\infty.$$

Другими словами, рассеяние происходит преимущественно на малые углы.

Тот факт, что между векторами $\mathbf{k}^{(0)}$ и $\mathbf{k}$ определен гиперболический угол, можно интерпретировать следующим образом. Если ось собственного времени частицы направить вдоль оси z, то рассеяние будет происходить в конусе абсолютно будущего, что согласуется с принципом причинности.

5. Рассеяние в цилиндре.

5.1.

Индефинитность метрики пространства Минковского требует разбиения всего конфигурационного пространства световым конусом на пространственноподобную и времениподобные области. С другой стороны, рассмотренная выше задача рассеяния нарушает центральную симметрию и вводит аксиальную симметрию относительно оси z. Формула Борна реагирует на это и требует дальнейшего разбиения пространства. А именно, необходимо рассмотреть пространственноподобный и времениподобные конусы в подпространстве, ортогональном оси z, и построить на них цилиндры с образующей, параллельной этой оси.

Введем соответствующие обозначения. Рассмотрим пространственноподобный конический цилиндр

$$\mathsf{C} = \{\mathbf{s} \in \mathsf{Q} : x^2 + y^2 - t^2 > 0\},$$

два времениподобных конических цилиндра, а именно, цилиндр абсолютно будущего

$$\mathsf{C}_+ = \{\mathbf{s} \in \mathsf{Q} : t^2 - x^2 - y^2 > 0,\ t > 0\}$$

и цилиндр абсолютно прошедшего

$$\mathsf{C}_- = \{\mathbf{s} \in \mathsf{Q} : t^2 - x^2 - y^2 > 0,\ t < 0\},$$

а также световой конический цилиндр

$$\mathsf{C}_0 = \{\mathbf{s} \in \mathsf{Q} : t^2 - x^2 - y^2 = 0\}.$$

Пространственноподобный цилиндр лежит в пространственноподобном конусе

$$\mathsf{C} \subset \mathsf{K}.$$

В противоположность этому, времениподобные цилиндры пересекают этот конус по четырем областям

$$\mathsf{C}_\pm^+ = \mathsf{C}_\pm \cap \mathsf{K} \cap \{z > 0\},$$
$$\mathsf{C}_\pm^- = \mathsf{C}_\pm \cap \mathsf{K} \cap \{z < 0\}.$$

Результат предыдущего параграфа означает, что рассеяние возможно лишь в областях $\mathsf{C}_\pm^+$.

В то же время, более привычное представление о рассеянии имеет движение частицы в цилиндре C. В настоящем параграфе мы решим эту задачу также в борновском приближении. Частица по прежнему рассеивается на кулоновском потенциале $-1/\rho$, но теперь ей запрещено выходить за пределы цилиндра C.

5.2.

Амплитуду рассеяния вычисляем по формуле

$$f(\mathbf{k}) = -2\pi \hat{U}(\mathbf{q}),$$

где

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}^{(0)},$$

и

$$\hat{U}(\mathbf{q}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \int\limits_{\mathsf{C}} \frac{e^{-i\mathbf{qs}}}{\rho} dv(\mathbf{s}). \tag{5.1}$$

Интегрирование ведется по цилиндру C.

Будем вычислять этот интеграл в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} z = z \\ t = r\,\mathrm{sh}\,\tau \\ y = r\,\mathrm{ch}\,\tau \sin\varphi \\ x = r\,\mathrm{ch}\,\tau\cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\infty < z < +\infty \\ 0 \leqslant r < +\infty \\ -\infty < \tau < +\infty \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{5.2}$$

Заметим, что

$$r^2 = x^2 + y^2 - t^2,$$

а также

$$\rho^2 = r^2 + z^2.$$

Элемент объема в цилиндрических координатах равен

$$dv(\mathbf{s}) = dz\; r^2 dr\;\; \mathrm{ch}\,\tau d\tau\; d\varphi.$$

Будем использовать обозначение

$$\mathbf{q} = (t', x', y', z').$$

Это – произвольный вектор пространства импульсов.

При вычислении интеграла (5.1) рассмотрим два случая: 1) вектор $\mathbf{q}$ лежит в цилиндре C, 2) он лежит вне этого цилиндра. Рассмотрим первый случай. В цилиндре $\mathsf{C} \subset \mathsf{Q}^*$ введем аналогичные (5.2) цилиндрические координаты. Тогда интеграл (5.1) примет вид

$$\hat{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} r^2 dr \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{ch}\,\tau d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot$$
$$\cdot \exp\{izz' + irr'[-\mathrm{sh}\,\tau\,\mathrm{sh}\,\tau' + \mathrm{ch}\,\tau\,\mathrm{ch}\,\tau'(\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi')]\}. \tag{5.3}$$

5.3.

Вычислим входящий в (5.3) интеграл по $d\varphi$, а именно:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\ \exp\{irr' \operatorname{ch}\tau \operatorname{ch}\tau' \cos(\varphi-\varphi')\}. \tag{5.4}$$

Этот интеграл не зависит от φ'. Для его вычисления воспользуемся формулой Бесселя:

$$2\pi J_n(\zeta) = i^{-n}\int_0^{2\pi} e^{i\zeta\cos\varphi}\cos(n\varphi)d\varphi, \quad n\in\mathbb{Z}, \quad \zeta\in\mathbb{C}.$$

Здесь $J_n(\zeta)$ – функции Бесселя первого рода. Все необходимые формулы из теории бесселевых функций можно найти в [6]. Полагая

$$\zeta = rr' \operatorname{ch}\tau \operatorname{ch}\tau'$$

и $n=0$, получим, что интеграл (5.4) равен

$$2\pi J_0(\zeta).$$

Вычислим теперь входящий в (5.3) интеграл по $d\tau$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{ch}\tau d\tau\ \exp\{-irr' \operatorname{sh}\tau \operatorname{sh}\tau'\} J_0(rr' \operatorname{ch}\tau \operatorname{ch}\tau'). \tag{5.5}$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} a = \eta \operatorname{ch}\tau' \\ b = \eta \operatorname{sh}\tau', \end{cases}$$

где $\eta = rr'$. Тогда интеграл (5.5) примет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ib\operatorname{sh}\tau} J_0(a\operatorname{ch}\tau)\operatorname{ch}\tau d\tau = 2\int_0^{+\infty}\cos(b\operatorname{sh}\tau)J_0(a\operatorname{ch}\tau)\operatorname{ch}\tau d\tau.$$

Сделаем замену переменной $t=\operatorname{sh}\tau$. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty}\cos(bt)J_0(a\sqrt{t^2+1})dt. \tag{5.6}$$

Для его вычисления применим формулу Сонина-Гегенбауэра. Интеграл

$$\int_0^{\infty} J_\mu(bt)t^{\mu+1}\,\frac{J_\nu\big(a\sqrt{t^2+z^2}\big)}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}\,dt \tag{5.7}$$

либо равен нулю, если $b>a>0$; либо равен

$$\frac{b^\mu z^{1+\mu-\nu}}{a^\nu(a^2-b^2)^{\frac{1+\mu-\nu}{2}}}\ J_{\nu-\mu-1}\big(z\sqrt{a^2-b^2}\big),$$

при $a > b > 0$. Здесь $z > 0$, $\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > -1$. Положим в этой формуле $z = 1$, $\mu = -1/2$, $\nu = 0$. Тогда при $a > b > 0$ имеем

$$\int_0^\infty J_{-\frac{1}{2}}(bt)\sqrt{t}J_0\big(a\sqrt{t^2+1}\big)dt = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\frac{J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{a^2-b^2})}{(\sqrt{a^2-b^2})^{1/2}}.$$

Пусть без ограничения общности $\tau' > 0$. В нашем случае неравенство $a > b > 0$ выполняется. При этом

$$a^2 - b^2 = \eta^2.$$

Далее, справедлива формула

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

Поэтому интеграл (5.6) равен

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi bt}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(bt)J_0\big(a\sqrt{t^2+1}\big)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{J_{-\frac{1}{2}}(\eta)}{\sqrt{\eta}} = \frac{\cos\eta}{\eta}.$$

Таким образом, получаем

$$\hat{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\int_0^\infty r^2dr\,\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\,\frac{\cos rr'}{rr'}\,e^{izz'}. \tag{5.8}$$

5.4.

Вычислим входящий в (5.8) интеграл по dz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{izz'}}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dz. \tag{5.9}$$

Сделаем замену переменной $z = \xi r$ и введем обозначение $\lambda = rz'$. Тогда интеграл (5.9) будет равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda\xi}}{\sqrt{\xi^2+1}}\,d\xi. \tag{5.10}$$

Пусть без ограничения общности $\lambda > 0$. Продеформируем контур интегрирования в (5.10) на комплексной $\xi = x + iy$ - плоскости. (Во всех вспомогательных формулах используются локальные обозначения; здесь x, y не являются пространственными координатами.) Получим

$$2\int_1^\infty \frac{e^{-\lambda y}}{\sqrt{y^2-1}}\,dy. \tag{5.11}$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся следующим интегральным представлением модифицированных функций Ганкеля (функций Макдональда)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)K_\nu(\lambda)=\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^\nu\int_1^\infty e^{-\lambda y}(y^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,dy,$$

где $\operatorname{Re}\lambda>0,\ \operatorname{Re}\nu<\frac{1}{2}$. В частности, при $\nu=0$ получаем

$$K_0(\lambda)=\int\limits_1^\infty\frac{e^{-\lambda y}}{\sqrt{y^2-1}}\,dy.$$

Таким образом, интеграл (5.11) равен $2K_0(\lambda)$. Тем самым,

$$\hat{U}(\mathbf{q})=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_0(r|z'|)\,\frac{\cos(rr')}{rr'}\,r^2dr. \tag{5.12}$$

5.5.

Сделаем в интеграле (5.12) замену переменной $x=r|z'|$ и введем обозначение $\lambda=r'/|z'|$. Тогда получим

$$\hat{U}(\mathbf{q})=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{r'}\,\frac{1}{|z'|^2}\,\int_0^\infty K_0(x)\cos(\lambda x)xdx.$$

Хорошо известно преобразование Лапласа функции Макдональда

$$F(p)=\int_0^\infty K_0(x)e^{-px}dx=\frac{\log(p+\sqrt{p^2-1})}{\sqrt{p^2-1}}.$$

Формула справедлива в полуплоскости $\operatorname{Re}p>-1$. Ветви многозначных функций выделяются условиями

$$\sqrt{p^2-1}\sim p,\qquad\log(p+\sqrt{p^2-1})\sim\log p,$$

при $p\to\infty$ (главные ветви). Дифференцируя по параметру получаем

$$\int_0^\infty K_0(x)e^{-px}xdx=-F'(p)=$$
$$=\frac{p}{(p^2-1)^{3/2}}\,\log(p+\sqrt{p^2-1})-\frac{1}{p^2-1}.$$

Полагая $p=i\lambda$, где $\lambda>0$, будем иметь

$$\int_0^\infty K_0(x)e^{-i\lambda x}xdx=-\frac{\lambda}{(\lambda^2+1)^{3/2}}\,\log(i\lambda+i\sqrt{\lambda^2+1})+\frac{1}{\lambda^2+1}.$$

Выделяя вещественную часть находим

$$\int_0^\infty K_0(x)\cos(\lambda x)xdx = \frac{1}{\lambda^2+1} - \frac{\lambda}{(\lambda^2+1)^{3/2}}\,\log(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}).$$

Таким образом,

$$\hat{U}(\mathbf{q}) = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{r'(r'^2+z'^2)} - \frac{\log\left(\frac{r'+\sqrt{r'^2+z'^2}}{|z'|}\right)}{(r'^2+z'^2)^{3/2}}\right\}. \tag{5.13}$$

5.6.

Мы вычислили интеграл (5.1) для векторов $\mathbf{q} \in \mathsf{C}$. Рассмотрим второй случай, когда вектор $\mathbf{q}$ лежит вне цилиндра C. Пусть, например, $\mathbf{q} \in \mathsf{C}_+$. Введем в этом цилиндре свои цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} z' = z' \\ t' = r'\operatorname{ch}\tau' \\ y' = r'\operatorname{sh}\tau'\sin\varphi' \\ x' = r'\operatorname{sh}\tau'\cos\varphi', \end{cases} \qquad \begin{cases} -\infty < z' < +\infty \\ 0 \leqslant r' < +\infty \\ 0 \leqslant \tau' < +\infty \\ 0 \leqslant \varphi' \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Тогда интеграл (5.1) примет вид

$$\hat{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^\infty r^2 dr \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{ch}\tau d\tau \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$
$$\exp\{izz' + irr'[-\operatorname{sh}\tau\operatorname{ch}\tau' + \operatorname{ch}\tau\operatorname{sh}\tau'(\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi')]\}. \tag{5.14}$$

Интегрирование по углу φ, как и выше, дает

$$2\pi J_0(rr'\operatorname{ch}\tau\operatorname{sh}\tau').$$

Вычислим входящий в (5.14) интеграл по $d\tau$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{ch}\tau d\tau \exp\{-irr'\operatorname{sh}\tau\operatorname{ch}\tau'\}J_0(rr'\operatorname{ch}\tau\operatorname{sh}\tau'). \tag{5.15}$$

Используем обозначения

$$\begin{cases} a = \eta\operatorname{sh}\tau' \\ b = \eta\operatorname{ch}\tau', \end{cases}$$

где $\eta = rr'$. Тогда интеграл (5.15) запишется в виде

$$2\int_0^\infty \cos(b\operatorname{sh}\tau)J_0(a\operatorname{ch}\tau)\operatorname{ch}\tau d\tau.$$

После замены $t = \operatorname{sh}\tau$ мы снова приходим к интегралу Сонина-Гегенбауэра (5.7). Но теперь выполняется неравенство $b > |a|$. Следовательно, этот интеграл равен нулю.

5.7.

Нами доказано

Предложение 5.1. *Преобразование Фурье кулоновского потенциала, ограниченного пространственноподобным цилиндром, имеет носитель в пространственноподобном цилиндре и вычисляется по формуле (5.13).*

Замечание. Функция $\hat{U}(\mathbf{q})$ имеет сингулярность на световом цилиндре.

Вспомним, что выполняется условие

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k_t^2 = k^2, \tag{5.16}$$

которое определяет трехмерный однополостный гиперболоид $\mathbf{\Gamma}$. Далее,

$$\mathbf{q} = (k_t, k_x, k_y, k_z - k).$$

Условие $\mathbf{q} \in \mathsf{C}$ означает, что

$$k_x^2 + k_y^2 - k_t^2 > 0. \tag{5.17}$$

Таким образом, рассеяние возможно лишь на векторах

$$\mathbf{k} \in \widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} \cap \mathsf{C}.$$

Из (5.16) и (5.17) вытекает, что

$$|k_z| < k. \tag{5.18}$$

Следовательно, $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ – это часть гиперболоида $\mathbf{\Gamma}$, ограниченная двумя плоскостями $k_z = \pm k$. Условие (5.18) позволяет ввести между векторами $\mathbf{k}^{(0)}$ и $\mathbf{k}$ сферический угол θ. Точнее, введем на поверхности $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ следующие координаты

$$\begin{cases} k_z = k\cos\theta \\ k_t = k\sin\theta\,\operatorname{sh}\tau \\ k_y = k\sin\theta\,\operatorname{ch}\tau\sin\varphi \\ k_x = k\sin\theta\,\operatorname{ch}\tau\cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ -\infty < \tau < +\infty \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Нормированная мера Лебега на поверхности $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ в этих координатах имеет вид

$$d\omega = \sin^2\theta d\theta\,\operatorname{ch}\tau d\tau d\varphi.$$

Сферический угол θ и гиперболический угол τ будем называть углами рассеяния. Далее, имеем

$$r' = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_t^2} = k\sin\theta$$
$$\rho' = \sqrt{r'^2 + (k_z - k)^2} = 2k\sin\frac{\theta}{2}.$$

Тогда из предложения 5.1 получаем следующий результат.

Теорема 5.1. *Амплитуда рассеяния на кулоновском потенциале в пространственноподобном цилиндре в борновском приближении равна*

$$f(\theta) = \frac{\sec\frac{\theta}{2} - \log\operatorname{ctg}\frac{\theta}{4}}{2k^3\sin^3\frac{\theta}{2}}.$$

Полное сечение рассеяния бесконечно

$$\int\limits_{\widetilde{\mathbf{\Gamma}}} |f|^2 d\omega = +\infty.$$

Рассеяние происходит преимущественно на малые углы. Амплитуда рассеяния зависит только от одного угла рассеяния θ. При малых углах θ можно пользоваться приближенной формулой

$$f(\theta) \sim \frac{\log\theta}{2k^3\sin^3\frac{\theta}{2}}, \qquad \theta \to 0.$$

6. Параболические координаты.

В этом параграфе мы найдем волновую функцию рассеяния в пространственноподобном цилиндре и сравним полученный результат с борновским приближением.

Введем в цилиндре C параболические координаты

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \\ t = \sqrt{\xi\eta}\operatorname{sh}\tau \\ y = \sqrt{\xi\eta}\operatorname{ch}\tau\sin\varphi \\ x = \sqrt{\xi\eta}\operatorname{ch}\tau\cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant \xi < +\infty \\ 0 \leqslant \eta < +\infty \\ -\infty < \tau < +\infty \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Первая квадратичная форма пространства Минковского в этих координатах имеет вид

$$d\mathbf{s}^2 = -\frac{\xi+\eta}{4\xi}d\xi^2 - \frac{\xi+\eta}{4\eta}d\eta^2 + \xi\eta d\tau^2 - \xi\eta \operatorname{ch}^2\tau d\varphi^2.$$

Элемент объема равен

$$dv = \frac{\xi+\eta}{4}\sqrt{\xi\eta}d\xi d\eta \operatorname{ch}\tau d\tau d\varphi.$$

Величина

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2-t^2}$$

равна

$$\rho = \frac{1}{2}(\xi+\eta).$$

Запишем оператор Даламбера в параболических координатах

$$\Box = -\left(\nabla_\xi^2 + \nabla_\eta^2\right) + \frac{1}{\xi\eta}\left(\nabla_\tau^2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\tau}\nabla_\varphi^2\right),$$

где

$$\begin{aligned}
\nabla_\varphi^2 &= \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \\
\nabla_\tau^2 &= \frac{1}{\operatorname{ch}\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\operatorname{ch}\tau\frac{\partial}{\partial\tau} \\
\nabla_\xi^2 &= \frac{4}{\xi+\eta}\frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\sqrt{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} \\
\nabla_\eta^2 &= \frac{4}{\xi+\eta}\frac{1}{\sqrt{\eta}}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\sqrt{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}.
\end{aligned}$$

Будем решать уравнение Шредингера

$$\left(\Box - \frac{2}{\rho}\right)\psi = k^2\psi, \qquad k > 0,$$

методом разделения переменных в параболических координатах

$$\psi = \Xi(\xi)\mathrm{H}(\eta)\mathrm{T}(\tau)\Phi(\varphi).$$

Получим систему уравнений

$$\nabla_\varphi^2\Phi + m^2\Phi = 0 \tag{6.1}$$

$$\nabla_\tau^2\mathrm{T} + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2\tau}\mathrm{T} = \lambda\mathrm{T} \tag{6.2}$$

$$\frac{\xi+\eta}{4}\nabla_\xi^2\Xi + \left(\frac{k^2}{4}\xi - \frac{\lambda}{4}\frac{1}{\xi}\right)\Xi = \beta_\xi\Xi \tag{6.3}$$

$$\frac{\xi+\eta}{4}\nabla_\eta^2\mathrm{H} + \left(\frac{k^2}{4}\eta - \frac{\lambda}{4}\frac{1}{\eta}\right)\mathrm{H} = \beta_\eta\mathrm{H}, \tag{6.4}$$

где m, λ, β_ξ, β_η – постоянные разделения. При этом выполняется соотношение

$$\beta_\xi + \beta_\eta = -1.$$

Предполагая, что волновая функция рассеяния не зависит от углов φ и τ, получаем

$$\Phi = 1, \qquad m = 0,$$
$$\mathrm{T} = 1, \qquad \lambda = 0.$$

Функция

$$\Xi(\xi) = e^{\frac{ik\xi}{2}}$$

удовлетворяет соответствующему уравнению с постоянной

$$\beta_\xi = \frac{3ik}{4}.$$

Функцию $\mathrm{H}(\eta)$ ищем в виде

$$\mathrm{H}(\eta) = e^{-\frac{ik\eta}{2}} w(\eta).$$

Тогда получим уравнение

$$\eta w'' + \big(\frac{3}{2} - ik\eta\big) w' + w = 0.$$

Полагая $x = ik\eta$, а также $w(\eta) = u(x)$, будем иметь

$$x u'' + \big(\frac{3}{2} - x\big) u' - \frac{i}{k} u = 0. \tag{6.5}$$

Вырожденным гипергеометрическим уравнением называется уравнение вида

$$z u'' + (\gamma - z) u' - \alpha u = 0,$$

где α и γ – произвольные комплексные параметры. Пусть $\alpha,\ \gamma \neq 0,\ -1,\ -2, \ldots$ Голоморфное в нуле решение этого уравнения называется вырожденной гипергеометрической функцией

$$F(\alpha, \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{6.6}$$

где

$$(p)_n = p(p+1)\ldots(p+n-1)$$

символ Похгаммера. В уравнении (6.5) $\alpha = \frac{i}{k},\ \gamma = \frac{3}{2}$. Таким образом, волновая функция рассеяния имеет вид

$$\psi = C e^{\frac{ik}{2}(\xi - \eta)} F\Big(\frac{i}{k}, \frac{3}{2}; ik\eta\Big),$$

где C – нормировочная постоянная. Хорошо известно асимптотическое разложение при $z \to \infty$ функции (6.6):

$$F(\alpha, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\alpha-\gamma+1)_n}{n!(-z)^n} + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_n(1-\alpha)_n}{n! z^n}.$$

Мы видим, что эта асимптотика не согласуется с поставленной в §3 задачей рассеяния. Тем не менее, определим амплитуду рассеяния выделяя лишь главные члены в каждом слагаемом. Имеем

$$\psi \approx C e^{ikz} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{i}{k})} \exp\Bigl\{-\frac{i}{k}\log(k\eta)\Bigr\} e^{-\frac{\pi}{2k}} + \\ + C \frac{e^{ik\rho}}{(k\eta)^{3/2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{i}{k})} \exp\Bigl\{\frac{i}{k}\log(k\eta)\Bigr\} e^{-\frac{\pi}{2k}} e^{-\frac{3\pi i}{4}}.$$

Положим

$$C = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{i}{k})}{\Gamma(\frac{3}{2})} e^{\frac{\pi}{2k}}.$$

Введем сферический угол θ такой, что $z = \rho\cos\theta$. Получим

$$\psi \approx e^{ikz} \exp\Bigl\{-\frac{i}{k}\log(k\rho(1-\cos\theta))\Bigr\} + \\ + \frac{e^{ik\rho}}{(k\rho(1-\cos\theta))^{3/2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{i}{k})}{\Gamma(\frac{i}{k})} \exp\Bigl\{\frac{i}{k}\log(k\rho(1-\cos\theta)) - \frac{3\pi i}{4}\Bigr\}.$$

Не учитывая в этой формуле медленно меняющуюся фазу будем иметь

Предложение 6.1. *Амплитуда рассеяния для кулоновского потенциала в пространственноподобном цилиндре имеет вид*

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{i}{k})}{\Gamma(\frac{i}{k})} \frac{1}{(2k\sin^2\frac{\theta}{2})^{3/2}}.$$

Вычислим квадрат модуля амплитуды рассеяния. Имеем

$$\left|\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{i}{k}\right)\right|^2 = \Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{i}{k}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{i}{k}\right) = \\ = \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{k}\right) = \\ = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{k^2}\right)\frac{\pi}{\sin\pi(\frac{1}{2}-\frac{i}{k})} = \frac{k^2+4}{4k^2}\,\frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{k}}.$$

Аналогично,

$$\left|\Gamma\left(\frac{i}{k}\right)\right|^2 = \Gamma\left(\frac{i}{k}\right)\Gamma\left(-\frac{i}{k}\right) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{i}{k}\right)\Gamma\left(-\frac{i}{k}\right)}{\left(\frac{i}{k}\right)} = \frac{1}{i/k}\,\frac{\pi}{\sin(-\frac{\pi i}{k})} = \frac{\pi k}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{k}}.$$

Окончательно,

$$|f(\theta)|^2 = \frac{k^2+4}{4k^3}\,\operatorname{th}\frac{\pi}{k}\,\frac{1}{8k^3\sin^6\frac{\theta}{2}}.$$

Для медленных электронов, т.е. при $k \to 0$, приближенно имеем

$$|f(\theta)|^2 \approx \frac{\pi}{8k^6\sin^6\frac{\theta}{2}}. \tag{6.7}$$

Полученное в §5 борновское приближение отличается от (6.7) логарифмическим множителем.

7. Цилиндрический атом.

7.1.

Рассмотрим движение электрона в поле кулоновского потенциала, ограниченного пространственноподобным цилиндром C. Будем искать связанные состояния системы, т.е. волновые функции, принадлежащие гильбертову пространству $L_2(\mathsf{C})$. Эту модель назовем цилиндрическим атомом. Волновые функции нормируем условием

$$\int\limits_{\mathsf{C}} |\psi|^2 dv = 1.$$

Тогда $|\psi|^2$ будет плотностью вероятности нахождения электрона в данной точке цилиндра C, другими словами, плотностью заряда электронного облака.

Применим метод разделения переменных в параболических координатах. Получим систему уравнений (6.1) – (6.4) с $k^2 = E$. Решения уравнения

(6.1) имеют физический смысл для целых значений постоянной разделения m. Это – 2π- периодические решения, а именно:

$$\Phi_m(\varphi) = C_m^\Phi e^{im\varphi}, \qquad m \in \mathbb{Z}, \tag{7.1}$$

где C_m^Φ – нормировочные постоянные. Они находятся из условия

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_m|^2 d\varphi = 1,$$

и следовательно равны

$$C_m^\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{7.2}$$

7.2.

Рассмотрим уравнение (6.2). Сделаем подстановку

$$\mathrm{T}(\tau) = \frac{\tilde{T}(\tau)}{\sqrt{\operatorname{ch}\tau}}$$

и введем обозначение

$$\nu^2 = \lambda + \frac{1}{4}, \qquad \nu > 0.$$

Придем к уравнению

$$-\tilde{T}'' - \frac{m^2 - 1/4}{\operatorname{ch}^2\tau}\tilde{T} = -\nu^2\tilde{T}. \tag{7.3}$$

Это уравнение имеет вид одномерного уравнения Шредингера с эффективным потенциалом Пешля-Теллера. Известно [7], что дискретный спектр уравнения лежит в области отрицательных значений энергии: $-\nu^2 < 0$, и состоит из конечного числа уровней

$$\nu = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}, \ldots, |m| - \frac{1}{2}.$$

В частности, при $m = 0$ связанных состояний нет. Соответствующие волновые функции с точностью до нормировки определяются формулой

$$\tilde{T}_{\nu,m}(\tau) = \frac{1}{(\operatorname{ch}\tau)^\nu} \sum_{k=0}^{m-\frac{1}{2}-\nu} \frac{(\nu - m + \frac{1}{2})_k\,(\nu + m + \frac{1}{2})_k}{(\nu+1)_k\,k!}\,\frac{1}{(e^{2\tau}+1)^k}.$$

Здесь, без ограничения общности, $m > 0$.

Докажем справедливость этой формулы, установим ее связь с многочленами Якоби и вычислим нормировочные постоянные. Будем искать решения уравнения (7.3) в виде

$$\widetilde{T}(\tau) = \frac{Q(y)}{(\operatorname{ch}\tau)^{\nu}}, \qquad y = \frac{1}{e^{2\tau}+1}.$$

Получим уравнение

$$y(1-y)Q'' + (1+\nu)(1-2y)Q' + \varkappa Q = 0,$$

где

$$\varkappa = m^2 - \frac{1}{4} - \nu(\nu+1).$$

Сделаем подстановку

$$Q(y) = P(x), \qquad x = 1-2y \qquad x = \operatorname{th}\tau.$$

Будем иметь

$$(1-x^2)P'' - 2(1+\nu)xP' + \varkappa P = 0. \tag{7.4}$$

Это гипергеометрическое уравнение имеет полиномиальные решения, тогда и только тогда, когда

$$\varkappa = k(k+2\nu+1), \qquad k = 0,\, 1,\, 2, \ldots$$

Следовательно,

$$\nu = m - k - \frac{1}{2}.$$

Решениями служат многочлены Якоби $P_k^{(\nu,\nu)}$. Это – многочлены степени k, удовлетворяющие следующим соотношениям ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_k^{(\nu,\nu)}(x)x^{\mu}(1-x^2)^{\nu}dx = 0, \quad \mu = 0, \ldots, k-1.$$

В стандартизованной форме они могут быть определены формулой Родрига

$$P_k^{(\nu,\nu)}(x)(1-x^2)^{\nu} = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left\{(1-x^2)^{\nu+k}\right\}.$$

Окончательно,

$$\mathrm{T}_{\nu,m}(\tau) = C^{\mathrm{T}}_{\nu,m}\,\frac{P^{(\nu,\nu)}_{m-\nu-1/2}(\operatorname{th}\tau)}{(\operatorname{ch}\tau)^{\nu+1/2}}. \tag{7.5}$$

Нормировочная постоянная определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{T}_{\nu,m}(\tau)|^2\, \operatorname{ch}\tau\, d\tau = 1.$$

Неполиномиальные решения уравнения (7.4) приводят к расходящемуся интегралу.

7.3.

Справедлива

Лемма 7.1. *Нормировочная постоянная $C^{\mathrm{T}}_{\nu,m}$ вычисляется по формуле*

$$C^{\mathrm{T}}_{\nu,m} = \left\{ 2^{2k+2\nu} \, \frac{(\nu+1)_k}{k!} \, B(\nu, k+\nu+1) \right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.6}$$

где $k = m - \nu - 1/2$.

Доказательство. Вычислим интеграл

$$\mathcal{J} = \int_{-\infty}^{+\infty} |P(\operatorname{th}\tau)|^2 \, \frac{d\tau}{(\operatorname{ch}\tau)^{2\nu}},$$

где $P = P_k^{(\nu,\nu)}$. Сделаем подстановку $x = \operatorname{th}\tau$. Получим

$$\mathcal{J} = \int_{-1}^{+1} |P(x)|^2 (1-x^2)^{\nu-1} dx.$$

Запишем

$$P(x) = A(x)(1-x^2) + B(x),$$

где A и B – многочлены, причем $\deg B \leqslant 1$. Если k – четное, то $B(x) = b$ – некоторая константа; если k – нечетное, то $B(x) = bx$. В обоих случаях $b = P(1)$. Из формулы Родрига следует, что

$$P(x) = \frac{(\nu+1)_k}{k!} \, (1+x)^k + O(1-x), \quad x \to 1.$$

Таким образом

$$b = \frac{(\nu+1)_k}{k!} \, 2^k.$$

Вначале рассмотрим случай $\nu \geqslant 3/2$. Пусть k – четное. Тогда

$$\mathcal{J} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dx} \right)^k \left\{ (1-x^2)^{\nu+k} \right\} \frac{b}{2} \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right\} dx.$$

Интегрируя по частям получим

$$\mathcal{J} = \frac{b}{2} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\nu+k} \left\{ \frac{1}{(1-x)^{k+1}} + \frac{1}{(1+x)^{k+1}} \right\} dx$$

или

$$\mathcal{J} = b \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\nu-1} (1+x)^{\nu+k} \, dx.$$

Сделаем подстановку $x = 2y - 1$. Получим

$$\mathcal{J} = b \cdot 2^{k+2\nu} \cdot \int_0^1 (1-y)^{\nu-1} y^{\nu+k}\, dy$$

или

$$\mathcal{J} = b \cdot 2^{k+2\nu} \cdot B(\nu, k+\nu+1).$$

Для нечетных k аналогичные вычисления приводят к тому же результату. Таким образом, при $\nu \geqslant 3/2$ лемма доказана.

При $\nu = 1/2$ получаем многочлены Чебышева второго рода. Из формулы Родрига следует, что старший коэффициент стандартизованного многочлена равен

$$(-1)^k \frac{(k+2)_k}{k!}.$$

С другой стороны, эти многочлены могут быть записаны в тригонометрической форме, как

$$\frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}, \qquad x = \cos\varphi,$$

со старшим коэффициентом 2^k. Таким образом,

$$P_k^{(1/2,1/2)}(x) = A_k \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

где

$$A_k = (-1)^k \frac{(k+2)_k}{k! 2^k}.$$

Тогда

$$\mathcal{J} = A_k^2 \widetilde{\mathcal{J}},$$

где

$$\widetilde{\mathcal{J}} = \int_0^\pi \left(\frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}\right)^2 d\varphi$$

или

$$\widetilde{\mathcal{J}} = \int_0^{2\pi} \frac{2 - e^{i(k+1)\varphi} - e^{-i(k+1)\varphi}}{2 - e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} \frac{d\varphi}{2}.$$

Делая подстановку $z = e^{i\varphi}$ получим

$$\widetilde{\mathcal{J}} = \frac{1}{2i} \oint\limits_{|z|=1} \left(\frac{z^{k+1}-1}{z-1}\right)^2 \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

Поскольку

$$\operatorname*{res}_{z=0} \left\{ \frac{(1+z+\cdots+z^k)^2}{z^{k+1}} \right\} = k+1,$$

то

$$\widetilde{\mathcal{J}} = (k+1)\pi.$$

Откуда следует формула (7.6) при $\nu = 1/2$.

Лемма доказана.

7.4.

Рассмотрим уравнение (6.3):

$$\frac{1}{\sqrt{\xi}}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,\xi^{3/2}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,\Xi + \left(\frac{E}{4}\,\xi - \frac{\lambda}{4}\,\frac{1}{\xi}\right) = \beta_\xi \Xi,$$

где $\lambda = \nu^2 - 1/4$. Введем обозначение

$$E = -\frac{1}{n^2}, \qquad n > 0.$$

Сделаем подстановку

$$\Xi(\xi) = f(x), \qquad x = \frac{\xi}{n}.$$

Получим

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\partial}{\partial x}\,x^{3/2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,f(x) - \frac{1}{4}\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) f(x) = n\beta_\xi f(x)$$

или

$$xf'' + \frac{3}{2}f' - \frac{1}{4}\left(x + \frac{\lambda}{x}\right) f = n\beta_\xi f.$$

Будем искать решения в виде

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} w(x).$$

Получим

$$xw'' - \big(x - \frac{3}{2}\big)w' - \frac{\lambda}{4x}\,w = \big(n\beta_\xi + \frac{3}{4}\big)w.$$

При $x \to 0$ одно из решений ведет себя, как

$$w(x) \approx x^\alpha, \qquad \alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}.$$

Поэтому полагаем

$$w(x) = x^\alpha u(x).$$

Тогда получим

$$xu'' + (\nu + 1 - x)u' - \left(\frac{\nu+1}{2} + n\beta_\xi\right)u = 0.$$

Вырожденное гипергеометрической уравнение

$$xu'' + (b - x)u' - au = 0$$

имеет полиномиальные решения при

$$a = -k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.7}$$

Тогда u – многочлен степени k, а именно, обобщенный многочлен Лагерра

$$u(x) = L_k^{(b-1)}(x).$$

Условие (7.7) означает, что

$$k = n_\xi = -\left(\frac{\nu + 1}{2} + n\beta_\xi\right), \tag{7.8}$$

при этом $u = L_k^{(\nu)}$.

Многочлены Лагерра удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности

$$\int_0^\infty L_k^{(\nu)}(x)\, x^\mu \cdot x^\nu e^{-x} dx = 0, \quad \mu = 0, \ldots, k - 1.$$

Стандартизованные многочлены Лагерра можно определить формулой Родрига

$$L_k^{(\nu)}(x) x^\nu e^{-x} = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left\{x^{\nu+k} e^{-x}\right\}.$$

Окончательно,

$$\Xi_{n_\xi,\nu}(\xi) = f\left(\frac{\xi}{n}\right), \tag{7.9}$$

где

$$n = \frac{1}{\sqrt{-E}},$$

и

$$f(x) = x^{\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\xi}^{(\nu)}(x). \tag{7.10}$$

При этом квантовые числа (7.8) принимают целые неотрицательные значения.

Аналогично,

$$\mathrm{H}_{n_\eta,\nu}(\eta) = g\left(\frac{\eta}{n}\right), \tag{7.11}$$

где

$$g(y) = y^{\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} e^{-\frac{y}{2}} L_{n_\eta}^{(\nu)}(y). \tag{7.12}$$

Квантовое число
$$n_\eta = -\left(\frac{\nu+1}{2} + n\beta_\eta\right)$$
принимает целые неотрицательные значения.

Из соотношения $\beta_\xi + \beta_\eta = -1$ следует, что
$$n_\xi + n_\eta = n - \nu - 1.$$
Обозначим
$$R_{n_\xi,n_\eta,\nu} = C^R_{n_\xi,n_\eta,\nu}\Xi_{n_\xi,\nu}\mathrm{H}_{n_\eta,\nu}. \tag{7.13}$$
Нормировочная постоянная находится из условия
$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |R_{n_\xi,n_\eta,\nu}(\xi,\eta)|^2 \frac{\xi+\eta}{4}\sqrt{\xi\eta}\,d\xi d\eta = 1.$$

7.5.

Справедлива

Лемма 7.2. *Нормировочная постоянная $C^R_{n_\xi,n_\eta,\nu}$ вычисляется по формуле*
$$C^R_{n_\xi,n_\eta,\nu} = \left\{\frac{n^5}{2}\frac{\Gamma(n_\xi+\nu+1)}{n_\xi!}\frac{\Gamma(n_\eta+\nu+1)}{n_\eta!}\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{7.14}$$

Доказательство. Вычислим интеграл
$$\mathcal{J} = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \left|\left(\frac{\xi}{n}\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{\eta}{n}\right)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\xi}{2n}}e^{-\frac{\eta}{2n}}L^{(\nu)}_{n_\xi}\left(\frac{\xi}{n}\right)L^{(\nu)}_{n_\eta}\left(\frac{\eta}{n}\right)\right|^2\frac{\xi+\eta}{4}\sqrt{\xi\eta}d\xi d\eta$$
или
$$\mathcal{J} = \frac{n^4}{4}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty x^{\nu-1/2}y^{\nu-1/2}e^{-x}e^{-y}|L^{(\nu)}_{n_\xi}(x)|^2|L^{(\nu)}_{n_\eta}(y)|^2(x+y)\sqrt{xy}dxdy.$$
Введем обозначения
$$\alpha_k = \int_0^\infty x^{\nu-1/2}e^{-x}|L^{(\nu)}_k(x)|^2x^{3/2}dx,$$
$$\beta_k = \int_0^\infty x^{\nu-1/2}e^{-x}|L^{(\nu)}_k(x)|^2x^{1/2}dx.$$

Тогда

$$\mathcal{J} = \frac{n^4}{4}\left\{\alpha_{n_\xi}\beta_{n_\eta} + \alpha_{n\eta}\beta_{n_\xi}\right\}.$$

Введем следующие обозначения для коэффициентов многочлена Лагерра:

$$L_k^{(\nu)}(x) = \lambda_k x^k + \lambda_k' x^{k-1} + \dots$$

Тогда

$$\beta_k = \int_0^\infty L_k^{(\nu)}(x)\cdot \lambda_k x^k \cdot x^\nu e^{-x} dx,$$

$$\alpha_k = \int_0^\infty L_k^{(\nu)}(x)\cdot \{\lambda_k x^{k+1} + \lambda_k' x^k\} \cdot x^\nu e^{-x} dx.$$

Из формулы Родрига следует, что

$$\lambda_k = \frac{(-1)^k}{k!}, \qquad \lambda_k' = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}(\nu + k).$$

Вычислим интеграл

$$b_k = \int_0^\infty L_k^{(\nu)}(x)\cdot x^k \cdot x^\nu e^{-x} dx.$$

Интегрируя по частям получим

$$b_k = \int_0^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left\{x^{k+\nu}e^{-x}\right\}\cdot x^k \cdot dx =$$

$$= (-1)^k \int_0^\infty x^{k+\nu} e^{-x} dx = (-1)^k \Gamma(k+\nu+1).$$

Вычислим интеграл

$$a_k = \int_0^\infty L_k^{(\nu)}(x)\cdot x^{k+1} \cdot x^\nu e^{-x} dx.$$

Интегрируя по частям получим

$$a_k = \int_0^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \left\{x^{k+\nu}e^{-x}\right\}\cdot x^{k+1} dx =$$

$$= (-1)^k (k+1)\int_0^\infty x^{k+\nu+1} e^{-x} dx = (-1)^k (k+1)\Gamma(k+\nu+2).$$

Далее,

$$\beta_k = \lambda_k b_k = \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{k!},$$

и

$$\alpha_k = \lambda_k a_k + \lambda_k' b_k = (2k+\nu+1)\frac{\Gamma(k+\nu+1)}{k!}.$$

Откуда следует утверждение леммы.

7.6.

Итак, справедлива

Теорема 7.1.

1) Базис пространства связанных состояний цилиндрического атома составляют волновые функции $\psi_{n_\xi,n_\eta,\nu,m}$, зависящие от четырех квантовых чисел, а именно:

a) параболические квантовые числа n_ξ и n_η принимают любые целые неотрицательные значения

$$n_\xi, n_\eta = 0, 1, 2, \ldots;$$

b) гиперболическое квантовое число ν принимает полуцелые значения

$$\nu = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}, \ldots, n-1,$$

где главное квантовое число n также принимает полуцелые значения

$$n = \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}, \ldots,$$

при этом

$$n_\xi + n_\eta = n - \nu - 1; \tag{7.15}$$

c) магнитное квантовое число m принимает целые значения

$$\pm m = \nu + \frac{1}{2},\ \nu + \frac{3}{2}, \ldots$$

2) Волновым функциям, удовлетворяющим соотношению (7.15), соответствует один уровень энергии

$$E_n = -\frac{1}{n^2}.$$

Все уровни энергии имеют бесконечное вырождение.

3) В параболических координатах волновые функции имеют следующий вид

$$\psi_{n_\xi,n_\eta,\nu,m}(\xi,\eta,\tau,\varphi) = R_{n_\xi,n_\eta,\nu}(\xi,\eta)\mathrm{T}_{\nu,m}(\tau)\Phi_m(\varphi),$$

где $R_{n_\xi,n_\eta,\nu}$ определена формулами (7.9 – 7.14), $\mathrm{T}_{\nu,m}$ – формулами (7.5), (7.6), а Φ_m – (7.1), (7,2).

Следствие 7.1. *Волновые функции основного невозбужденного состояния, соответствующие квантовым числам*

$$n = \frac{3}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad n_\xi = n_\eta = 0, \quad m = \pm 1,$$

суть

$$\psi = \frac{8\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\,\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{\pm i\varphi}}{\operatorname{ch}\tau}\,e^{-\frac{\xi+\eta}{3}}.$$

8. Сферические координаты

8.1.

В этом параграфе мы вычислим волновые функции цилиндрического атома в сферических координатах

$$\begin{cases} z = \rho\cos\theta \\ t = \rho\sin\theta\operatorname{sh}\tau \\ y = \rho\sin\theta\operatorname{ch}\tau\sin\varphi \\ x = \rho\sin\theta\operatorname{ch}\tau\cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant \rho < +\infty \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ -\infty < \tau < +\infty \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Первая квадратичная форма пространства Минковского в этих координатах имеет вид

$$d\mathbf{s}^2 = -d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta d\tau^2 - \rho^2\sin^2\theta\operatorname{ch}^2\tau d\varphi^2.$$

Элемент объема равен

$$dv = \rho^3 d\rho\sin^2\theta d\theta\operatorname{ch}\tau d\tau d\varphi.$$

Запишем оператор Даламбера в сферических координатах

$$\Box = -\nabla^2_\rho - \frac{1}{\rho^2}\left[\nabla^2_\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\nabla^2_\tau - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\tau}\nabla^2_\varphi\right)\right],$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^2_\rho &= \frac{1}{\rho^3}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,\rho^3\,\frac{\partial}{\partial\rho} \\ \nabla^2_\theta &= \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin^2\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \nabla^2_\tau &= \frac{1}{\operatorname{ch}\tau}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\,\operatorname{ch}\tau\,\frac{\partial}{\partial\tau} \\ \nabla^2_\varphi &= \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \end{aligned}$$

Применим метод разделения переменных

$$\psi = R(\rho)\Theta(\theta)\mathrm{T}(\tau)\Phi(\varphi).$$

Получим систему уравнений

$$\nabla_\varphi^2 \Phi + m^2 \Phi = 0 \tag{8.1}$$

$$\nabla_\tau^2 \mathrm{T} + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 \tau} \mathrm{T} = \lambda \mathrm{T} \tag{8.2}$$

$$-\nabla_\theta^2 \Theta + \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \Theta = \mu \Theta \tag{8.3}$$

$$-\nabla_\rho^2 R + \left\{ -\frac{2}{\rho} - E + \frac{\mu}{\rho^2} \right\} = 0, \tag{8.4}$$

где m, λ, μ – постоянные разделения. Уравнения (8.1) и (8.2) совпадают с уравнениями (6.1) и (6.2) соответственно. Решение уравнения (8.1) – $\Phi_m(\varphi)$ определено формулами (7.1), (7.2). Магнитное квантовое число m принимает целые значения

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Решение уравнения (8.2) – $\mathrm{T}_{\nu,m}(\tau)$ определено формулами (7.5), (7.6). Гиперболическое квантовое число ν принимает полуцелые значения

$$\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, |m| - \frac{1}{2}.$$

При этом

$$\lambda = \nu^2 - \frac{1}{4}.$$

8.2.

Рассмотрим уравнение (8.3). При $\theta \to 0$ одно из решений ведет себя как

$$\Theta(\theta) \approx \theta^\alpha, \qquad \alpha = \nu - 1/2.$$

Поэтому будем искать решение в виде

$$\Theta(\theta) = \sin^\alpha \theta \, y(\theta).$$

Тогда

$$y'' + 2(\alpha + 1) \operatorname{ctg} \theta \, y' - (\alpha^2 + 2\alpha - \mu) y = 0.$$

Положим

$$y(\theta) = u(x), \qquad x = \cos \theta.$$

Получим

$$(1 - x^2) u'' - 2(\nu + 1) x u' - (\nu^2 + \nu - 3/4 - \mu) u = 0.$$

Это гипергеометрическое уравнение имеет полиномиальные решения, когда

$$-(\nu^2+\nu-3/4-\mu)=k(k+2\nu+1), \qquad k=0,1,2,\dots$$

Следовательно,

$$\mu=l(l+2), \quad k=l-\nu+1/2, \qquad l=0,1,2,\dots$$

Решениями служат многочлены Якоби

$$u(x)=P_k^{(\nu,\nu)}(x).$$

Окончательно, получаем сферические функции

$$\Theta_{l,\nu}(\theta)=C_{l,\nu}^{\Theta}\,\sin^{\nu-1/2}\theta\;P_k^{(\nu,\nu)}(\cos\theta). \tag{8.5}$$

Нормировочный множитель определяется из условия

$$\int_0^{\pi}|\Theta_{l,\nu}(\theta)|^2\sin^2\theta\,d\theta=1.$$

Лемма 8.1. *Нормировочный множитель* $C_{l,\nu}^{\Theta}$ *вычисляется по формуле*

$$C_{l,\nu}^{\Theta}=\left\{\frac{(2\nu+k+1)_k}{k!}\,B(\nu+k+1,1/2)\right\}^{-1/2}, \tag{8.6}$$

где $k=l-\nu+1/2$.

Доказательство леммы проводится с помощью формулы Родрига также, как в §7.

8.3.

Рассмотрим уравнение (8.4), где $\mu=l(l+2)$. Введем обозначение

$$E=-\frac{1}{n^2}, \qquad n>0,$$

и сделаем подстановку

$$R(\rho)=w(t), \qquad t=\frac{\rho}{n}.$$

Получим

$$w''+\frac{3}{t}w'+\left\{\frac{2n}{t}-1-\frac{l(l+2)}{t^2}\right\}w=0.$$

При $t\to 0$ интегрируемое решение ведет себя, как

$$w(t)\approx t^l,$$

а при $t \to +\infty$, как

$$w(t) \approx e^{-t}.$$

Поэтому будем искать решение в виде

$$w(t) = t^l e^{-t} u(x), \qquad x = 2t.$$

Получим вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$xu'' + (2l + 3 - x)u' + \left(n - l - \frac{3}{2}\right)u = 0.$$

Оно имеет полиномиальные решения, когда радиальное квантовое число

$$k = n - l - \frac{3}{2}$$

принимает целые значения: $k = 0, 1, 2, \ldots$, и тем самым, главное квантовое число n принимает полуцелые значения

$$n = \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}, \ldots$$

Решением служит многочлен Лагерра

$$u(x) = L_k^{(2l+2)}(x).$$

Окончательно, получаем

$$R_{n,l}(\rho) = C_{n,l}^R \left(\frac{\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}}\ L_k^{(2l+2)}\left(\frac{2\rho}{n}\right). \tag{8.7}$$

Нормировочная постоянная находится из условия

$$\int_0^\infty |R_{n,l}(\rho)|^2 \rho^3 d\rho = 1.$$

Лемма 8.2. *Нормировочная постоянная $C_{n,l}^R$ вычисляется по формуле*

$$C_{n,l}^R = \left\{\frac{n^5}{2^{2l+3}}\ \frac{\Gamma(k + 2l + 3)}{k!}\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{8.8}$$

8.4.

Таким образом, доказана

Теорема 8.1.

1) Базис пространства связанных состояний цилиндрического атома составляют волновые функции $\psi_{n,l,\nu,m}$ *, зависящие от четырех квантовых чисел, а именно:*

a) главное квантовое число n *принимает полуцелые значения*

$$n = \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}, \dots;$$

b) орбитальное квантовое число l *прринимает целые значения*

$$l = 0, 1, \dots, n - \frac{3}{2};$$

c) гиперболическое квантовое число ν *принимает полуцелые значения*

$$\nu = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}, \dots, l + \frac{1}{2};$$

d) магнитное квантовое число m *принимает целые значения*

$$\pm m = \nu + \frac{1}{2},\ \nu + \frac{3}{2}, \dots.$$

2) Уровни энергии определяются главным квантовым числом n *по формуле*

$$E_n = -\frac{1}{n^2}.$$

Все уровни энергии бесконечно вырождены.

3) Волновые функции связанных состояний имеют вид

$$\psi_{n,l,\nu,m} = R_{n,l}\Theta_{l,\nu}\mathrm{T}_{\nu,m}\Phi_m,$$

где радиальные волновые функции $R_{n,l}$ *определены формулами (8.7), (8.8); сферические функции* $\Theta_{l,\nu}$ *– формулами (8.5), (8.6); гиперболические функции* $\mathrm{T}_{\nu,m}$ *– формулами (7.5), (7.6); а* Φ_m *– формулами (7.1), (7.2).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Dirac P.A.M.*Generalized Hamiltonian Dynamics* // Can. J. Math. 1950. V2. P.129 - 148.
Дирак П.А.М.*Принципы квантовой механики.* М. 1960.

[2] Козлов В.В., Никишин Е.М. *Релятивистский вариант гамильтонова формализма и волновые функции водородоподобного атома*// Вестник Московского университета. Сер.1. Матем. Механ. 1986. N5. С.11-20.

[3] Приходько М.А. *Асимптотика информационной энтропии для двумерного аналога релятивистского атома водорода в модели Козлова-Никишина*// Матем. заметки. 2005. Т.78, вып.5. С.727-744.

[4] Приходько М.А. *Информационная энтропия релятивистской модели Козлова-Никишина*// Теоретическая и математическая физика. 2006.Т.148. N3. С.444-458.

[5] Сорокин В.Н. *Упругие столкновения быстрых электронов с релятивистским атомом водорода*// Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2006, N24. С.1-31.

[6] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т.2. М. Наука, 1965.

[7] Флюге З. *Задачи по квантовой механике.* М. Наука. 1974.