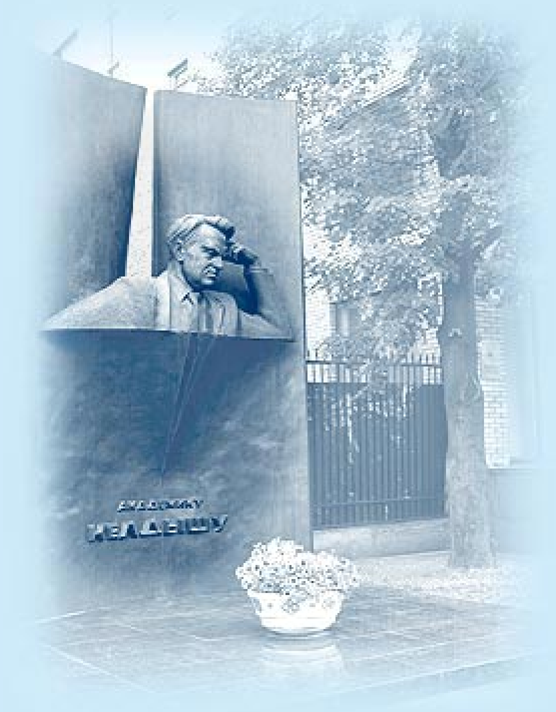

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

А. Д. Брюно, И. В. Горючкина

Обзор всех асимптотических разложений решений уравнения P6

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина

ОБЗОР
ВСЕХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ
РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЯ P6

Москва, 2007 г.

УДК 517.91

А.Д. Брюно, И.В. Горючкина. Обзор всех асимптотических разложения решений уравнения P6. Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2007.

Здесь изложена история возникновения проблемы, дан краткий обзор работ, связанных с ней, сформулирована цель исследования и приведены основные результаты в виде теорем. Мы рассматривали все асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи всех трех его особых точек $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$ при всех значениях его четырех комплексных параметров. Они образуют 111 семейств и включают разложения четырех типов: степенные, степенно-логарифмические, сложные и экзотические. Подавляющее большинство этих разложений – новые.

A.D. Bruno, I.V. Goryuchkina. Review of all asymptotic expansions of solutions to the equation P6. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS. Moscow, 2007.

Here are the history of origin of the problem, short review of works, formulating of purpose of the research and main results in form of theorems. We considered all asymptotic expansions of solutions to the sixth Painlevé equation near all three its singular points $x = 0$, $x = 1$ and $x = \infty$ for all values of its four complex parameters. They form alltogether 111 families and include expansions of four types: power, power-logarithmic, complicated and exotic. Most of these expansions are new.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00050).

e-mail: abruno@keldysh.ru, chukhareva@yandex.ru

Введение

В 1884-1885 годах Л. Фукс [35] и А. Пуанкаре [53–55] предложили искать нелинейные дифференциальные уравнения, решения которых не имеют критических подвижных особых точек и не выражаются через ранее известные функции. В 1889 году С. Ковалевская [25] показала, что отсутствие подвижных критических особых точек в решениях позволяет построить решения в аналитическом виде.

Особая точка $x = x_0$ функции $y(x)$ комплексной переменной x называется *критической особой точкой*, если при обходе этой точки значение функции $y(x)$ меняется. *Подвижной особой точкой* решения дифференциального уравнения называется такая особая точка, положение которой зависит от начальных данных задачи. Так, для решения $y = 1/\sqrt{x - x_0}$, где x_0 – произвольная постоянная, точка $x = x_0$ является подвижной критической особой точкой. *Мероморфной функцией* называют всякую однозначную функцию не имеющую в конечной части плоскости особых точек, кроме полюсов.

В 1887 году Э. Пикар [52] предложил исследовать класс обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{1}$$

где F – рациональная функция от y и y' и мероморфная функция от x, и найти среди уравнений (1) те уравнения, решения которых не имеют подвижных критических особых точек. В начале XX века П. Пенлеве [49–51], его ученики: Б. Гамбье [37] и Р. Гарнье [38, 39], решили задачу, поставленную Фуксом и Пикаром. Они нашли 50 канонических уравнений вида (1) с решениями, не имеющими подвижных критических особых точек. При этом решения 44-х уравнений из этих 50-ти выражались через известные (элементарные или специальные) функции, а решения оставшихся шести уравнений определяли новые специальные функции, которые теперь называются *трасцендентами Пенлеве.*

Шестое уравнение Пенлеве впервые было опубликовано в работе Р. Фукса [36]. Оно имеет вид

$$y'' = \frac{(y')^2}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) - y'\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) +$$
$$+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[a + b\frac{x}{y^2} + c\frac{x-1}{(y-1)^2} + d\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right], \tag{2}$$

где $a,\ b,\ c,\ d$ – комплексные параметры, x и y – комплексные переменные, $y' = dy/dx$. Уравнения (2) имеет три особые точки $x = 0,\ x = 1$ и $x = \infty$ и обозначается как P6. Э. Пикар [52] нашел его решения в явном виде при определенных значениях четырех параметров: $a = b = c = 0$, $d = 1/2$. Р. Гарнье [39] изучал его решения без ограничений на параметры.

Новая волна интереса к уравнениям Пенлеве возникла в 70-е годы XX века после обнаруженния М. Абловицем, А. Рамани и Х. Сегуром [1, 31] связи интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных с уравнениями Пенлеве (см. также [24], [26]). Так шестое уравнение Пенлеве является точной редукцией уравнения Эрнста, описывающего движение солитонов. В настоящее время для уравнений Пенлеве рассматриваются задачи: об асимптотическом поведении их решений вблизи особых точек; локальные и глобальные свойства решений; рациональные и алгебраические решения; дискретизация; приложения уравнений Пенлеве (в основном в физике).

Здесь изучаются асимптотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве (2) в его особых точках $x = 0,\ 1,\ \infty$. Разложения в неособых точках описаны в [42, § 46] и с помощью степенной геометрии – в [12]. Подобные исследования проводились многими авторами. С. Шимомура [56 – 59], М. Жимбо [45], Х. Кимура [46], К. Окамото [48] доказали разными методами существование и сходимость двупараметрических семейств разложений решений шестого уравнения Пенлеве. В книге В. Громака, И. Лэйне, С. Шимомура [42, § 46] описаны асимптотические разложения его решений по целым степеням независимой переменной. При специальных значениях параметров шестого уравнения Пенлеве Б. Дубровин и М. Маззокко [34, 47] получили разложения решений по целым степеням независимой переменной и первые несколько членов нестепенных асимптотик, а Д. Гуззетти [43] – экзотические асимптотики. Сравнение их результатов с нашими приведены в § 2 гл. 4.

При $x \to 0$ рассмотрим асимптотические разложения решений уравнения (2) вида

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{3}$$

где показатели степени r и s – комплексные числа, $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} r$, $\operatorname{Re} s$ возрастают.

Будем различать четыре типа разложений (3); в первых трех из них конечно число показателей s с одинаковой вещественной частью $\operatorname{Re} s$.

Тип 1. c_r и c_s – постоянные (*степенные разложения*);

Тип 2. c_r – постоянный, c_s – многочлены от $\ln x$ (*степенно-логарифмические разложения*);

Тип 3. c_r и c_s – степенные ряды по убывающим степеням $\ln x$ (*сложные разложения*).

Тип 4. Имеется бесконечно много показателей s с фиксированной $\operatorname{Re} s$ и на комплексной плоскости выпуклая оболочка точек r и s из (3) содержится в угле с вершиной в точке r, у которого один из граничных лучей параллелен мнимой оси и раствор угла меньше π (*экзотические разложения*).

Кроме того, предполагаем, что аргумент комплексной переменной x ограничен с одной стороны.

Аналогично определяются типы асимптотических разложений при $x \to 1$ и $x \to \infty$.

Цель работы – найти все асимптотические разложения (3) решений уравнения (2) вблизи его особых точек $x = 0$, $x = 1$ и $x = \infty$ при всех комплексных значениях его четырех параметров a, b, c, d.

Уравнение (2) имеет три симметрии, переводящие особые точки друг в друга:

$$\begin{array}{lll} 1) & x = 1/z, & y = 1/w; \\ 2) & x = z, & y = z/w; \\ 3) & x = 1 - z, & y = 1 - w. \end{array} \tag{4}$$

Первая симметрия отображает разложения вблизи точки $x = 0$ в разложения вблизи точки $x = \infty$. Вторая симметрия отображает разложения вблизи каждой особой точки в разложения вблизи этой же точки. Третья симметрия преобразует разложения вблизи точки $x = 0$ в разложения вблизи точки $x = 1$.

Поэтому сначала решается задача вблизи $x = 0$, а затем с помощью симметрий получаются асимптотические разложения решений вблизи $x = \infty$ и $x = 1$.

Случай $a \cdot b \neq 0$

Уравнение (2) записывается в виде дифференциальной суммы. Для этого оно умножается на $2x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x)$ и правая часть переносится влево. Получается уравнение

$$\begin{gathered} f(x, y) \stackrel{def}{=} 2y''x^2(x-1)^2y(y-1)(y-x) - (y')^2[\, x^2(x-1)^2(y-1)(y-x) + \\ x^2(x-1)^2y(y-x) + x^2(x-1)^2y(y-1)\,] + \\ 2y'[\, x(x-1)^2y(y-1)(y-x) + x^2(x-1)y(y-1)(y-x) + \\ x^2(x-1)^2y(y-1)\,] - [\, 2ay^2(y-1)^2(y-x)^2 + 2bx(y-1)^2(y-x)^2 + \\ 2c(x-1)y^2(y-x)^2 + 2dx(x-1)y^2(y-1)^2\,] = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Оно имеет 4 исключительных решения:

$$\mathcal{I}_1 : \ y = 0 \ \text{при} \ b = 0,$$

$$\mathcal{I}_2 : \; y = 1 \text{ при } c = 0,$$

$$\mathcal{I}_3 : \; y = x \text{ при } d = 1/2,$$

$$\mathcal{I}_4 : \; y = \infty \text{ при } a = 0.$$

Многоугольник уравнения (5) и обозначения семейств асимптотических разложений, соответствующих вершинам и ребрам многоугольника, показаны на рис. 1.

Асимптотические разложения (3) решений вблизи нуля, соответствующие вершинам многоугольника, имеются только для вершины с координатами $(q_1,\, q_2) = (0,\, 3)$.

Теорема 1 . *При $x \to 0$ существуют пять семейств двупараметрических разложений решений с постоянными коэффициентами (по c_r и r), определенные формулой*

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{6}$$

где комплексные показатели степени таковы: r – произвольный, $s \in \{r + lr + m(1-r);\; l,\, m \geq 0;\; l + m > 0;\; l,\, m \in \mathbb{Z}\}$. А именно: семейство $\mathcal{A}_0$ степенных разложений с $\operatorname{Re} r \in (0,\, 1)$, семейства экзотических разложений $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ с $\operatorname{Re} r = 0,\; r \neq 0$ и $\mathcal{A}_{01}^{\tau}$ с $\operatorname{Re} r = 1,\; r \neq 1, \tau = \pm 1$. Семейства $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ имеют вид

$$y = \frac{r^2}{\beta\, \cos^2\left[\ln(C_{11}\, x)^{\gamma}\right] + \alpha\, \sin^2\left[\ln(C_{11}\, x)^{\gamma}\right]} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s,$$

где r – произвольная чисто мнимая постоянная, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$, $\gamma = \operatorname{Im} r/2$, $\alpha + \beta = r^2 - 2c + 2a$, $\alpha \cdot \beta = 2a\, r^2$, C_{11} – ненулевая произвольная постоянная.

Разложения (6) сходятся для малых $|x|$. Семейство $\mathcal{A}_0$ и его сходимость были известны [44 – 46, 48, 56 – 61]. Семейства $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^{\tau}$ и $\mathcal{A}_{01}^{\tau}$ существуют при всех значениях параметров и исчерпывают все разложения, соответствующие вершине (0, 3).

Изучаются асимптотические разложения решений вблизи нуля, соответствующие левому вертикальному ребру многоугольника (рис. 1).

Теорема 2 . (a) *При $a \neq c \neq 0$ и $x \to 0$ существуют однопараметрические семейства разложений $\mathcal{B}_i$ и $\mathcal{B}_i^{\tau}$, $i = 1,\, 2,\; \tau = \pm 1$, которые в зависимости от значений $\theta_1 = \sqrt{2c} - \sqrt{2a}$ и $\theta_2 = \sqrt{2c} + \sqrt{2a}$ определяются одной из формул (7), (9), (10), приведенных ниже.*
Если $\operatorname{Re} \theta_i = 0$, то семейства $\mathcal{B}_i^{\tau}$ определяются формулой

$$\mathcal{B}_i^{\tau} : \; y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s = \frac{c_{0i}}{1 - C_7\, x^{\tau \theta_i}} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_{si} x^s, \tag{7}$$

где $s \in \{l + m\tau\theta_i;\ l, m \in \mathbb{Z};\ l,\ m \geq 0;\ l + m > 0\}$, *комплексные коэффициенты:*

$$c_{0i} = 1 + (-1)^i \sqrt{c/a}, \tag{8}$$

C_7 *– произвольная постоянная, остальные* c_{si} *– постоянны и однозначно определены.*

Пусть $\mathrm{Re}\,\theta_i \neq 0$ *и* $k_i = \theta_i \cdot \mathrm{sgn}\,(\mathrm{Re}\,\theta_i)$.

Если $\mathrm{Re}\,\theta_i \neq 0$ *и* $\theta_i \notin \mathbb{Z}$, *то семейство* $\mathcal{B}_i$ *определяется формулой*

$$\mathcal{B}_i:\ y = c_{0i} + \sum_s c_{si} x^s, \tag{9}$$

где s *пробегает множество* $\{l + mk_i,\ l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \geq 0,\ l + m > 0\}$, *комплексные коэффициенты таковы:* c_{0i} *определен формулой* (8), $c_{k_i i}$ *– произвольный, остальные* c_{si} *постоянны и однозначно определены.*

Если $\theta_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, *то семейство* $\mathcal{B}_i$ *определяется формулой*

$$\mathcal{B}_i:\ y = c_{0i} + \sum_{s=1}^{\infty} c_{si}(\ln x)\, x^s, \tag{10}$$

где коэффициенты таковы: c_{0i} *определен формулой* (8), c_{si} *с* $s < k_i$ *– постоянны,* $c_{k_i i} = \alpha_{k_i i} + \beta_{k_i i} \ln x$, $\alpha_{k_i i}$ *– произвольная постоянная, коэффициент* $\beta_{k_i i}$ *постоянный и однозначно определенный, остальные* c_{si} *с* $s > k_i$ *– многочлены от* $\ln x$, *которые однозначно определяются.*

В случае $C_7 = 0$ *разложения* (7) *являются целыми, их семейство обозначается* $\mathcal{B}_i$.

Семейство $\mathcal{B}_2$ *существует также при* $a = c \neq 0$.

(b) *При* $a \cdot c \neq 0$ *и* $x \to 0$ *существуют три однопараметрических семейства сложных разложений.*

А именно, семейство $\mathcal{B}_3$, *которое существует при* $a \neq c$ *и определяется формулами*

$$\mathcal{B}_3:\ y = \varphi_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_\sigma x^\sigma, \tag{11}$$

где

$$\varphi_0 = \frac{2}{c-a}\frac{1}{\ln^2 x} + \frac{c_{-3}}{\ln^3 x} + \sum_{s=4}^{\infty} \frac{c_{-s}}{\ln^s x} = \frac{2(c-a)}{(c-a)^2(\ln x + C_3)^2 - 2a}, \tag{12}$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-3} *и* C_3 *– произвольные постоянные, остальные* c_{-s} *– постоянны и однозначно определены;* φ_σ *ряды по убывающим степеням логарифмов;*

семейства $\mathcal{B}_4$ *и* $\mathcal{B}_5$, *которые существуют при* $a = c \neq 0$ *и определяются формулами*

$$\mathcal{B}_{3+j}:\ y = \phi_{0j} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \phi_{\sigma j} x^\sigma,\ j = 1,\ 2, \tag{13}$$

где

$$\phi_{0j} = (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\ln x} + \frac{c_{-2j}}{\ln^2 x} + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{c_{-sj}}{\ln^s x} = \frac{(-1)^j}{\sqrt{2a}\,\ln x + C_3},\ j = 1,\,2, \quad (14)$$

комплексные коэффициенты таковы: c_{-2j} *(т. е.* C_3*)– произвольная постоянная, остальные* c_{-sj} *– постоянны и однозначно определены;* $\phi_{\sigma j}$ *ряды по убывающим степеням логарифмов.*

(c) *При* $c = 0$ *и* $x \to 0$ *существуют однопараметрические семейства разложений* $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\tau = \pm 1$, *которые определяются формулой*

$$y = 1 + c_\rho x^\rho + \sum_s c_s x^s, \quad (15)$$

где $\rho = \sqrt{2a}$ *и удовлетворяет условиям* $\operatorname{Re}\sqrt{2a} > 0$ *(семейство степенных разложений* $\mathcal{B}_6$*) или* $\operatorname{Re}\sqrt{2a} = 0$ *(семейства экзотических разложений* $\mathcal{B}_6^\tau$*),* s *пробегает множество* $\{\rho + l\rho + m;\ l,\, m \geq 0;\ l + m > 0;\ l, m \in \mathbb{Z}\}$, *комплексные коэффициенты:* c_ρ *– ненулевая произвольная постоянная, все* c_s *постоянны и однозначно определены.*

Семейства B_6^τ *имеют также вид*

$$y = \frac{1}{1 - c_\rho x^\rho} + \sum_{\operatorname{Re} s \geq 1} c_s x^s.$$

Ряды (7), (9), (10) и (15) сходятся для достаточно малых $|x|$. Семейства $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, где $\tau = \pm 1$, исчерпывают все разложения, соответствующие левому вертикальному ребру многоугольника (рис. 1). Для семейств $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ были известны только подсемейства с постоянными коэффициентами и целыми показателями степени [42]. Семейства $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{B}_3$ – $\mathcal{B}_6$ – новые. Семейства $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$ являются *базовыми*. С помощью основных симметрий уравнения из них получаются другие семейства разложений. При $x \to 0$ из базовых семейств разложений $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$ $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$ с помощью второй симметрии (4) уравнения получаются семейства $\mathcal{H}_1$ – $\mathcal{H}_6$, $\mathcal{H}_1^\tau$, $\mathcal{H}_2^\tau$, $\mathcal{H}_6^\tau$, соответствующие нижнему наклонному ребру многоугольника (рис. 1). Из асимптотических разложений решений при $x \to 0$, образующих семейства $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\mathcal{A}_{01}^\tau$, $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_6$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{H}_1$ – $\mathcal{H}_6$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, с помощью первой симметрии (4) уравнения получаются семейства асимптотических разложений $\mathcal{A}_\infty$, $\mathcal{A}_{\infty 0}^\tau$, $\mathcal{A}_{\infty 1}^\tau$, $\mathcal{G}_1$ – $\mathcal{G}_6$, $\mathcal{G}_1^\tau$, $\mathcal{G}_2^\tau$, $\mathcal{G}_6^\tau$, $\mathcal{D}_1$ – $\mathcal{D}_6$, , $\mathcal{D}_1^\tau$, $\mathcal{D}_2^\tau$, $\mathcal{D}_6^\tau$ при $x \to \infty$.

Случай $a = 0,\ b \neq 0$

При $a = 0$, $b \neq 0$ многоугольник уравнения показан на рис. 2. При $a = 0$, $b \neq 0$ изучаются асимптотические разложения решений вблизи нуля (отличные от разложений имеющихся в случае $a \cdot b \neq 0$), соответствующие вершине (0, 4).

Теорема 3 . (a) *При $x \to 0$ и $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ существуют однопараметрические семейства разложений решений $\mathcal{B}_7$ и $\mathcal{B}_7^\tau$, $\tau = \pm 1$, которые определяются формулой*

$$y = c_r x^r + \sum_s c_s x^s, \tag{16}$$

где $r = \sqrt{2c}$ и удовлетворяет условиям $\operatorname{Re}\sqrt{2c} < 0$ (семейство степенных разложений $\mathcal{B}_7$) или $\operatorname{Re}\sqrt{2c} = 0$ (семейства экзотических разложений $\mathcal{B}_7^\tau$, $\tau = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} r)$), s пробегает множество $\{r - lr + m;\ l,\ m \geq 0;\ l + m > 0;\ l,\ \ m \in \mathbb{Z}\}$, комплексные коэффициенты: c_r – ненулевая произвольная постоянная, все c_s постоянны и однозначно определены.

Семейства $\mathcal{B}_7$ и $\mathcal{B}_7^\tau$ типов 1 и 4 исчерпывают все разложения, соответствующие вершине (0, 4) (рис. 2). При $a = 0$, $b \neq 0$ отсутствуют асимптотические разложения решений вблизи нуля, соответствующих горизонтальному ребру. Теперь при $a = 0$, $b \neq 0$ изучаются асимптотические разложения решений вблизи нуля, отличные от разложений, имеющихся в случае $a \cdot b \neq 0$, и соответствующие вертикальному ребру.

Теорема 3. (b) *При $x \to 0$ и $a = c = 0$, $b \neq 0$ существует однопараметрическое семейство степенных разложений решений с постоянными комплексными коэффициентами*

$$\mathcal{B}_8: \quad y = c_0 + \sum_{s=1}^{+\infty} c_s x^s, \tag{17}$$

где $c_0 \neq 0$, 1 – произвольная постоянная.

При $a = 0 \neq c$ имеется однопараметрическое семейство сложных разложений $\mathcal{B}_3$. Семейства $\mathcal{B}_3$ и $\mathcal{B}_8$ исчерпывают разложения, соответствующие левому вертикальному ребру рис. 2. Ряды (16) и (17) сходятся для достаточно малых $|x|$. Семейства $\mathcal{B}_8$ и $\mathcal{B}_7$ для целых r известны [42].

Семейства $\mathcal{B}_7$, $\mathcal{B}_7^\tau$ и $\mathcal{B}_8$ также являются *базовыми*. С помощью симметрий уравнения из 19 базовых семейств $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_8$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{B}_7^\tau$ получаются все остальные семейства разложений решений в окрестностях всех трех особых точек. Вблизи каждой особой точки имеем $18 \cdot 2 + 1 = 37$ семейств разложений и всего $3 \cdot 37 = 111$ семейств. В табл. 1 показано существование базовых семейств $\mathcal{B}_1$ – $\mathcal{B}_8$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{B}_7^\tau$ в зависимости от значений параметров уравнения.

С помощью первой симметрии (4) из базовых семейств разложений $\mathcal{B}_7$, $\mathcal{B}_7^\tau$ и $\mathcal{B}_8$ получаются семейства асимптотических разложений решений $\mathcal{G}_7$,

$\mathcal{G}_7^\tau$ и $\mathcal{G}_8$ вблизи бесконечности (отличные от семейств разложений имеющихся в случае $a \cdot b \neq 0$), соответствующие вершине и наклонному ребру. Из случая $a = 0$, $b \neq 0$ с помощью второй симметрии (4) уравнения получаются разложения решений в случае $b = 0$, $a \neq 0$. Случай $a = b = 0$ не дает новых результатов.

С помощью третьей симметрии (4) уравнения из асимптотических разложений решений в окрестности нуля получаются асимптотические разложения решений в окрестности единицы.

Итак, с помощью симметрий (4) из 19 базовых семейств $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_{00}^\tau$, $\mathcal{B}_1$–$\mathcal{B}_8$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{B}_7^\tau$ получаются все остальные семейства разложений решений в окрестностях всех трех особых точек. Вблизи каждой особой точки имеем $18 \cdot 2 + 1 = 37$ семейств разложений и всего $3 \cdot 37 = 111$ семейств. В табл. 1 показано существование базовых семейств $\mathcal{B}_1$–$\mathcal{B}_8$, $\mathcal{B}_1^\tau$, $\mathcal{B}_2^\tau$, $\mathcal{B}_6^\tau$, $\mathcal{B}_7^\tau$ в зависимости от значений параметров уравнения.

Таким образом, получены все асимптотические разложения решений уравнения (5), ибо каждое укороченное уравнение либо решается в явном виде, либо доказывается, что оно не имеет нужных решений; это дает все асимптотики решений. Каждая асимптотика продолжается всеми возможными разложениями.

Некоторые результаты этой работы опубликованы в статьях [11, 15], а доказательства основных результатов — в препринтах [13, 14, 23].

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1987.

2. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.

3. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998.

4. *Брюно А.Д.* Степенные разложения решений одного алгебраического или дифференциального уравнения // ДАН. 2001. **380**. №2. 155–159.

5. *Брюно А.Д.* Степенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. №3. 295–300.

6. *Брюно А.Д.* Степенно-логарифмические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. №4. 439–444.

7. *Брюно А.Д.* Нестепенные асимптотики решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2003. **392**. №5. 586–591.

8. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. **59**. №3. 31–80.

9. *Брюно А.Д.* Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // ДАН. 2006. **406**. №6. 730–733.

10. *Брюно А.Д.* Экзотические разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. №66.

11. *Брюно А.Д.* , *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве // ДАН. 2004. **395**. №6. 733–737.

12. *Брюно А.Д.*, *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в окрестности неособой точки. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2005. №4.

13. *Брюно А.Д.*, *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. №2.

14. *Брюно А.Д.*, *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи особых точек $x = 0$ и $x = \infty$. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. №13.

15. *Брюно А.Д.* , *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в случаях $a = 0$ и $b = 0$ // ДАН. 2006. **410**. №3. 331–334.

16. *Брюно А.Д.*, *Чухарева И.В.* Степенные разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2003. №49.

17. *Брюно А.Д.*, *Шадрина Т.В.,* Осесимметричный пограничный слой на игле // Труды ММО. 2007. **68**. 226–290.

18. *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве в степенные ряды по вещественным степеням x // Дифференциальные уравнения. 2004. **406**. №6. 854.

19. *Горючкина И.В.* О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестностях особых точек // XXVI конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Тезисы докладов. Москва. 2004. 39–40.

20. *Горючкина И.В.* О степенных и логарифмических разложениях решений шестого уравнения Пенлеве в окрестностях особых точек // Труды XXVI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Издательство МГУ. 2004. 63–68.

21. *Горючкина И.В.* Степенные и логарифмические асимптотические разложения шестого уравнения Пенлеве // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XV". Воронеж. ВГУ. 2004. 63–64.

22. *Горючкина И.В.* Разложения решений шестого уравнения Пенлеве вблизи особенностей // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 10-15 июля 2006 г. Тезисы докладов. Владимир: Собор. 2006. 75–77.

23. *Горючкина И.В.,* Экзотические разложения решений шестого уравнения Пенлеве. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2007. №3.

24. *Итс А.Р., Капаев А.А., Новокшенов В.Ю., Фокас А.С.,* Трасцеденты Пенлеве. Метод задачи Римана. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2005.

25. *Ковалевская С.В.* Sur le probléme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta mathematica. 1889. **12**. 177–232. Русский перевод: Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Сборник "Движение твердого тела вокруг неподвижной точки" под редакцией С.А. Чаплыгина и Н.И. Мерцалова, М.– Л.: АН СССР. 1940. 11–49.

26. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004.

27. *Розов Н.Х.* Пенлеве уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1984. **4**. 233–234.

28. *Тихомиров В.М.* Фреше производная // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1985. **5**. 666.

29. *Чухарева И.В.* Характер особенностей решений VI уравнения Пенлеве // Тезисы докладов Международной молодежной конференции "Гагаринские чтения XXX". Москва. 2003. 72–73.

30. *Ablovitz M.J.*, *Ramani A.*, *Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I // J. Math. Phys. 1980. **21**. №4. 715–721.

31. *Ablovitz M.J.*, *Ramani A.*, *Segur H.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II // J. Math. Phys. 1980. **21**. №5. 1006–1015.

32. *Bruno A.D.* Power Geometry as a new calculus // Analysis and Applications (Eds. H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and M.W. Wong). Dordrecht: Kluwer. 2003. 51–71.

33. *Chang Y.F.*, *Greene J.M.*, *Tabor M.*, *Weiss J.* The analytic structure of dynamical systems and self-similar natural boundaries // Physica D. 1983. **8**. 183–207.

34. *Dubrovin B.*, *Mazzocco M.* Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups // Invent. Math. 2000. **141**. 55–147.

35. *Fuchs L.* Über differentialgleichungen deren intégrale feste verzweigungspunkte besitzen // Sitz. Acad. Wiss. Berlin. 1884. 669–720.

36. *Fuchs R.* Sur quelques equations differencielles linearies du second ordres // C. r. Acad. sci. Paris. 1905. **141**. 555–558.

37. *Gambier B.* Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est a points critiques fixes // Acta Math. 1910. **33**. 1–55.

38. *Garnier R.* Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes // Ann. Sci. De l'Ecole Normale Superieure. 1912. **29**. 1–126.

39. *Garnier R.* Etitude de l'intégrale générale de léquations VI de M. Painleve // Ann. Ec. Norm. (3). 1917. **34**. 243–353.

40. *Goruchkina I.V.* About power-logarithmic expansions of solutions to the sixth Painlevé equation // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль. 5-10 июля 2004 г. Тезисы докладов. Владимир. 2004. 259–260.

41. *Goruchkina I.V.* Asymptotical expansions of solutions to the sixth Painleve equation // ACA 2006. 12th. International Conference on Applications of Computer Algebra. Abstracts of Presentations. Sofia. 2006. 50.

42. *Gromak I.V.*, *Laine I.*, *Shimomura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plain. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 2002.

43. *Guzzetti D.* On the critical behavior, the connection problem and elliptic representation of a Painlevé 6 equation // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2001. **4**. 293-377.

44. *Iwasaki K.*, *Kimura H.*, *Shimomura S.*, *Yoshida M.* From Gauss to Painlevé. A modern theory of spesial functions. Aspects of Mathematics E16. Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig. 1991.

45. *Jimbo M.* Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé transcendents // Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1982. **18**. 1137–1161.

46. *Kimura H.* The construction of a general solution of a Hamiltonian system with the singularity and its application to Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1983. **134**. 363–392.

47. *Mazzocco M.* Picard and Chazy solutions to the Painleve VI equation // Math. Ann. 2001. **321**. 157–195.

48. *Okamoto K.* Studies on the Painleve equations I. The six Painlevé equation // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. **146**. 337–381.

49. *Painlevé P.* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées a Stokholm. Paris. 1897.

50. *Painlevé P.* Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme // Bull. Soc. Math. France. 1900. **28**. 201–261.

51. *Painlevé P.* Sur les equations differentielles du second ordre et d'ordre superieur, dont l'interable generale est uniforme // Acta Math. 1902. **25**. 1–86.

52. *Picard E.* Démonstration dún théoréme générale sur les founctions uniformes liées par une relation algébrique // Acta Math. 1887. **11**. 1–12.

53. *Poincare A.* Sur les intégrales irrégulliéres des équations linéaires // C. r. Acad. sci. 1885. **101**. 939–941. Oeuvres. **IV**. 611–613.

54. *Poincare A.* Sur les intégrales irrégulliéres des équations linéaires // C. r. Acad. sci. 1885. **101**. 990–991. Oeuvres. **IV**. 614–615.

55. *Poincare A.* Sur les intégrales irrégulliéres des équations linéaires // Acta Math. 1886. **8**. 295–344. Oeuvres. **I**. 167–222.

56. *Shimomura S.* Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular points // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 163–184.

57. *Shimomura S.* Series expansions of Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular point // Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 185–197.

58. *Shimomura S.* Supplement to "Series expansions of Painlevé transcendents in the neigbourhood of fix singular point"// Funkcial. Ekvac. 1982. **25**. 363–371.

59. *Shimomura S.* A family of solutions of a nonlinear ordinary differential equation and its application to Painlevé equations (III), (V), (VI) // J. Math. Soc. Japan. 1987. **39**. 649–662.

60. *Takano K.* Reduction for Painlevé equations at the fixed singular points of the first kind // Funkcial. Ekvac. 1986. **29**. 99–119.

61. *Watanabe H.* Birational canonical transformations and classical solutions of the sixth Painlevé equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1999. **27**. 379–425.

Таблица 1.

Зависимость базовых семейств $\mathcal{B}$ от параметров.

$0 \neq a \neq c \neq 0$	$a = c \neq 0$	$a \neq 0 = c$	$a = 0 \neq c$	$a = c = 0$
$\mathcal{B}_1, \quad \mathcal{B}_1^\tau$	$\mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_2^\tau$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_4$	$\mathcal{I}_4$
$\mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_2^\tau$	$\mathcal{B}_4$	$\mathcal{B}_6, \quad \mathcal{B}_6^\tau$	$\mathcal{B}_7, \quad \mathcal{B}_7^\tau$	$\mathcal{I}_2$
$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_5$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_3$	$\mathcal{B}_8$

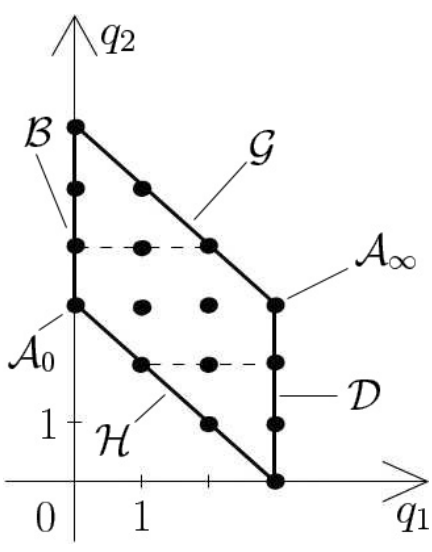

Рис. 1.

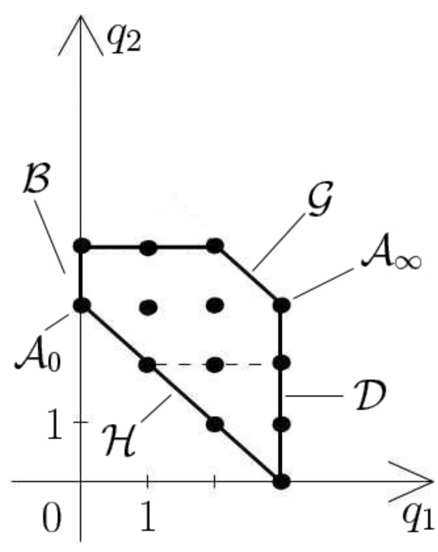

Рис. 2.