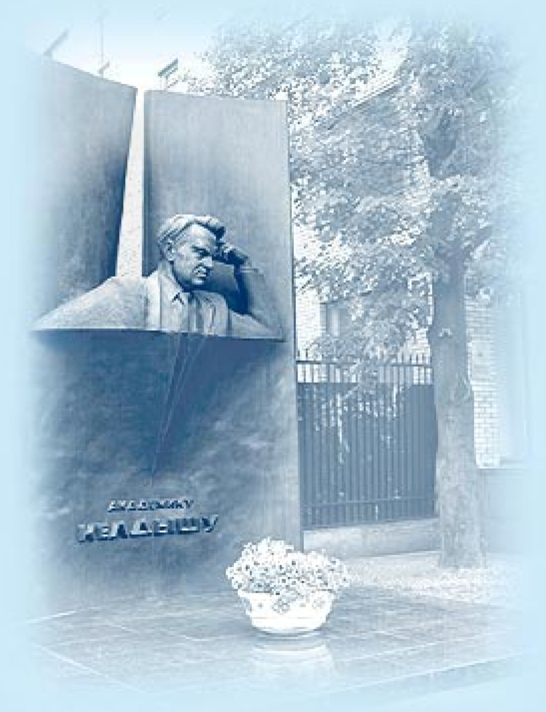
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 45 за 2007 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

П.Ю. Томин

Многомасштабные алгоритмы на основе метода конечных суперэлементов в задачах двухфазной фильтрации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Томин П.Ю. Многомасштабные алгоритмы на основе метода конечных суперэлементов в задачах двухфазной фильтрации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2007. № 45. 25 с.
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2007-45

Российская академия наук
Ордена Ленина
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша

П. Ю. Томин

Многомасштабные алгоритмы на основе метода конечных суперэлементов в задачах двухфазной фильтрации

Москва 2007

П. Ю. Томин, Многомасштабные алгоритмы на основе метода конечных суперэлементов в задачах двухфазной фильтрации.

Аннотация. Рассмотрен многомасштабный метод решения двумерной двухфазной задачи фильтрации, основанный на методе конечных суперэлементов. Решается система уравнений для несжимаемой жидкости, причем для уравнения по давлению используется укрупненная сетка. При этом записывается условие непрерывности потока в слабом смысле, однако аппроксимация при помощи метода опорных операторов позволяет получить сильную сходимость. В каждый момент времени имеется распределение давления на мелкой сетке, которое используется при решении уравнения для насыщенности. Построена аппроксимация гиперболического уравнения с учетом неортогональности сетки, имеющая первый порядок по пространству. Для решения уравнения для насыщенности использовались явная и неявная схемы. Результаты расчетов демонстрируют определенные достоинства описанного метода. В частности, он принадлежит классу так называемых методов высокого разрешения, т. е. правильно передает особенности точного решения[1].

P. Yu. Tomin, Multiscale algorithms based on finite super element method for two-phase flow simulations.

Abstract. Multiscale finite super element method for two-dimensional two-phase flow simulations is considered. System of equations for incompressible fluid is solved, coarse grid is used for pressure equation. Weak sense flux continuity conditions are imposed, but support operator method approximation allows obtaining strong convergence. The fine grid pressure function is calculated to solve saturation equation at each time moment. The approximation of the first order was constructed for the hyperbolic equation on the non-orthogonal. Explicit and implicit schemes are used to solve the saturation equation. Calculations show certain advantages of described method. In particular it belongs to high resolution methods class, i. e. properly resolves exact solution features.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00836).

Содержание

Введение

Моделирование процессов фильтрации является важным инструментом для принятия решений при разработке месторождений углеводородного сырья. В процессе геологического исследования пласта определяются распределения основных параметров среды (пористость, проницаемость и т. д.), задается сетка, как правило, адаптированная к структуре среды. Характерное число ячеек для этих сеток — 10^7. Решение задач фильтрации на подобных сетках при использовании обычных персональных компьютеров становится затруднительным. Стандартным приемом для решения данного вопроса является процедура ремасштабирования, т. е. укрупнения сетки.

Различные подходы к процедуре ремасштабирования описаны, например, в работе [4]. Как правило, находится тензор эффективной абсолютной проницаемости $\widehat{\boldsymbol{k}}^*$ путем решения уравнения для давления. Затем система уравнений фильтрации решается на укрупненной (гидродинамической) сетке с тензорными коэффициентами проницаемости. Недостатком подобных методов является избыточное загрубление решения, особенно в тех случаях, когда ячейка грубой (гидродинамической) сетки содержит сотни ячеек подробной (геологической) сетки. В настоящее время актуальными являются попытки реализовать обратный переход, так называемый процесс демасштабирования.

Один из вариантов решения этой задачи рассмотрен в работе [1], где решение на исходной (геологической) сетке определяется с помощью функций формы, аналогичных тем, которые использованы Р. П. Федоренко в методе суперэлементов [7].

В настоящей работе последовательно использован метод суперэлементов для решения задачи демасштабирования применительно к двумерным задачам двухфазной фильтрации, однако данный подход может быть легко обобщен и на трехмерный случай.

Постановка задачи

Рассматривается двухфазная задача фильтрации в области Ω без учета гравитации, сжимаемости и капиллярных давлений. Пористость считается постоянной. Фазы будем называть водой и нефтью, обозначая их индексами w и o соответственно. Обобщенный закон Дарси имеет вид

$$\boldsymbol{v_j} = -\frac{k_{rj}(S)}{\mu_j}\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p, \qquad j = o, w,$$

здесь $\boldsymbol{v_j}$ — скорость, $\widehat{\boldsymbol{k}}$ — тензор абсолютной проницаемости, k_{rj} — относительная проницаемость, S — насыщенность воды, p — давление, μ_j — вязкость.

Уравнения неразрывности для каждой фазы записываются в виде

$$\frac{\partial(\rho_i S_i)}{\partial t} + div\left(-\rho_i \frac{k_{rj}(S_i)}{\mu_j}\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p\right) = 0, \qquad j = o, w,$$

здесь ρ_i — плотность, предполагаемая постоянной. Сложим оба уравнения, предварительно сократив первое на $(-\rho_w)$, а второе на $(-\rho_o)$, учитывая, что $S_w = S,\ S_o = 1 - S$:

$$div\left(\left(\frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(1-S)}{\mu_o}\right)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p\right) = 0.$$

Введем обозначение $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_w} + \boldsymbol{v_o} = -\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p$, где

$$\lambda(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o}.$$

Тогда второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + div(-f(S)\boldsymbol{v}) = 0,$$

где

$$f(S) = \frac{k_{rw}(S)/\mu_w}{k_{rw}(S)/\mu_w + k_{ro}(S)/\mu_o}.$$

Окончательно, т. к. $div\boldsymbol{v} = 0$, получаем

$$div\big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p\big) = 0, \tag{1}$$

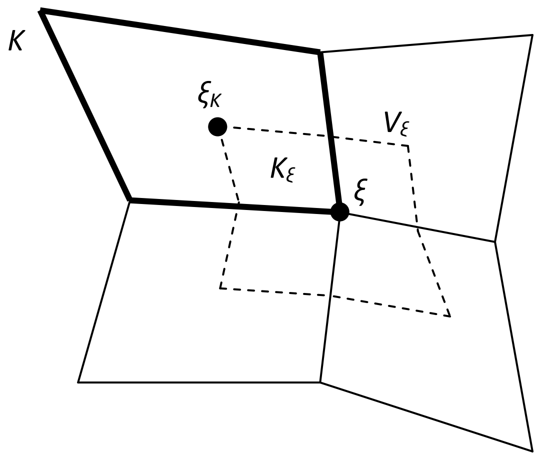
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f(S) = 0. \tag{2}$$

Таким образом, система состоит из двух уравнений: уравнения (1) для давления (эллиптического типа), уравнения (2) для насыщенности (гиперболического типа).

Метод решения

Процедура ремасштабирования

В данной работе используется подход, основанный на методе конечных суперэлементов [7], описанный в работе [1].



Обозначим через K^h множество укрупненных ячеек K. Рассмотрим укрупненную ячейку K, обозначив через ξ_K ее центр (координаты точки центра вычисляются как среднее арифметическое координат вершин ячейки). Далее ячейка K делится на четыре подъячейки путем соединения ξ_K с серединами ребер. Обозначим эти подъячейки через K_ξ, где $\xi \in Z_h(K)$ — некоторая вершина, а $Z_h(K)$ — множество вершин ячейки K. Здесь $Z_h = \bigcup_K Z_h(K)$, $Z_h^0 \subset Z_h$ — внутренние вершины. Присоединенный объем V_ξ образуется путем объединения подъячеек K_ξ, содержащих вершину ξ.

Базисные функции получаются из решения эллиптического уравнения с особым выбором граничных условий, речь о которых пойдет ниже. Рассмотрим для укрупненной ячейки K, содержащей d вершин, локальные базисные функции $\phi_i, i = 1, \dots, d$ такие, что

$$\begin{gathered} div\left(-\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_i\right) = 0, \\ \phi_i|_{\partial K} = g_i. \end{gathered} \qquad (3)$$

Известно [1], что специальный способ выбора граничных условий, т. е. функций g_i, может повысить точность метода. В стандартном методе конечных суперэлементов функции g_i выбираются линейными вдоль ребер ячейки K. Такой вид граничных условий не подходит в том случае, когда разрывы коэффициентов выходят на границы ячеек, т. к. в этом случае полученное решение не будет обладать искомыми особенностями. Решением данной проблемы является, например, подход, при котором граничные условия являются решением локальной одномерной задачи. Граничные условия, используемые в данной работе, будут описаны ниже.

Внутри области потребуем, чтобы $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $x_j \in Z_h^0$. Окончательно базисная функция, относящаяся к вершине x_i, является линейной комбинацией локальных базисных функций, содержащих данную вершину.

Метод решения уравнения для давления

Обозначим через V^h пространство функций давления, являющееся линейной оболочкой базисных функций $\{\phi_i\}_{x_j \in Z_h^0}$. Задача заключается в поиске $p^h \in V^h$, т. е. $p^h = \sum_{x_j \in Z_h^0} p_j \phi_j$, тогда

$$div\big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p^h\big) = \sum_j p_j\, div\big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla \phi_j\big). \tag{4}$$

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса

$$\int_D u \cdot div\vec{w}dV = -\int_D \nabla u \cdot \vec{w}dV + \int_{\partial D} u \cdot w_n ds,$$

умножим уравнение (4) на ϕ_i и проинтегрируем по объему $V_\xi \subset \Omega$, получим

$$\int_{V_\xi} \sum_j p_j\, div\big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\big) \cdot \phi_i dV =$$

$$= -\sum_j p_j \int_{V_\xi} \nabla\phi_i \cdot \big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\big)dV$$

$$+\sum_j p_j \int_{\partial V_\xi} \phi_i \cdot \big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\big)_n ds = 0.$$

Суммируя по всем V_ξ, получим

$$-\sum_j p_j \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\big)dV + \sum_j p_j \int_{\partial\Omega} \phi_i \cdot \big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\big)_n ds = 0.$$

Поскольку $\phi_i(x) \equiv 0$ для $x \in \partial\Omega$, окончательно имеем

$$\sum_j p_j \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \big(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\big)dV = 0. \tag{5}$$

Обозначая $a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla\phi_i \cdot \left(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\right)dV$, получаем линейную алгебраическую систему для нахождения коэффициентов p_j:

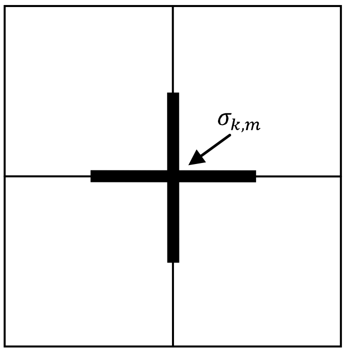
$$\sum_j a_{ij}p_j = 0.$$

Заметим, что система аналогичного вида может быть получена несколько иным способом:

$$\int\limits_{V_\xi} div\left(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p^h\right)dV = \int\limits_{\partial V_\xi} \left(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p^h\right)_n ds = \sum_j p_j \int\limits_{\partial V_\xi} \left(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\right)_n ds = 0.$$

Здесь $\tilde{a}_{ij} = \int_{\partial V_\xi}\left(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\right)_n ds$, однако получаемая в этом случае матрица $\{\tilde{a}_{ij}\}$ в общем случае не является симметричной.

В методе конечных суперэлементов Федоренко [7] для того, чтобы функция всюду была гармонической, требуется непрерывность самой функции (выполняется автоматически) и непрерывность нормальных производных к линиям разрывов коэффициентов, т. е. непрерывность потока. Поскольку последнее условие точно выполнить невозможно, то используется требование в «слабом» смысле.



С каждым внутренним узлом сетки связывается специальная область $\sigma_{k,m}$, имеющая нулевую площадь. Условие равенства потока в $\sigma_{k,m}$ записывается в виде:

$$\int\limits_{\partial\sigma_{k,m}} \left(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p\right)_n ds = 0.$$

Далее:

$$\int\limits_{\partial\sigma_{k,m}} \sum_j p_j \left(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\right)_n ds = \sum_j p_j \int\limits_{\partial\sigma_{k,m}} \left(\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla\phi_j\right)_n ds = 0.$$

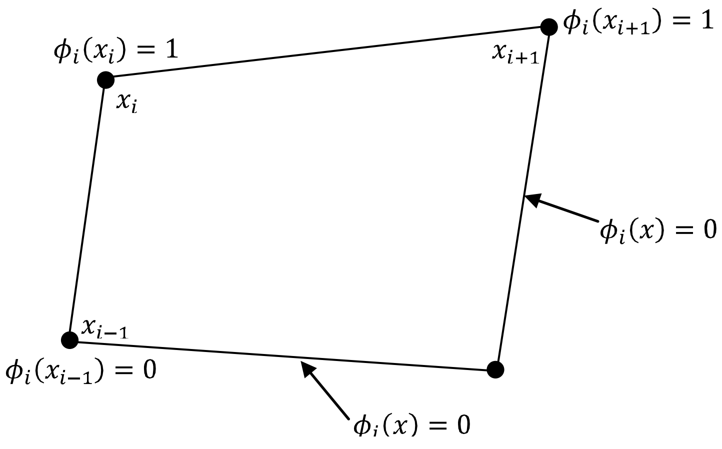
Таким образом, получаемое условие аналогично описанному выше при $V_\xi = \sigma_{k,m}$, что и следовало ожидать. Как показано выше, данное условие может быть сведено к интегралу по присоединенному объему V_ξ.

Итак, выписанные выше условия гарантируют выполнение непрерывности потока лишь в слабом смысле. Однако при определенной аппроксимации интеграла в выражении (5) можно получить аппроксимацию точного решения со вторым порядком в метрике L_2, т. е. получить непрерывность потока. Такая аппроксимация будет описана ниже.

Граничные условия в задаче поиска локальных базисных функций

Основная идея, изложенная в статье [1] заключается в особом выборе граничных условий в задаче поиска локальных базисных функций (3).

Обозначим сеточное решение уравнения (1) на исходной подробной сетке в начальный момент времени через $p_{init}(x)$, которое будем называть точным. Для простоты положим $S = 0$ в начальный момент времени. Граничные условия в задаче (3) определяются следующим образом. Для каждой ячейки K с вершинами x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ обозначим ϕ_i — ограничение базисных функций, такое что $\phi_i(x) = \delta_{ij}$. На ребрах, для которых $\phi_i(x) = 0$ для обеих вершин, граничные условия выбираются равными нулю.



Необходимо определить граничные условия для двух ребер, имеющих общую вершину x_i $(\phi_i(x_i) = 1)$. Обозначим эти ребра через $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$. Определим на этих ребрах функцию g_i:

Если $p^{init}(x_i) \neq p^{init}(x_{i+1})$, тогда

$$g_i(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} = \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_{i+1})}{p^{init}(x_i) - p^{init}(x_{i+1})}, g_i(x)|_{[x_i,x_{i-1}]}$$
$$= \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_{i-1})}{p^{init}(x_i) - p^{init}(x_{i-1})}.$$

Если $p^{init}(x_i) = p^{init}(x_{i+1}) \neq 0$, тогда

$$g_i(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} = \phi_i^0(x) + \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_{i+1})}{2p^{init}(x_i)},$$

где $\phi_i^0(x)$ — линейная функция, такая что $\phi_i^0(x_i) = 1$, $\phi_i^0(x_{i+1}) = 0$.

Аналогично

$$g_{i+1}(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} = \phi_{i+1}^0(x) + \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_{i+1})}{2p^{init}(x_{i+1})},$$

где $\phi_{i+1}^0(x)$ — линейная функция, такая что $\phi_{i+1}^0(x_{i+1}) = 1$, $\phi_{i+1}^0(x_i) = 0$.

Если $p^{init}(x_i) = p^{init}(x_{i+1}) = 0$, используются линейные граничные условия.

Покажем, что при использовании для решения линейного эллиптического уравнения (при $\lambda(S) = 1$) базисных функций, полученных при таких граничных условиях, начальное решение будет точным, т. е. равным решению на исходной сетке. Можно показать [3], что

$$\|p - p^h\| \leq C \inf_{q^h} \|p - q^h\|,$$

где $p^h = \sum_{x_i \in Z_h^0} p_i \phi_i$, p_i — давление в узлах укрупненной сетки, $q^h = \sum q_i \phi_i$. Выбирая значения q_i равными значениям решения на исходной сетке, можно получить, что q^h на ребрах укрупненных ячеек будет равно решению на исходной сетке.

Если $p^{init}(x_i) \neq p^{init}(x_{i+1})$, для ребра $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$p^{init}(x_i) g_i(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} + p^{init}(x_{i+1}) g_{i+1}(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} =$$
$$= p^{init}(x_i) \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_{i+1})}{p^{init}(x_i) - p^{init}(x_{i+1})}$$
$$+ p^{init}(x_{i+1}) \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_i)}{p^{init}(x_{i+1}) - p^{init}(x_i)} == p^{init}(x).$$

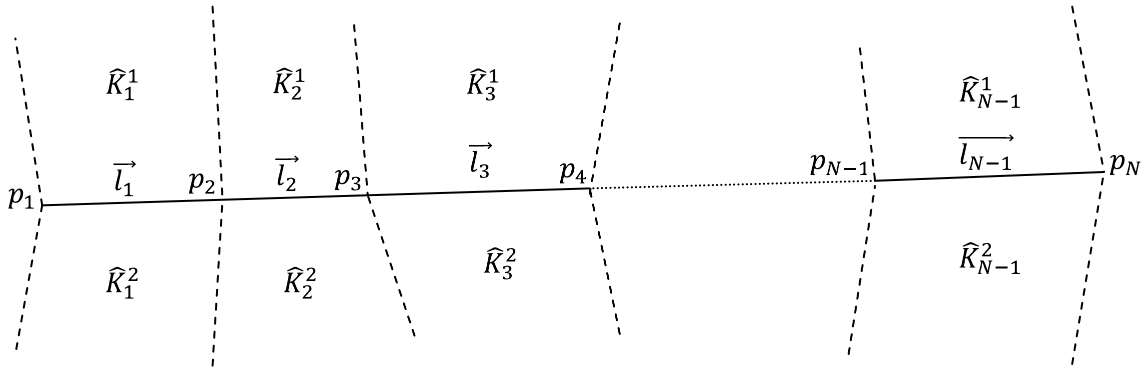
Если $p^{init}(x_i) = p^{init}(x_{i+1}) \neq 0$, на $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$p^{init}(x_i)g_i(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} + p^{init}(x_{i+1})g_{i+1}(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} =$$
$$= p^{init}(x_i)\left[\phi_i^0(x) + \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_{i+1})}{2p^{init}(x_i)}\right]$$
$$+ p^{init}(x_{i+1})\left[\phi_{i+1}^0(x) + \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_{i+1})}{2p^{init}(x_{i+1})}\right] = p^{init}(x).$$

Аналогичные тождества могут быть получены и для остальных ребер. Далее, поскольку функция q^h удовлетворяет уравнению на исходной сетке в каждой укрупненной ячейке K и равна точному сеточному решению на границе ∂K, то она равна точному сеточному решению.

Теперь подробнее рассмотрим тот случай, когда $p^{init}(x_i) = p^{init}(x_{i+1}) \neq 0$. В противном случае для любой ячейки $\sum_{i=1}^{4} \phi_i = 1$ на границе. Тогда в силу того, что $\sum_{i=1}^{4} \phi_i = 1$ удовлетворяет уравнению внутри ячейки K, то $\sum_{i=1}^{4} \phi_i = 1$ внутри K. Можно некоторым образом изменить базисные функции для ячеек, для которых выполняется условие $p^{init}(x_i) = p^{init}(x_{i+1}) \neq 0$, чтобы получить сумму базисных функций равной единице. Например, можно положить $g_{i+1}(x)|_{[x_i,x_{i+1}]} = \phi_{i+1}^0(x) - \frac{p^{init}(x) - p^{init}(x_{i+1})}{2p^{init}(x_{i+1})}$. Однако в этом случае начальное решение не будет равно точному. В нашем случае более важным оказывается восстановление точного решения на начальный момент времени. Заметим, что даже в случае, когда $p^{init}(x_i) = p^{init}(x_{i+1}) \neq 0$, функция, равная единице тоже может быть разложена по базисным функциям. Поскольку $\sum_{i=1}^{4} \phi_i = p^{init}(x) = p^{init}(x_i)$ на ребре $[x_i, x_{i+1}]$, то сумма $\sum_{i=1}^{4} \phi_i = 1$ для узлов укрупненной сетки, незначительно отличаясь от единицы вдоль ребра.

Отметим, что хотя описанный выше метод построения граничных условий и позволяет получить точное решение в начальный момент времени, обладает некоторыми недостатками. В ряде случаев, например, когда граничные условия зависят от времени, имеет смысл использовать решение локальной одномерной задачи, которое может быть построено следующим образом.



Пусть $\overrightarrow{l_n}$ — единичные векторы, направленные вдоль ребер. Тогда проницаемость вдоль ребра n равна

$$\widetilde{K}_n = \frac{\left(\widehat{K}_n^1\overrightarrow{l_n}, \overrightarrow{l_n}\right) + \left(\widehat{K}_n^2\overrightarrow{l_n}, \overrightarrow{l_n}\right)}{2}, n = 1, \ldots, N.$$

Условие непрерывности потока имеет вид:

$$\widetilde{K}_n \frac{p_{n+1} - p_n}{L_n} = \widetilde{K}_{n+1} \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{L_{n+1}}, \qquad n = 1, \ldots, N-2,$$

где L_n — длина ребра.

Задавая $p_1 = 1$, $p_N = 0$, получаем систему линейных уравнений с тремя диагоналями, откуда находим значения $p_n, n = 1, \ldots, N$. В результате получим кусочно-линейную вдоль границы ячейки функцию.

Аппроксимация эллиптического уравнения

Для решения задачи (1) поиска $p^{init}(x)$, задач (3) поиска базисных функций и аппроксимации интеграла в выражении (5) воспользуемся методом опорных операторов [5]. Изложим кратко суть данного метода.

Пусть в области D задана сетка, состоящая из четырехугольников, при этом на каждом ребре определено положительное направление. Неизвестные функции u отнесем к узлам сетки, а компоненты тензора проницаемости $\widehat{\boldsymbol{k}}$ определим в ячейках. Координатные линии сетки совпадают с линиями разрывов компонентов тензора $\widehat{\boldsymbol{k}}$, компоненты тензора k_{ij} — постоянные величины в ячейках.

Напомним соотношение, вытекающее из теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_D u \cdot div\vec{w}dV = -\int\limits_D \nabla u \cdot \vec{w}dV + \int\limits_{\partial D} u \cdot w_n ds,$$

здесь ∂D — граница области D. Вектор $\vec{w}$ и функция u произвольные. В силу этого можно задать условие $u|_{\partial D} = 0$.

Пусть $\vec{w} = -\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p$, тогда для произвольной ячейки Ω интеграл $\int_\Omega \nabla u \cdot \vec{w} dV = -\int_\Omega k_{ij}\nabla_i p \nabla_j u\, dV$, согласно общим принципам метода опорных операторов может быть представлен в виде

$$\int_\Omega k_{ij}\nabla_i p \nabla_j u\, dV = g^{ab}\Delta_a p \Delta_b u,$$

$$\Delta_a p = p(B) - p(A),$$

где g^{ab} — матрица билинейной формы. Положительное направление определяется от точки A к точке B.

Алгоритм построения g^{ab} будет описан ниже. Для каждой ячейки Ω потребуем совпадения интеграла $\int_\Omega k_{ij}\nabla_i p \nabla_j u\, dV$ с его значениями для элементов линейной оболочки $L(\Omega) = \{1, x, y\}$. В результате получим следующую аппроксимацию оператора дивергенции:

$$(div\vec{w})_\xi = \frac{\sigma_a g^{ab}\Delta_b p}{V_\xi},$$

в которой суммирование производится по всем ребрам, выходящим из вершины ξ. Величины $\sigma_a = \pm 1$ в зависимости от выбора положительного направления вдоль ребра a, V_ξ обозначает присоединенный к вершине ξ объем.

Пусть l_a — вектор, по модулю равный длине ребра a и направленный вдоль положительного направления на этом ребре. Для определения матрицы билинейной формы g^{ab} справедлива следующая теорема [5]:

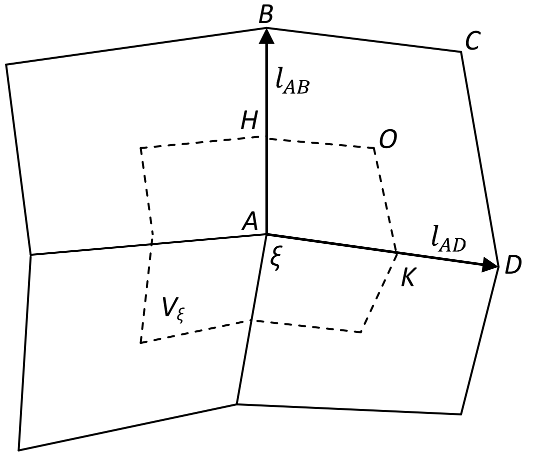
Теорема 1. Существуют g^{ab} такие, что $\int_\Omega \widehat{\boldsymbol{k}}(\nabla p)^2\, dV = g^{ab}\Delta_a p \Delta_b p$ для $p \in L(\Omega)$. Они могут быть представлены в виде

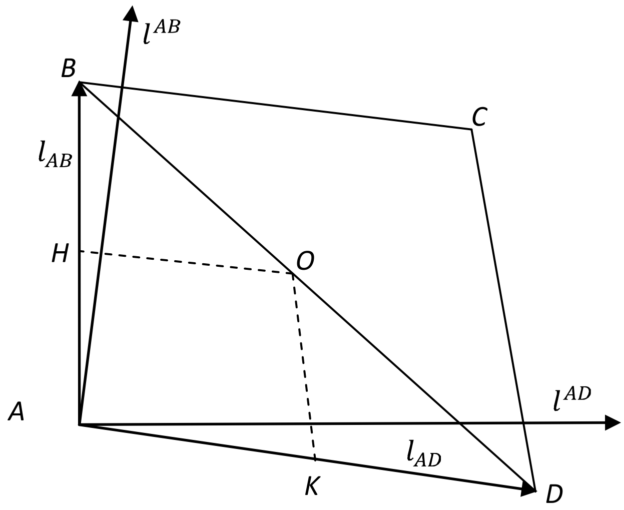
$$g^{ab} = \sum_\varphi S_\varphi k_{ij} l_i^a l_j^b,$$

где суммирование производится по всем узлам ячейки Ω, l^a, l^b — векторы, сопряженные векторам l_a и l_b с общей вершиной φ. S_φ — некоторые площади, присоединенные к вершине φ, сумма которых равна площади S

ячейки Ω. Сопряженными называются векторы, такие что $(l^a, l_b) = \delta_{ab}$, δ_{ab} — символ Кронекера.

При определенном выборе S_φ и V_ξ решение задачи приближает точное в метрике L_2 со вторым порядком.





Пусть $S_A = |ABC|$, $S_B = S_D = 0$, $S_C = |BCD|$. Границей области V_ξ, которая выходит из ребра AB и находится в пределах данной ячейки, будет отрезок длины модуля вектора $|ABD|l^{AB}$ и по направлению перпендикулярный ему (l^{AB} — вектор, сопряженный l_{AB}). Т. е. в случае, когда данный отрезок отложен от H (середина ребра AB), он уткнется в точку O (середина диагонали BD). Аналогично для ребра AD. Пусть теперь $S_B = |ABC|$, $S_A = S_C = 0$, $S_D = |CDA|$. В этом случае обе части границы будут соединяться на середине диагонали AC. Возьмем два данных выражения для S_φ с весами, например, $\frac{1}{2}$. При этом границы областей V_ξ, отложенные от середин соответствующих ребер, пересекутся в центре ячейки $ABCD$. При таком выборе S_φ и V_ξ имеет место сильная сходимость.

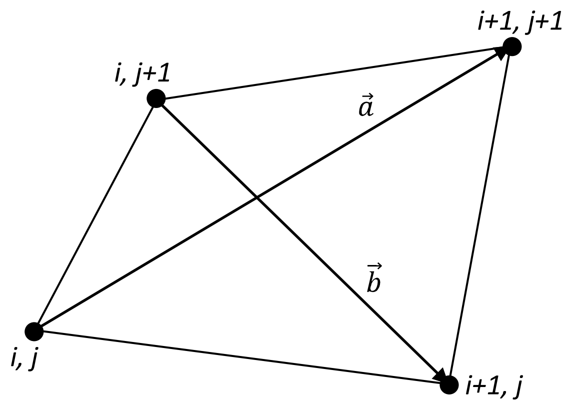
Аппроксимация гиперболического уравнения

Для вычисления градиента давления в некоторой ячейке Ω подробной (геологической) сетки воспользуемся следующими соотношениями:

$$(\nabla p)_x = \frac{1}{V_\Omega}\sum_\alpha p_\alpha \frac{\partial V_\Omega}{\partial x_\alpha},$$
$$(\nabla p)_y = \frac{1}{V_\Omega}\sum_\alpha p_\alpha \frac{\partial V_\Omega}{\partial y_\alpha},$$

где суммирование ведется по всем узлам ячейки, p_α — значения давления в этих узлах, V_Ω — объем ячейки.

Заметим, что соотношения выше справедливы только в том случае, когда в ячейке нет особенностей.



Объем ячейки может быть вычислен как $V_\Omega = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы диагоналей

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_{i+1,j+1} - x_{i,j} \\ y_{i+1,j+1} - y_{i,j} \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x_{i+1,j} - x_{i,j+1} \\ y_{i+1,j} - y_{i,j+1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

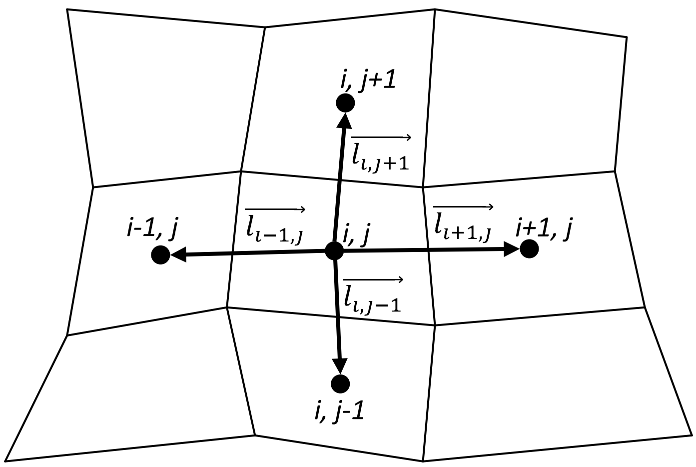
$$V_\Omega = \frac{1}{2}\left|\underbrace{\left(x_{i+1,j+1} - x_{i,j}\right)\left(y_{i+1,j} - y_{i,j+1}\right) - \left(y_{i+1,j+1} - y_{i,j}\right)\left(x_{i+1,j} - x_{i,j+1}\right)}_{\Xi_\Omega}\right|$$
$$== \frac{1}{2} sign(\Xi_\Omega)\cdot\Xi_\Omega.$$

Окончательно для градиента давления имеем

$$(\nabla p)_x = \frac{1}{\Xi_\Omega} \cdot \left[\left(p_{i,j+1} - p_{i+1,j}\right)\left(y_{i+1,j+1} - y_{i,j}\right) \right.$$
$$\left. + \left(p_{i+1,j+1} - p_{i,j}\right)\left(y_{i+1,j} - y_{i,j+1}\right) \right],$$
$$(\nabla p)_y = \frac{1}{\Xi_\Omega} \cdot \left[\left(p_{i,j} - p_{i+1,j+1}\right)\left(x_{i+1,j} - x_{i,j+1}\right) \right.$$
$$\left. + \left(p_{i+1,j} - p_{i,j+1}\right)\left(x_{i+1,j+1} - x_{i,j}\right) \right].$$

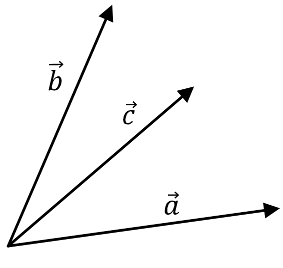
Далее из уравнения $\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f(S) = 0$, где $\boldsymbol{v} = -\lambda(S)\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p$, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p \cdot \lambda(S)\nabla f(S) = 0.$$



При известном векторе $\overrightarrow{W} = -\widehat{\boldsymbol{k}}\nabla p$ (учитывая, что $f'(S) \geq 0$ при $0 \leq S \leq 1$) воспользуемся следующим способом аппроксимации $\nabla f(S)$. Пусть $\overrightarrow{l_{\iota\pm1,\jmath}}$, $\overrightarrow{l_{\iota,\jmath\pm1}}$ — единичные векторы, направленные вдоль отрезков, соединяющих центры соответствующих ячеек, тогда

$\overrightarrow{l_\xi} = \overrightarrow{l_{\iota,\jmath-1}}$, $\overrightarrow{l_\eta} = \overrightarrow{l_{\iota+1,\jmath}}$, если $\left(-\overrightarrow{W}\right)$ лежит между $\overrightarrow{l_{\iota,\jmath-1}}$ и $\overrightarrow{l_{\iota+1,\jmath}}$;
$\overrightarrow{l_\xi} = \overrightarrow{l_{\iota+1,\jmath}}$, $\overrightarrow{l_\eta} = \overrightarrow{l_{\iota,\jmath+1}}$, если $\left(-\overrightarrow{W}\right)$ лежит между $\overrightarrow{l_{\iota+1,\jmath}}$ и $\overrightarrow{l_{\iota,\jmath+1}}$;
$\overrightarrow{l_\xi} = \overrightarrow{l_{\iota,\jmath+1}}$, $\overrightarrow{l_\eta} = \overrightarrow{l_{\iota-1,\jmath}}$, если $\left(-\overrightarrow{W}\right)$ лежит между $\overrightarrow{l_{\iota,\jmath+1}}$ и $\overrightarrow{l_{\iota-1,\jmath}}$;
$\overrightarrow{l_\xi} = \overrightarrow{l_{\iota-1,\jmath}}$, $\overrightarrow{l_\eta} = \overrightarrow{l_{\iota,\jmath-1}}$, если $\left(-\overrightarrow{W}\right)$ лежит между $\overrightarrow{l_{\iota-1,\jmath}}$ и $\overrightarrow{l_{\iota,\jmath-1}}$.



Вектор $\vec{c}$ лежит между правой парой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если

$$\begin{cases} (\vec{c} \times \vec{a})_z \leq 0, \\ \left(\vec{c} \times \vec{b}\right)_z > 0 \end{cases}.$$

Далее

$$\left(\nabla f(S)\right)_\xi = \frac{f\left(S_\xi\right) - f\left(S_o\right)}{h_\xi}, \left(\nabla f(S)\right)_\eta = \frac{f\left(S_\eta\right) - f\left(S_o\right)}{h_\eta}.$$

С другой стороны

$$\left(\nabla f(S)\right)_\xi = \left(\nabla f(S) \cdot \overrightarrow{l_\xi}\right), \left(\nabla f(S)\right)_\eta = \left(\nabla f(S) \cdot \overrightarrow{l_\eta}\right).$$

Отсюда находим

$$\left(\nabla f(S)\right)_{x,y} = \frac{\begin{pmatrix} \dfrac{f\left(S_\xi\right) - f\left(S_o\right)}{h_\xi} & \dfrac{f\left(S_\eta\right) - f\left(S_o\right)}{h_\eta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(\overrightarrow{l_\eta}\right)_{y,x} \\ -\left(\overrightarrow{l_\xi}\right)_{y,x} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \left(\overrightarrow{l_\xi}\right)_{x,y} & \left(\overrightarrow{l_\eta}\right)_{x,y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \left(\overrightarrow{l_\eta}\right)_{y,x} \\ -\left(\overrightarrow{l_\xi}\right)_{y,x} \end{pmatrix}}.$$

Явная схема

Явная схема для гиперболического уравнения имеет вид

$$\frac{\hat{S} - S}{\tau} + \vec{W} \cdot \lambda(S) \nabla f(S) = 0.$$

В терминах предыдущего пункта она может быть записана следующим образом:

$$\frac{\hat{S}_{i,j} - S_{i,j}}{\tau} + \lambda\left(S_{i,j}\right)\left[\overrightarrow{W_x}\left(\nabla f(S)\right)_x + \overrightarrow{W_y}\left(\nabla f(S)\right)_y\right] = 0.$$

Отсюда получаем

$$\hat{S}_{i,j} = S_{i,j} - \tau \cdot \lambda\left(S_{i,j}\right)\left[\overrightarrow{W_x}\left(\nabla f(S)\right)_x + \overrightarrow{W_y}\left(\nabla f(S)\right)_y\right].$$

Схема имеет первый порядок аппроксимации по времени и по пространству. Получим достаточное условие устойчивости.

$$\tau \cdot \lambda\left(S_{i,j}\right) \frac{df(S)}{dS}\left[\overrightarrow{W_x}(\nabla S)_x + \overrightarrow{W_y}(\nabla S)_y\right] =$$

$$= \tau \cdot \lambda\left(S_{i,j}\right)\frac{df(S)}{dS}\left[\vec{W}_x \frac{\frac{S_\xi - S_o}{h_\xi}\left(\vec{l_\eta}\right)_y - \frac{S_\eta - S_o}{h_\eta}\left(\vec{l_\xi}\right)_y}{\left(\vec{l_\xi}\right)_x\left(\vec{l_\eta}\right)_y - \left(\vec{l_\eta}\right)_x\left(\vec{l_\xi}\right)_y}\right.$$

$$\left. + \vec{W}_y \frac{\frac{S_\xi - S_o}{h_\xi}\left(\vec{l_\eta}\right)_x - \frac{S_\eta - S_o}{h_\eta}\left(\vec{l_\xi}\right)_x}{\left(\vec{l_\xi}\right)_y\left(\vec{l_\eta}\right)_x - \left(\vec{l_\eta}\right)_y\left(\vec{l_\xi}\right)_x}\right] =$$

$$= \frac{\tau \cdot \lambda\left(S_{i,j}\right)\frac{df(S)}{dS}}{\left(\vec{l_\xi}\right)_x\left(\vec{l_\eta}\right)_y - \left(\vec{l_\xi}\right)_y\left(\vec{l_\eta}\right)_x}\left[S_\xi \frac{\vec{W}_x\left(\vec{l_\eta}\right)_y - \vec{W}_y\left(\vec{l_\eta}\right)_x}{h_\xi} + S_\eta \frac{-\vec{W}_x\left(\vec{l_\xi}\right)_y + \vec{W}_y\left(\vec{l_\xi}\right)_x}{h_\eta}\right.$$

$$+$$

$$\left. +S_o\left(\frac{-\vec{W}_x\left(\vec{l_\eta}\right)_y + \vec{W}_y\left(\vec{l_\eta}\right)_x}{h_\xi} + \frac{\vec{W}_x\left(\vec{l_\xi}\right)_y - \vec{W}_y\left(\vec{l_\xi}\right)_x}{h_\eta}\right)\right]$$

Отсюда

$$-\frac{\lambda\left(S_{i,j}\right)\frac{df(S)}{dS}}{\left(\vec{l_\xi}\right)_x\left(\vec{l_\eta}\right)_y - \left(\vec{l_\xi}\right)_y\left(\vec{l_\eta}\right)_x}\frac{\vec{W}_x\left(\vec{l_\eta}\right)_y - \vec{W}_y\left(\vec{l_\eta}\right)_x}{h_\xi} = A_\xi,$$

$$-\frac{\lambda\left(S_{i,j}\right)\frac{df(S)}{dS}}{\left(\vec{l_\xi}\right)_x\left(\vec{l_\eta}\right)_y - \left(\vec{l_\xi}\right)_y\left(\vec{l_\eta}\right)_x}\frac{-\vec{W}_x\left(\vec{l_\xi}\right)_y + \vec{W}_y\left(\vec{l_\xi}\right)_x}{h_\eta} = A_\eta.$$

Тогда

$$\tau \cdot A_\xi \geq 0,$$
$$\tau \cdot A_\eta \geq 0,$$
$$1 - \tau \cdot \left(A_\xi + A_\eta\right) \geq 0.$$

Окончательно

$$\tau \leq \frac{1}{max\left(A_\xi + A_\eta\right)}.$$

Заметим, что

$$\frac{df(S)}{dS} = max\left(\left.\frac{df(S)}{dS}\right|_{S=S_o,\, S_\xi,\, S_\eta}\right).$$

Для граничных ячеек значения величин S_ξ, S_η и h_ξ, h_η вычислялись при помощи линейной экстраполяции по значениям в соответствующих соседних ячейках.

Неявная схема

Ограничимся рассмотрением случая ортогональной сетки, т. е.

$$\overrightarrow{l_\xi} = (\pm 1 \quad 0)^T, \overrightarrow{l_\eta} = (0 \quad \pm 1)^T.$$

Тогда:

$$\left(\nabla f(\hat{S})\right)_x = \frac{f(\hat{S}_\xi) - f(\hat{S}_o)}{\pm h_\xi}, \left(\nabla f(\hat{S})\right)_y = \frac{f(\hat{S}_\eta) - f(\hat{S}_o)}{\pm h_\eta},$$

$$\frac{\hat{S}_{i,j} - S_{i,j}}{\tau} + \lambda(\hat{S}_{i,j})\left[\overrightarrow{W_x}\frac{f(\hat{S}_\xi) - f(\hat{S}_o)}{\pm h_\xi} + \overrightarrow{W_y}\frac{f(\hat{S}_\eta) - f(\hat{S}_o)}{\pm h_\eta}\right] = 0.$$

Для решения системы нелинейных уравнений воспользуемся методом Ньютона

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$
$$\dots$$
$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Система линейных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}^k (x_1^{k+1} - x_1^k) + \dots + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}^k (x_n^{k+1} - x_n^k) = -\psi_1{}^k,$$
$$\dots$$
$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x_1}^k (x_1^{k+1} - x_1^k) + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}^k (x_n^{k+1} - x_n^k) = -\psi_n{}^k.$$

Имеем

$$\psi_{i,j} = \frac{\hat{S}_{i,j} - S_{i,j}}{\tau} + \lambda(\hat{S}_{i,j})\left[\overrightarrow{W_x}\frac{f(\hat{S}_\xi) - f(\hat{S}_o)}{\pm h_\xi} + \overrightarrow{W_y}\frac{f(\hat{S}_\eta) - f(\hat{S}_o)}{\pm h_\eta}\right],$$

Далее,

$$\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial \hat{S}_{m,n}} = \frac{1}{\tau}\delta_{m,n}^{i,j} + \delta_{m,n}^{i,j}\left.\frac{d\lambda(S)}{dS}\right|_{S=\hat{S}_{i,j}} \cdot \left[\overrightarrow{W_x}\frac{f(\hat{S}_\xi) - f(\hat{S}_o)}{\pm h_\xi} + \overrightarrow{W_y}\frac{f(\hat{S}_\eta) - f(\hat{S}_o)}{\pm h_\eta}\right]$$
$$+ \lambda(\hat{S}_{i,j})\left\{\delta_{m,n}^{\xi}\frac{\overrightarrow{W_x}}{\pm h_\xi}\left.\frac{df(S)}{dS}\right|_{S=\hat{S}_\xi} + \delta_{m,n}^{\eta}\frac{\overrightarrow{W_y}}{\pm h_\eta}\left.\frac{df(S)}{dS}\right|_{S=\hat{S}_\eta}\right.$$
$$\left. - \delta_{m,n}^{O}\left[\frac{\overrightarrow{W_x}}{\pm h_\xi} + \frac{\overrightarrow{W_y}}{\pm h_\eta}\right]\left.\frac{df(S)}{dS}\right|_{S=\hat{S}_o}\right\},$$

здесь $\delta_{m,n}^{i,j}$ — символ Кронекера.

Неявная схема является безусловно устойчивой.

Результаты расчетов

Для сравнения степени размытия фронта при расчетах по явной и неявной схемам решалась следующая задача в области $\{(x, y): 0 \leq x \leq$ *1, 0≤y≤1*.

Граничные и начальные условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{y=1} = 0,$$

$$p|_{x=0} = 0, p|_{x=1} = 1,$$

$$S|_{x=1} = 1,$$

$$S|_{t=0} = \begin{cases} 1, x = 1, \\ 0, x \neq 1. \end{cases}$$

Расчеты проводились на равномерной сетке с числом ячеек $N_x = 50, N_y = 50$, коэффициенты укрупнения сетки $c_x = c_y = 5$. Проницаемость $K_x = K_y = 1, K_{xy} = 0$. Вязкости $\mu_o = 2, \mu_w = 1$. Функции относительных фазовых проницаемостей имеют вид

$$k_{ro}(S) = (1 - S)^2, k_{rw}(S) = S^2.$$

Ниже представлены профили фронта вытеснения в момент времени $t \approx 0{,}867$.

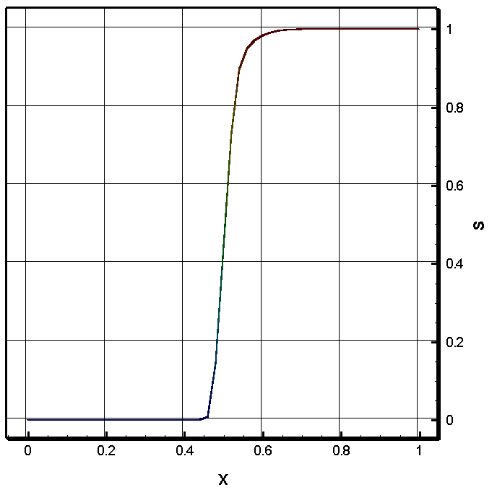


Рис. 1. Фронт вытеснения. Явная схема.

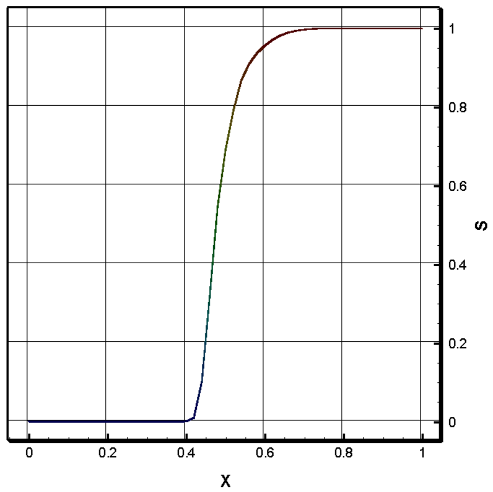


Рис. 2. Фронт вытеснения. Неявная схема.

Для аналогичной задачи было задано поле проницаемости со случайными значениями, распределенными равномерно на отрезке $[0,1]$.

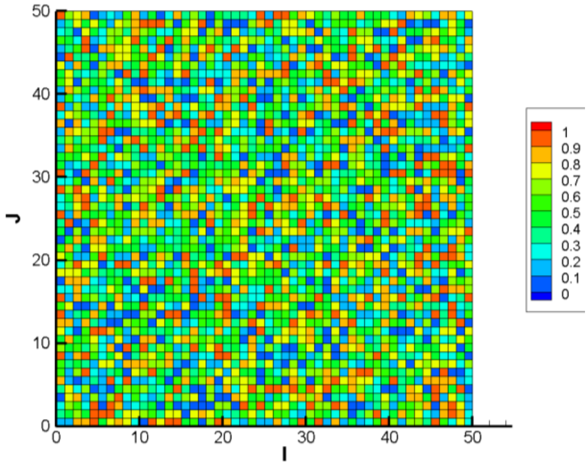
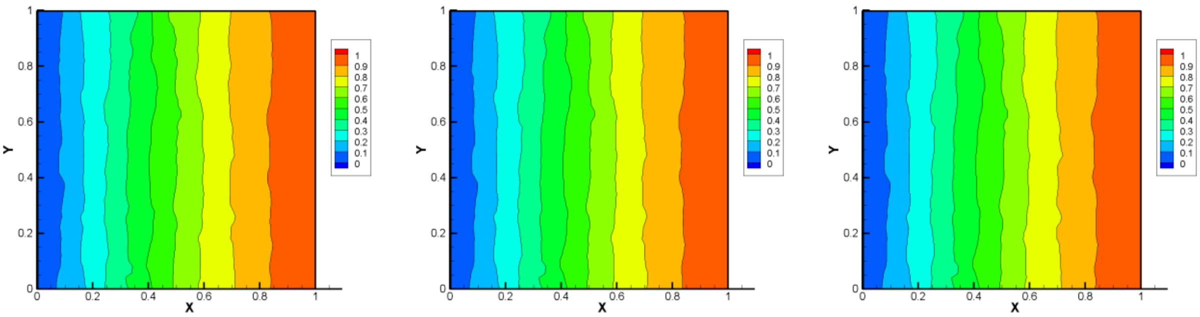


Рис. 3. Распределение коэффициента проницаемости.

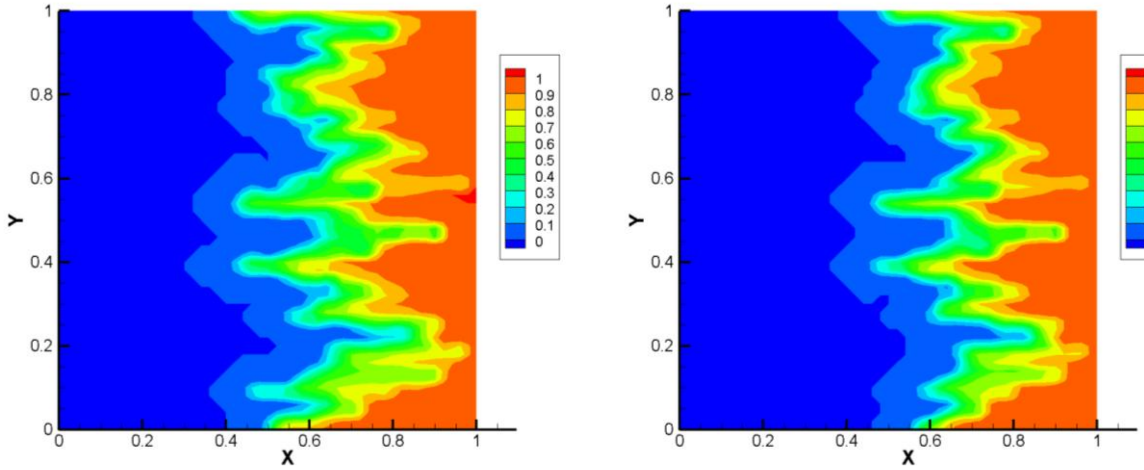
Расчет проводился по явной схеме для уравнения для насыщенности. Ниже представлены поля давления на момент времени $t = 2.0$ для расчетов на исходной сетке (а), с коэффициентами укрупнения сетки $c_x = c_y = 5$ (б) и с коэффициентами укрупнения сетки $c_x = c_y = 10$ (в).



а б в

Рис. 4. Поля давления, $t = 2.0$

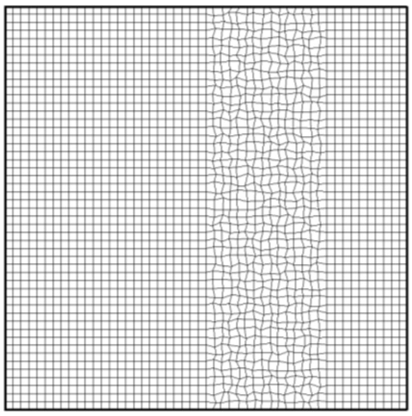
Распределения насыщенности на момент времени $t = 2.0$ для расчета на исходной сетке (а) и с коэффициентами укрупнения сетки $c_x = c_y = 10$ (б).



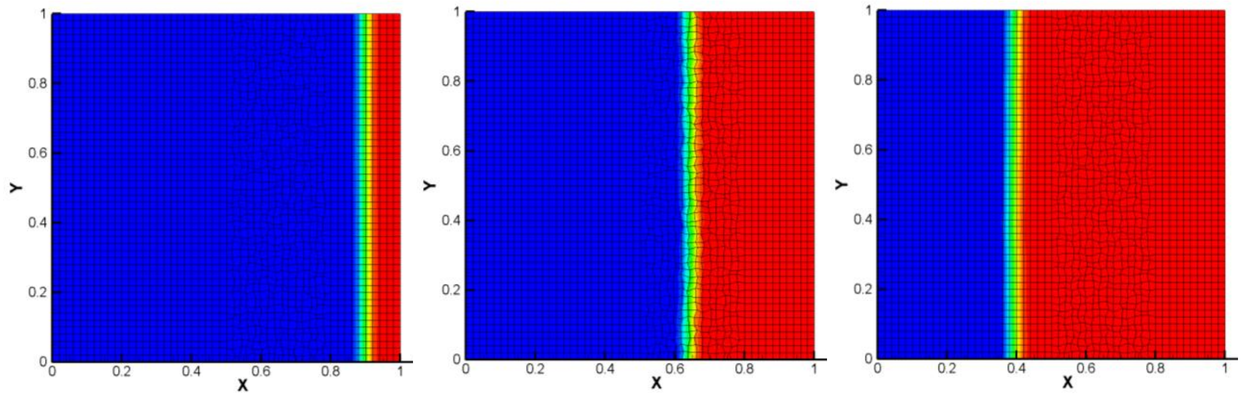
а б

Рис. 5. Распределения насыщенности, $t = 2.0$

В следующей задаче были заданы вязкости $\mu_o = \mu_w = 1$, проницаемость $K_x = K_y == 1, K_{xy} = 0$, коэффициенты укрупнения сетки $c_x = c_y = 10$. Расчет проводился по явной схеме. Заданная сетка имеет следующий вид:



Ниже представлены распределения насыщенности на различные моменты времени.



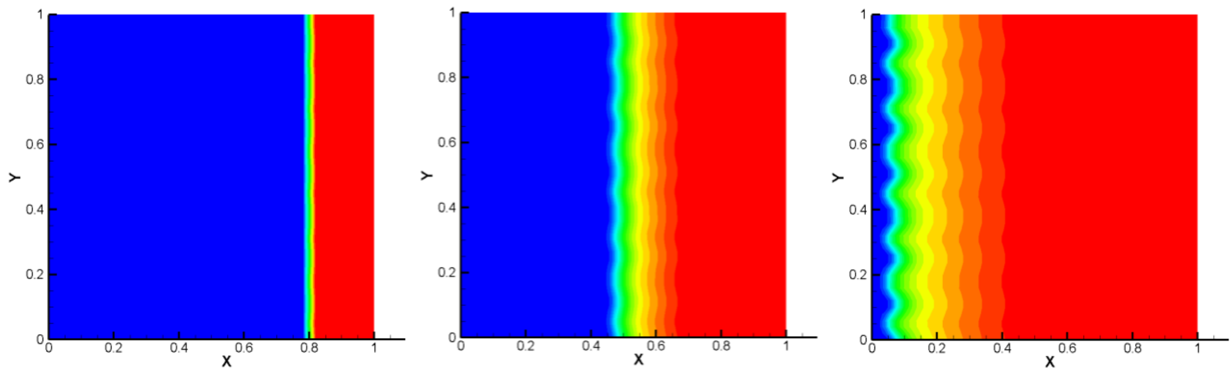
$t = 0.04$ $t = 0.17$ $t = 0.3$

Рис. 6. Распределения насыщенности

Для исследования развития неустойчивостей («fingers») был проведен расчет при $\mu_o = 2, \mu_w = 1$. Начальные условия для насыщенности следующие:

$$S|_{t=0} = \begin{cases} 1, x \geq x_0 + \alpha\, sin(\beta y), \\ 0, x < x_0 + \alpha\, sin(\beta y). \end{cases}$$

где α и β — некоторые параметры.

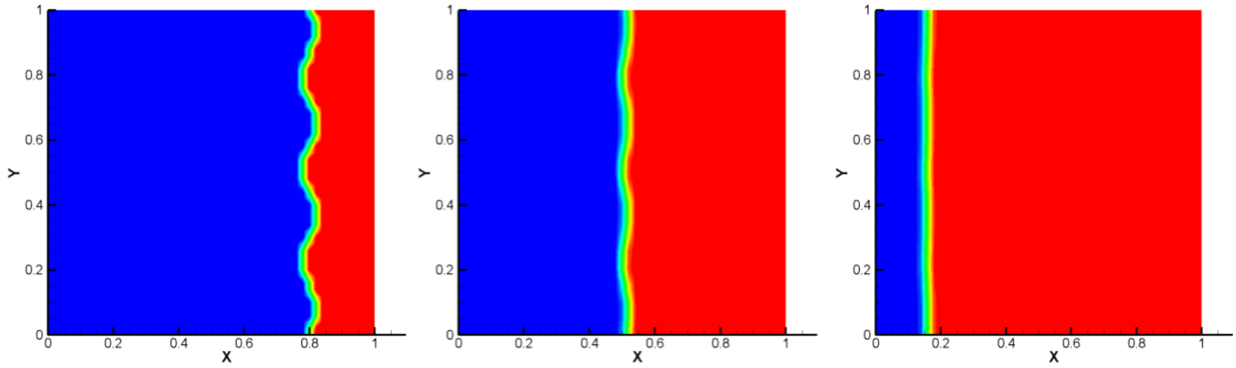


$t = 0$ $t = 0,15$ $t = 0,32$

Рис. 7. Распределения насыщенности при $\mu_o = 2, \mu_w = 1$

Результаты расчетов демонстрируют ожидаемое развитие неустойчивости.

При $\mu_o = 1, \mu_w = 2$ заданное начальное возмущение сглаживается.



$t = 0$ $t = 0{,}15$ $t = 0{,}38$

Рис. 8. Распределения насыщенности при $\mu_o = 1, \mu_w = 2$

Заключение

В работе рассмотрен многосеточный метод решения двумерной двухфазной задачи фильтрации, основанный на методе конечных суперэлементов. Уравнение для давления (1) решается на укрупненной сетке с использованием разложения по некоторому базису. При этом записывается условие непрерывности потока в слабом смысле, однако при аппроксимации с помощью метода опорных операторов интегрального выражения (5) может быть получено точное решение со вторым порядком в метрике L_2. Окончательно на каждый момент времени вычисляется распределение давления на мелкой сетке, которое используется при решении уравнения для насыщенности (2). Построена аппроксимация гиперболического уравнения с первым порядком по пространству с учетом неортогональности сетки. Для сравнения степени размытия фронта проведены расчеты по явной и неявной схемам для уравнения для насыщенности. Заметим, что рассмотренный метод решения может быть без труда обобщен на трехмерный случай.

Результаты расчетов демонстрируют определенные достоинства описанного метода. В частности, он принадлежит классу так называемых методов высокого разрешения, т. е. правильно передает особенности точного решения.

Автор благодарит А. Х. Пергамент за предложенную тему для исследования и за полезные обсуждения данной работы.

Литература

1. Y. Efendiev, V. Ginting, T. Hou, R. Ewing, Accurate multiscale finite element methods for two-phase flow simulations.
2. Заславский М. Ю., Пергамент А. Х., Исследование неустойчивости типа «fingers» в фильтрационных течениях, препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН №31, 2002.
3. Y. R. Efendiev, T. Y. Hou, X. H. Wu, Convergence of a nonconforming multiscale finite element method, SIAM J. Num. Anal., 37 (2000), pp. 888-910.
4. Ph. Renard, G. de Marsily, Calculating equivalent permeability: a review, Advances in Water Resources, Vol. 20, Nos 5-6, pp. 253-278, 1997.
5. А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов, Метод опорных операторов для эллиптических и параболических краевых задач с разрывными коэффициентами в анизотропных средах, Математическое моделирование, т. 19, №5, сс. 105-116, 2007.
6. Д. Ю. Максимов, А. Х. Пергамент, Б. Д. Плющенков, О некоторых схемах расщепления в задачах газодинамики с теплопроводностью, препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН №70, Москва, 2005.
7. Р. П. Федоренко, Введение в вычислительную физику, сс. 501-516, Москва, 1994.